Р. Курант, Г. Роббинс

ЧТО ТАКОЕ МАТЕМАТИКА?

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ОЧЕРК ИДЕЙ И МЕТОДОВ

Перевод с английского
под редакцией
проф. *А. Н. Колмогорова*

Научно-издательский центр
«Регулярная и хаотическая динамика»

2001

УДК 51
К 93

Издание выполнено при финансовой поддержке
Фонда математического образования и просвещения, г. Москва

Курант Р., Роббинс Г.
Что такое математика? — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 592 стр.

Книга написана крупным математиком Рихардом Курантом в соавторстве с Г. Роббинсом. Она призвана сократить разрыв между математикой, которая преподается в школе, и наиболее живыми и важными для естествознания и техники разделами современной математической науки. Начиная с элементарных понятий, читатель движется к важным областям современной науки. Книга написана очень доступно и является классикой популярного жанра в математике.

Книга предназначена для школьников, студентов, преподавателей, а также для всех интересующихся развитием математики и ее структурой.

ISBN 5-93972-029-3 **К 93**

http://rcd.ru

Глава V
Топология

Введение

В середине XIX столетия возникло совершенно новое течение в геометрии, которому было суждено вслед за тем стать одной из главных движущих сил современной математики. Предметом новой отрасли, называемой топологией (analysis situs), является изучение свойств геометрических фигур, сохраняющихся даже тогда, когда эти фигуры подвергаются самым резким, самым решительным преобразованиям, уничтожающим все их и метрические и проективные свойства.

Одним из великих геометров этой эпохи был А.Ф.Мебиус (1790-1868), человек, научная карьера которого, по свойственному ему недостатку самоутверждения, оказалась довольно ограниченной: он занимал маловыдающуюся должность астронома в одной из второразрядных немецких обсерваторий. В возрасте шестидесяти восьми лет он представил Парижской Академии мемуар об «односторонних» поверхностях, содержащий кое-какие из наиболее изумительных фактов в новой отрасли геометрии. Подобно многим другим важным научным работам, его рукопись ряд лет залежалась на полках Академии, пока обстоятельства не сложились так, что ее опубликовал сам автор. Независимо от Мебиуса геттингенский астроном И. Листинг (1808–1882) сделал подобные же открытия и, будучи побуждаем Гауссом, в 1847 г. издал небольшую книгу «Vorstudien zur Topologie». Когда Бернгард Риман (1826–1866) прибыл в Геттинген, чтобы стать там студентом, математическая атмосфера этого университетского города уже была насыщена острым любопытством по отношению к новым и странным геометрическим идеям. Скоро он осознал, что именно в них нужно искать разгадку самых глубоких свойств аналитических функций комплексного переменного. Позднейшее развитие топологии, вероятно, едва ли обязано чему-либо в такой степени, как великолепному зданию римановой теории функций, в которой топологические концепции имеют самое фундаментальное значение.

На первых порах своеобразие методов, которыми приходилось действовать в новой области, воспрепятствовало тому, чтобы полученные здесь результаты были изложены в традиционной дедуктивной форме, типичной для элементарной геометрии.

Происходило нечто совсем иное: так, Пуанкаре, делая смелые шаги вперед, был вынужден широко и откровенно опираться на геометрическую интуицию. Даже в наши дни изучающий топологию явственно ощущает, что при слишком большой заботе о формальной безупречности существенно геометрическое содержание упускается из виду и тонет в массе деталей. Впрочем, как бы то ни было, нужно рассматривать как особое достижение то обстоятельство, что самые недавние работы по топологии включили эту отрасль геометрии в круг вполне строго построенных математических дисциплин, для которых интуиция была и остается источником, но не конечным критерием истины. По мере развития процесса «формализации» топологии, идущего от Л. Э. И. Брауэра, удельный вес топологии по отношению к математике в целом непрерывно возрастал. Существенные успехи в указанном направлении принадлежат американским математикам, в частности, О. Веблену, Дж. У. Александеру и С. Лефшетцу.

Хотя топологию можно с полной определенностью назвать продуктом последнего столетия, необходимо все же отметить, что еще и раньше было сделано несколько открытий, которые, как вытекает из современной систематики математических знаний, имеют ближайшее отношение к топологии. Из них самым крупным, несомненно, является установление формулы, связывающей числа вершин, ребер и граней простого многогранника: она была подмечена уже Декартом в 1640 г., позднее переоткрыта и использована Эйлером в 1752 г.; характерные черты топологического утверждения в этой формуле стали очевидными гораздо позднее — после того как Пуанкаре в «формуле Эйлера» и ее обобщениях усмотрел одну из центральных теорем топологии. Итак, по причинам как исторического, так и внутреннего порядка мы начнем наше знакомство с топологией именно с формулы Эйлера. Так как при первых шагах в неизведанной области идеал безупречной строгости вовсе не обязателен и даже мало желателен, то мы не поколеблемся по временам обращаться непосредственно к интуиции читателя.

§ 1. Формула Эйлера для многогранников

Хотя в античной геометрии изучение многогранников занимало одно из центральных мест, только Декарту и Эйлеру было суждено открыть следующее предложение: *пусть V — число вершин простого многогранника, E — число ребер, F — число граней: тогда непременно*

$$V - E + F = 2. \qquad (1)$$

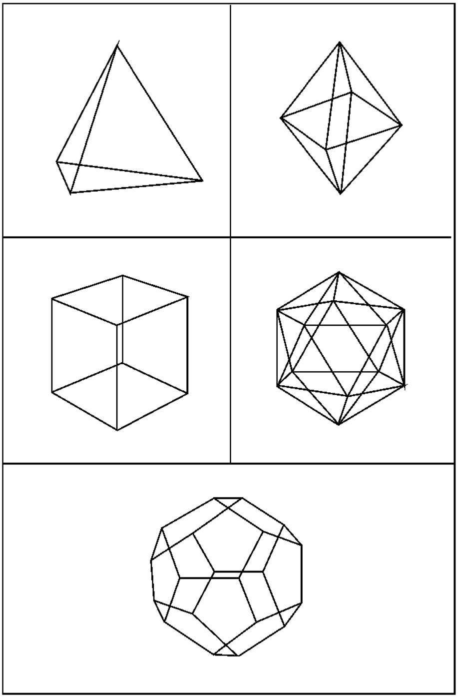

Рис. 119. Правильные многогранники

Под *многогранником* здесь подразумевается тело, поверхность которого состоит из конечного числа граней, имеющих форму многоугольников. В случае *правильных* многогранников все многоугольники конгруэнтны и все плоские углы при вершинах равны между собой. Многогранник называется *простым*, если в нем нет «дыр», так что посредством непрерывной деформации его поверхность может быть переведена в поверхность сферы. На рис. 120 изображен простой многогранник, который не является правильным; на рис. 121 изображен многогранник, который не является простым.

Предлагаем читателю проверить справедливость формулы Эйлера для всех многогранников, представленных на рис. 119 и 120; но пусть он убедится также, что для многогранника на рис. 121 эта формула неверна.

Переходя к доказательству формулы Эйлера, вообразим, что наш многогранник внутри пустой и что поверхность его сделана из тонкой

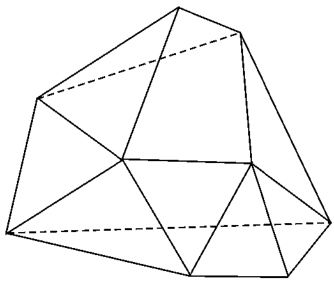

Рис. 120. Простой многогранник $V-E+F = 9-18+11 = 2$

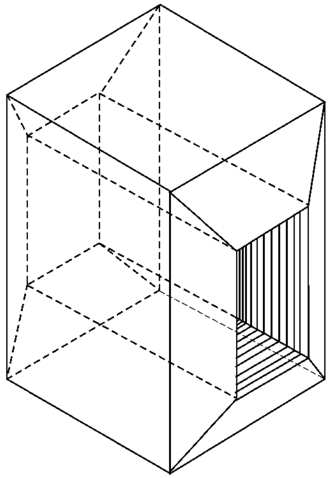

Рис. 121. Непростой многогранник $V - E + F = 16 - 32 + 16 = 0$

резины. Тогда, вырезав предварительно одну из граней пустого внутри многогранника, можно оставшуюся поверхность деформировать таким образом, что она расстелется по плоскости. Конечно, при этом и грани многогранника и углы между ребрами испытают резкие изменения. Но «сетка», составленная из вершин и ребер на плоскости, будет содержать то же число вершин и ребер, что и первоначальный многогранник, тогда как число граней станет на одну меньше, так как одна грань была вырезана. Мы убедимся теперь, что для полученной нами сетки на плоскости будет справедливо равенство $V - E + F = 1$; тогда, добавляя вырезанную грань, для первоначального многогранника получим равенство $V - E + F = 2$.

Прежде всего «триангулируем» плоскую сетку следующим образом. Если в сетке имеются многоугольники с числом углов, большим трех, то, выбрав один из них, проведем в нем какую-нибудь диагональ. В результате каждое из чисел E и F увеличится на единицу, но значение выражения $V - E + F$ от этого не изменится. Будем и дальше проводить диагонали, соединяя пары точек (рис. 122), пока сетка не окажется состоящей из одних только треугольников (в чем и заключается наша ближайшая цель). В триангулированной сетке величина $V-E+F$ имеет то же значение, какое имела и до триангуляции, так как проведение каждой новой диагонали этого значения не меняет. Некоторые из

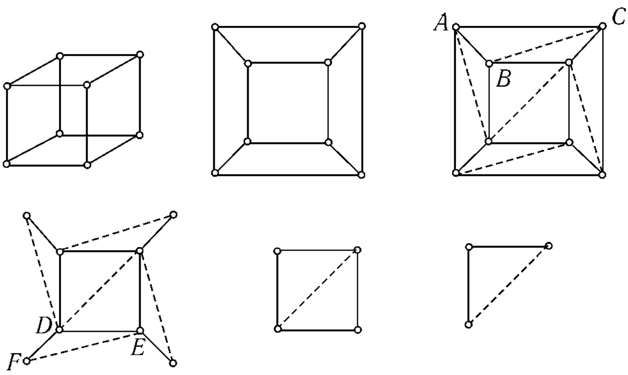

Рис. 122. Доказательство теоремы Эйлера

треугольников, далее, имеют ребра (проще сказать — стороны), принадлежащие к «границе» триангулированной сетки. Некоторые из этих треугольников (например, ABC) имеют лишь одно ребро на границе, другие — по два. Возьмем один из такого рода «граничных» треугольников и удалим из него все то, что не принадлежит какому-нибудь другому треугольнику. Так, в треугольнике ABC удалим ребро AC и саму грань, оставляя вершины A, B, C и ребра AB и BC, но в треугольнике DEF удалим грань, два ребра DF и FE и вершину F. При «уничтожении» треугольника ABC числа E и F уменьшаются на 1, а V не изменяется, так что $V-E+F$ также не изменяется. При уничтожении треугольника типа DEF V уменьшится на 1, E на 2 и F на 1, так что опять-таки $V-E+F$ не изменится. Последовательное осуществление таких удалений граничных треугольников (причем всякий раз меняется и сама граница) приводит, наконец, к одному-единственному треугольнику, имеющему, очевидно, три ребра, три вершины и одну грань. Для образуемой им совсем простой сетки $V-E+F=3-3+1=1$. Но мы видели, что при «уничтожении» каждого треугольника $V-E+F$ не изменялось. Значит, $V-E+F$ должно было равняться единице и для первоначальной плоской сетки, а также и для того многогранника с вырезанной гранью, из которого была получена плоская сетка. Отсюда следует, что для исходного многогранника (до вырезания грани) должно было иметь место равенство $V-E+F=2$. Этим и заканчивается доказательство теоремы Эйлера.

С помощью теоремы Эйлера легко показать, что существует не более пяти типов правильных многогранников. Предположим, что правильный многогранник имеет F граней, из которых каждая есть правильный n-угольник, и что у каждой вершины сходится r ребер. Считая ребра один раз по граням, другой — по вершинам, получим, во-первых,

$$nF = 2E \tag{2}$$

(так как каждое ребро принадлежит двум граням и, следовательно, считается дважды в произведении nF) и, во-вторых,

$$rV = 2E \tag{3}$$

(так как каждое ребро упирается в две вершины). Тогда равенство Эйлера (1) нам дает

$$\frac{2E}{n} + \frac{2E}{r} - E = 2,$$

или

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{E}. \tag{4}$$

Заметим прежде всего, обращаясь к рассмотрению последнего соотношения, что $n \geqslant 3$ и $r \geqslant 3$, так как многоугольник имеет не меньше трех сторон и в каждой вершине сходится не менее трех граней. С другой стороны, оба числа n и r не могут быть *более* 3, так как в противном случае левая часть равенства (4) не превышала бы $\frac{1}{2}$ и равенство было бы невозможно ни при каком положительном значении E. Итак, нам остается выяснить, какие значения может принять r, если $n = 3$, и какие значения может принять n, если $r = 3$. Подсчитав все возникающие возможности, мы получим число типов правильных многогранников.

При $n = 3$ равенство (4) принимает вид

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{6} = \frac{1}{E};$$

r может здесь равняться 3, 4 или 5 (6 или большее значение исключается, так как $\frac{1}{E}$ положительно.) При этих значениях n и r оказывается, что E соответственно равно 6, 12 или 30. Так получаются многогранники: тетраэдр, октаэдр и икосаэдр.

Таким же образом, при $r = 3$ равенство (4) принимает вид

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{E},$$

из которого следует, что $n = 3$, 4 или 5, и соответственно, $E = 6$, 12 или 30. Получаются многогранники: тетраэдр, куб и додекаэдр.

Подставляя полученные значения n, r и E в соотношения (2) и (3), мы установим число вершин V и число граней F соответствующих многогранников.

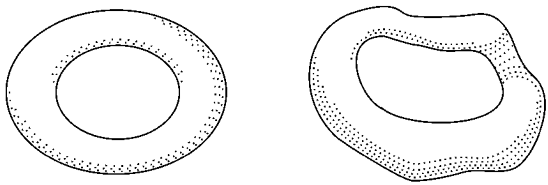

Рис. 123. Поверхности, топологически эквивалентные

§ 2. Топологические свойства фигур

1. Топологические свойства. Мы установили, что формула Эйлера справедлива для случая любого простого многогранника. Но эта формула не теряет смысла и значимости также и применительно к иным, гораздо более общим случаям: вместо многогранников элементарной геометрии с плоскими гранями и прямыми ребрами можно взять простые «многогранники», у которых «гранями» будут кривые поверхности, а «ребрами» — кривые линии, или можно нарисовать «грани» и «ребра» на поверхности, например, шара. Больше того, вообразим, что поверхность многогранника или сферы сделана из тонкого слоя резины; тогда формула Эйлера сохранится, как бы ни была деформирована рассматриваемая поверхность — путем изгибаний, сжатий, растяжений и т. д., лишь бы резиновый слой не был порван. Действительно, формула Эйлера относится только к *числу* вершин, ребер и граней; длины же, площади, двойные отношения, кривизна и т. п., как и иные понятия элементарной или проективной геометрии, в данном случае никакой роли не играют.

Мы уже указывали, что элементарная геометрия имеет дело с величинами (расстояния, углы, площади), которые не меняют своих значений при движениях рассматриваемых фигур, тогда как проективная геометрия занимается такими понятиями (точка, прямая, отношение инцидентности, двойное отношение), которые сохраняются при более широкой группе проективных преобразований. Однако и движения, и проективные преобразования — только очень частные случаи гораздо более общих *топологических преобразований*; топологическое преобразование одной геометрической фигуры A в другую A' определяется как произвольное соответствие $p \rightleftarrows p'$ между точками p фигуры A и точками p' фигуры A', обладающее следующими свойствами:

1. **Взаимной однозначностью.** Это значит, что каждой точке p фигуры A сопоставлена одна и только одна точка p' фигуры A', и обратно.

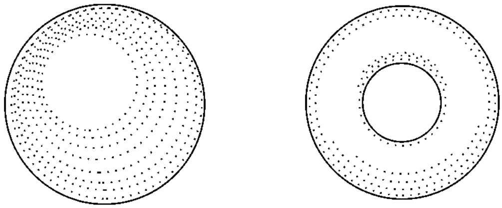

Рис. 124. Поверхности, топологически неэквивалентные

2. **Взаимной непрерывностью.** Это значит, что если мы возьмем две точки p, q фигуры A и станем двигать p так, чтобы расстояние между p и q неограниченно уменьшалось, то расстояние между соответствующими точками p', q' фигуры A' также будет неограниченно уменьшаться, и обратно.

Всякое свойство геометрической фигуры A, которое сохраняется также и для той фигуры A', в которую A переходит при топологическом преобразовании, называется *топологическим свойством* фигуры A; *топология* же — это та отрасль геометрии, которая рассматривает исключительно топологические свойства фигур. Представьте себе, что некоторая фигура должна быть скопирована «от руки» совершенно малоопытным, но очень добросовестным чертежником, который невольно искривляет прямые линии, искажает углы, расстояния и площади; тогда на сделанной им копии, хотя метрические и проективные свойства фигуры, может быть, и не сохранятся, но топологические свойства все же останутся в неприкосновенности.

Наиболее наглядными примерами топологических преобразований могут служить *деформации.* Вообразите, что фигура вроде сферы или треугольника сделана из тонкого слоя резины (или нарисована на таковом), и затем растягивайте и крутите резину самыми разнообразными способами, лишь бы не рвать ее и не приводить двух различных точек в состояние физического совпадения. (Приведение двух различных точек в состояние физического совпадения нарушило бы условие 1. Разрыв резинового слоя противоречил бы условию 2: действительно, рассматривая две точки, лежащие по разные стороны линии разрыва, мы видим, что расстояние между ними может быть неограниченно малым, тогда как после разрыва этого уже не будет.)

Фигура в окончательном ее положении — после указанных операций — будет находиться в топологическом соответствии с фигурой в ее первоначальном положении. Треугольник можно деформировать в другой треугольник, или в окружность, или в эллипс, и потому названные фигуры обладают совершенно одинаковыми топологическими свойствами. Но никак нельзя деформировать круг в отрезок прямой или поверхность сферы — в боковую поверхность цилиндра.

Но общее понятие топологического преобразования шире, чем понятие деформации. Например, если фигура разрезана до деформации и склеена по тем же линиям после деформации, то в итоге, несомненно, получается некоторое топологическое преобразование первоначальной фигуры, хотя это преобразование может и не быть деформацией. Так, две кривые, изображенные на рис. 134 (стр. 301), топологически эквивалентны друг другу и эквивалентны каждая окружности, так как их можно разрезать, распутать и снова склеить. Но предварительно не разрезавши, невозможно одну кривую деформировать в другую.

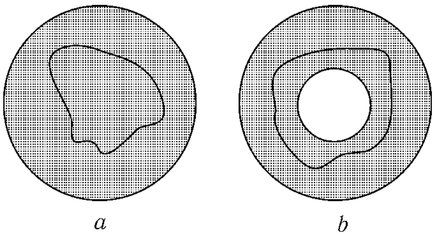

Рис. 125. Односвязная и двусвязная области

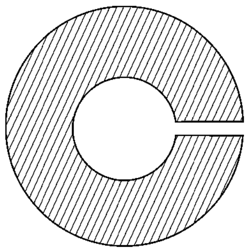

Рис. 126. После разреза двусвязная область становится односвязной

Топологические свойства фигур (вроде того свойства, которое дается теоремой Эйлера, или других, которые будут рассмотрены ниже) представляют величайший интерес во многих математических исследованиях. В известном смысле это — самые глубокие, самые основные геометрические свойства, так как они сохраняются при самых «резких» преобразованиях.

2. Свойства связности. В качестве следующего примера фигур, топологически неэквивалентных, рассмотрим две плоские области на рис. 125. Первая состоит из всех точек, заключенных внутри круга; вторая — из всех точек, расположенных между двумя концентрическими кругами. Любая замкнутая кривая, лежащая в области a, может быть непрерывно деформирована или «сжата» в одну точку, ***не выходя из этой области.*** Область, обладающая таким свойством, называется ***односвязной.*** Что касается области b, то она не односвязна. Так, окружность, концентрическая с двумя граничными окружностями и лежащая между ними, не может быть сжата в точку, не выходя из области, так как во время деформации кривая должна будет пройти через общий центр кругов, а он не принадлежит рассматриваемой области. Область, которая не является односвязной, называется *многосвязной*. Если двусвязную область b разрезать вдоль одного из радиусов, как это сделано на рис. 126, то полученная область становится односвязной.

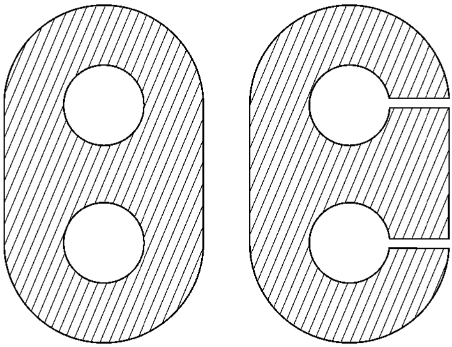

Рис. 127. Редукция трехсвязной области

Вообще, можно построить области с двумя, тремя или большим количеством «дыр». Область с двумя «дырами» изображена на рис. 127; чтобы превратить ее в односвязную, нужно сделать два разреза. Если нужно сделать $n-1$ взаимно не пересекающихся разрезов от границы к границе, чтобы превратить данную многосвязную область в односвязную, то говорят, что область имеет *порядок связности* n. Порядок связности плоской области представляет собой важный топологический инвариант этой области.

§ 3. Другие примеры топологических теорем

1. Теорема Жордана о замкнутой кривой. На плоскости нарисована простая замкнутая кривая (нигде сама себя не пересекающая). Посмотрим, какое свойство этой фигуры сохраняется неизменным даже в том случае, если плоскость будет подвергаться каким угодно деформациям, как будто бы она была сделана из тонкого слоя резины. Длина кривой или площадь ограниченной ею части плоскости при деформациях не сохраняется. Но у рассматриваемой конфигурации есть и топологическое свойство, столь простое, что может показаться тривиальным. *Простая замкнутая кривая C на плоскости делит плоскость ровно на две области, внутреннюю и внешнюю.* Точнее говоря, мы утверждаем следующее: точки плоскости разбиваются на два класса — A (внешние точки) и B (внутренние точки) — таким образом, что любая пара точек, принадлежащих одному и тому же классу, может быть связана кривой, не имеющей общих точек с C, тогда как всякая кривая, соединяющая две какие-нибудь точки разных классов, непременно пересекается с C. Это утверждение вполне очевидно, например, для случая окружности или эллипса, но уже чуть менее очевидно для такой сложной кривой, каков причудливой формы многоугольник, изображенный на рис. 128.

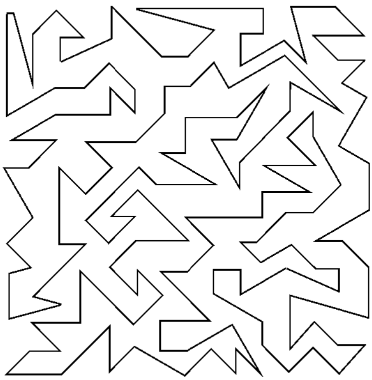

Рис. 128. Какие точки находятся внутри этого многоугольника?

Впервые эта теорема была сформулирована Камиллом Жорданом (1838–1922) в его широко известном «Cours d'analyse», из которого целое поколение математиков почерпнуло современную концепцию математической строгости. Как это ни странно, доказательство, данное самим Жорданом, не было ни кратким, ни простым по своей идее, но в особенности удивительно то, что, как оказалось, оно и не было вполне исчерпывающим, и понадобились значительные усилия, чтобы восполнить его пробелы. Первые строгие доказательства теоремы Жордана были очень сложными и трудно воспринимались даже людьми с хорошей математической подготовкой. Сравнительно простые доказательства были придуманы лишь недавно. Одно из затруднений заключается в большой общности понятия «простой замкнутой» кривой, значительно более широкого, чем понятие многоугольника или «гладкой» кривой: по определению «простая замкнутая кривая» есть любая кривая, топологически эквивалентная окружности. С другой стороны, необходимо таким терминам, как «внутри» или «вне» (столь ясным интуитивно), дать логические определения, прежде чем строгое доказательство станет возможным. Проанализировать в их полной общности возникающие на этой почве отношения и концепции есть теоретическая задача первостепенного значения, разрешению которой в большой степени служит современная топология. Но, с другой стороны, следует иметь в виду и то обстоятельство, что, занимаясь изучением конкретных явлений в области геометрии, в громадном большинстве случаев мало уместно вводить понятия, неограниченная общность которых создает излишние затруднения. Так, возвращаясь к теореме Жордана, существенно то, что для случая «хорошо ведущих себя» кривых — например, для многоугольников или для кривых с непрерывно меняющейся касательной (которые только и встречаются в наиболее важных задачах) — доказательство этой теоремы может быть проведено совсем просто. Для случая многоугольников мы укажем доказательство в дополнении к этой главе.

2. Проблема четырех красок. Пример только что рассмотренной теоремы о кривой Жордана способен, пожалуй, навести на мысль, что топология занимается придумыванием строгих доказательств для таких истин, в которых не станет сомневаться ни один здравомыслящий человек. Но это совсем не так: существует много вопросов топологического характера, в числе которых иные формулируются чрезвычайно просто и на которые интуиция не дает удовлетворительных ответов. Примером может служить знаменитая «проблема четырех красок».

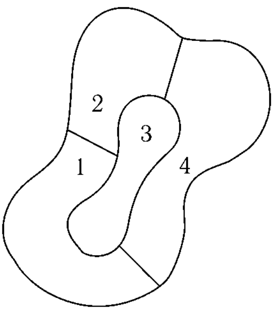

Рис. 129. Раскрашивание карты

Раскрашивая географическую карту, обыкновенно стараются распределить цвета между странами таким образом, чтобы две страны, имеющие общую границу, были окрашены поразному. Было обнаружено на опыте, что любая карта, сколько бы ни было изображено на ней стран и как бы они ни были расположены, может быть раскрашена, с соблюдением указанного правила, не более чем *четырьмя* красками. Легко убедиться, что меньшее число достаточным для всех случаев не является. На рис. 129 изображен остров посреди моря, который никак нельзя раскрасить менее чем четырьмя красками, так как на нем имеется четыре страны, из которых каждая соприкасается с остальными тремя.

Тот факт, что до настоящего времени не было ни разу найдено такой карты, для раскрашивания которой потребовалось бы более четырех красок, приводит к мысли о справедливости такой теоремы: *при любом данном разбиении плоскости на области, не покрывающие друг друга ни полностью, ни частично, всегда возможно пометить их цифрами* 1, 2, 3, 4 *таким образом, чтобы «прилежащие» области имели разные цифры.* Под «прилежащими» областями понимаются такие, которые имеют целый отрезок границы общим: две области, имеющие лишь одну общую точку (или даже конечное число общих точек) — как, например, штаты Колорадо и Аризона — не будут называться «прилежащими», так как никакого смешения или неудобства не возникает, если их раскрасить одинаково.

Есть основания полагать, что впервые проблема четырех красок была поставлена Мебиусом в 1840 г.; позднее ее формулировали де Морган в 1850 г. и Кэли в 1878 г. «Доказательство» ее было опубликовано в 1879 г. Кемпе, но Хивуд (Heawood) в 1890 г. нашел ошибку в рассуждении Кемпе. Пересматривая доказательство Кемпе, Хивуд обнаружил, что *пяти* красок всегда достаточно. (Доказательство теоремы о пяти красках дано в приложении к этой главе.) Несмотря на усилия многих выдающихся математиков, положение вплоть до нашего времени остается в сущности неизменным. Было *доказано*, что пяти красок достаточно для всех карт, и *имеется предположение*, что достаточно также четырех. Но, как и в случае знаменитой теоремы Ферма (см. стр. 71), ни доказательства этого предположения, ни противоречащего ему примера приведено не было, и указанное предположение остается одной из нерешенных «больших» математических проблем. Заметим, между прочим, что проблема четырех красок была решена в положительном смысле для частных случаев, когда число областей не превышает *тридцати восьми*. Отсюда ясно, что если в общем случае теорема неверна, то опровергающий пример должен быть не особенно простым.

В рассматриваемой проблеме четырех красок предполагается, что карта нарисована или на плоскости, или на сфере. Эти два случая эквивалентны. В самом деле, каждая карта, заданная на сфере, может быть перенесена па плоскость, если проделаем дырочку внутри одной из областей A и затем расплющим оставшуюся часть сферы по плоскости, как мы это делали при доказательстве теоремы Эйлера. Полученная карта на плоскости покажет нам «остров», состоящий из всех нетронутых областей, и «море», состоящее из одной области A. С другой стороны, проделывая всю эту процедуру в обратном направлении, можно любую карту на плоскости превратить в карту на сфере. Итак, вместо карт на плоскости можно ограничиться рассмотрением карт на сфере. Больше того, так как деформации областей и их границ существенно не влияют на нашу проблему, то можно предположить, что граница каждой области есть простой замкнутый многоугольник, состоящий из дуг больших кругов. Но даже таким образом «регуляризированная» проблема не является решенной; трудности в данном случае (не в пример теореме Жордана) зависят не от общности понятия области и кривой.

В связи с проблемой четырех красок стоит отметить то замечательное обстоятельство, что для некоторых поверхностей более сложного типа, чем плоскость или сфера, соответствующие теоремы действительно были доказаны, так что, как это ни парадоксально, анализ более сложных (в геометрическом отношении) поверхностей в данном случае проводится легче, чем более простых. Например, было установлено для случая поверхности тора, имеющей вид «бублика» (см. рисунок 123), что всякая нарисованная на ней «карта» может быть раскрашена *семью* красками и что, с другой стороны, на ней мыслимы такие «карты», составленные из семи областей, что каждая область соприкасается с остальными шестью.

***3. Понятие размерности.** Понятие о «числе измерений», или о «размерности», не представляет особых затруднений, поскольку речь идет о простых геометрических образах, каковы точки, линии, треугольники или многогранники. Отдельная точка или любое *конечное* множество точек имеет размерность нуль, отрезок — размерность 1, поверхность треугольника или сферы — размерность 2. Множество всех точек куба имеет размерность 3. Однако при желании обобщить понятие размерности на точечные множества более общих типов возникает необходимость в точном определении. Какую размерность следует, например, приписать множеству R, состоящему из всех точек x-оси, у которых координаты x — *рациональные* числа? Множество рациональных точек на x-оси везде плотно и потому, казалось бы, ему, как и самому отрезку прямой, надлежало бы приписать размерность 1. С другой стороны, между всякими двумя рациональными точками существуют иррациональные «дыры», как между всякими двумя точками конечного множества, и это говорит в пользу размерности 0.

Еще запутаннее обстоит дело с размерностью любопытного множества, впервые рассмотренного Кантором, построенного следующим образом. Из единичного отрезка $0 \leqslant x \leqslant 1$ удалим среднюю треть (интервал), т. е. все точки x, удовлетворяющие неравенству $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$. Оставшееся точечное множество обозначим через C_1. Множество C_1 состоит из двух отрезков; удалим теперь из каждого отрезка его среднюю треть и то множество, которое останется, обозначим через C_2. Повторим опять эту процедуру, удаляя среднюю треть у всех четырех отрезков; получим C_3. Дальше таким же образом получим C_4, C_5, C_6, ... Обозначим через C множество точек, которое останется, когда все средние трети будут удалены; т. е. C есть, другими словами, множество точек, принадлежащих одновременно всем множествам C_1, C_2, C_3, ... В первой операции был удален интервал длины $\frac{1}{3}$; во второй операции — два интервала, каждый длины $\frac{1}{9}$ и т. д.; сумма длин всех удаленных

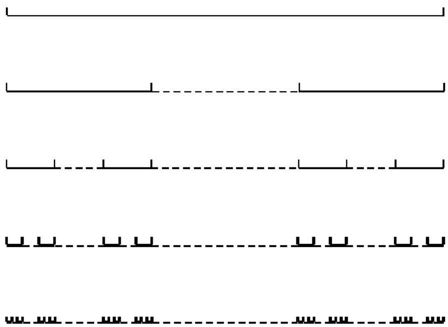

Рис. 130. Канторово множество

интервалов равна

$$1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3^2} + 2^2 \cdot \frac{1}{3^3} + \ldots = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots\right).$$

Бесконечный ряд в больших скобках есть геометрическая прогрессия, сумма которой равна $\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{3}} = 3$; итак, сумма длин удаленных промежутков составляет 1. И все-таки далеко не все точки отрезка удалены: множество C не пустое. Например, все точки, являющиеся концами удаленных отрезков

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3}; \quad \frac{1}{9}, \quad \frac{2}{9}, \quad \frac{7}{9}, \quad \frac{8}{9}; \ldots$$

ему принадлежат. Можно легко убедиться, что множество C состоит из всех тех чисел x, разложения которых в бесконечную дробь по основанию 3 могут быть написаны в форме

$$x = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \ldots + \frac{a_n}{3^n} + \ldots,$$

где всякое a_n есть 0 или 2, тогда как в аналогичном разложении для всякой удаленной точки среди чисел a_n хоть раз встретится 1.

Какова же размерность множества C? Диагональный процесс, с помощью которого была доказана несчетность множества всех действительных чисел, может быть видоизменен таким образом, чтобы тот же результат получился и для множества C. Отсюда было бы естественно заключить, что множеству C надлежит приписать размерность 1. С другой стороны, C не содержит никакого, даже самого малого, промежутка, как и любое конечное множество; это сближает C с множествами размерности 0. Таким же образом, восставив в *плоскости* x, y из каждой рациональной точки или из каждой точки канторова множества перпендикуляр длины 1 к оси x (направляя его в сторону положительных значений y), мы получим множества, относительно которых может возникнуть сомнение — приписать ли ему размерность 2 или 1.

Впервые Пуанкаре (в 1912 г.) обратил внимание на необходимость более глубокого анализа и более точного определения размерности. Пуанкаре заметил, что прямая или кривая имеет размерность 1, так как любые две точки на ней можно разделить, удаляя одну единственную точку (множество размерности 0); плоскость же имеет размерность 2 по той причине, что для разделения двух точек на плоскости нужно удалить целую замкнутую кривую (множество размерности 1). Это приводит к мысли о том, что понятие размерности имеет «индуктивную» природу: некоторому «пространству» следует приписать размерность n, если две точки в нем разделяются при удалении подмножества точек размерности $n-1$ (но удаления подмножества меньшей размерности уже не было бы достаточно). В сущности такого рода индуктивное определение неявно содержится уже в евклидовых «Началах», где одномерный образ толкуется как нечто, граница чего состоит из точек; двумерный образ — как нечто, граница чего состоит из линий; наконец, трехмерный образ — как нечто, граница чего состоит из поверхностей.

За последние годы была развита обширная теория — теория размерности. Определение размерности начинается с того, что разъясняется смысл термина «точечное множество размерности 0». Любое *конечное* точечное множество обладает тем свойством, что каждая его точка может быть заключена в сколь угодно малую область пространства, причем на границе области нет точек множества. Это свойство принимается теперь за определение размерности 0. Условимся ради удобства говорить, что пустое множество имеет размерность -1. В таком случае множество S имеет размерность 0, если оно не имеет размерности -1 (т. е. если S содержит хоть одну точку) и если каждая точка S может быть заключена в произвольно малую область, граница которой пересекает S по множеству размерности -1 (т. е. совсем не содержит ни одной точки S). Так, например, множество рациональных точек на прямой имеет размерность 0, так как каждая рациональная точка может быть рассматриваема как центр произвольно малого промежутка с иррациональными концами. Канторово множество C — также размерности 0, так как, подобно множеству рациональных точек, оно получается посредством удаления везде плотного множества точек прямой.

Итак, мы уже определили понятия «размерность -1» и «размерность 0». Теперь легко понять, что такое «размерность 1»: говорят, что множество S имеет «размерность 1», если оно не есть ни размерности -1, ни размерности 0 и если каждая точка S может быть заключена в произвольно малую область, граница которой пересекается с S по множеству размерности 0. Отрезок прямой обладает этим свойством, так как границей каждого промежутка является пара точек, т. е. множество размерности 0 по предыдущему определению. Дальше, продолжая таким же образом, мы можем последовательно определить, что такое размерность 2, размерность 3 и т. д., причем каждое следующее определение основывается на предыдущем.

Таким образом, говорят, что множество S имеет размерность n, если оно не имеет меньшей размерности и если каждая точка S может быть заключена в произвольно малую область, граница которой пересекается с S по множеству размерности $n-1$. Например, плоскость имеет размерность 2, так как любая точка плоскости может быть заключена в кружок произвольно малого радиуса, граница которой имеет размерность 1.[1] В обыкновенном пространстве никакое множество точек не может иметь размерность, большую чем 3, так как любая точка пространства есть центр произвольно малой сферы, граница которой имеет размерность 2. Но в современной математике термин «пространство» употребляется в более общем смысле; он обозначает любую систему объектов, для которой введено понятие «расстояния» или «окрестности», и такого рода абстрактные «пространства» могут иметь размерность, большую чем 3. Простым примером является *декартово n-пространство*, «точки» которого суть системы из n действительных чисел, взятых в определенном порядке:

$$P = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$
$$Q = (y_1, y_2, \dots, y_n),$$

а «расстояние» между P и Q определяется по формуле

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Можно показать, что это пространство имеет размерность n. Пространство, которое не имеет размерности n, как бы велико ни было n, называется пространством бесконечной размерности. Известно много примеров таких пространств.

В теории размерности устанавливается одно чрезвычайно интересное свойство двумерных, трехмерных и вообще n-мерных фигур. Начнем с двумерного случая. Если какая-то простая двумерная фигура подразделена на достаточно маленькие «ячейки» (причем предполагается, что каждая ячейка содержит свою границу), то непременно найдутся такие точки, которые принадлежат сразу *по меньшей мере трем ячейкам, какова бы ни была форма выбранных ячеек.* Вместе с тем *существуют такие подразделения* фигуры на ячейки, что никакая точка фигуры не принадлежит сразу *больше чем трем* ячейкам. Так, если рассматриваемая двумерная фигура есть квадрат (рис. 131), то непременно имеются точки вроде той, которая сразу принадлежит трем ячейкам 1, 2 и 3, но для указанного на рисунке подразделения не существует точки, которая сразу принадлежала бы большему числу ячеек. Точно так же в трехмерном случае можно доказать, что если некоторая

[1] Сказанное не означает, что доказательство того, что плоскость имеет размерность 2 в смысле нашего определения, уже закончено: остается доказать, что граница круга («окружность») имеет размерность 1, и что сама плоскость не имеет размерности 0 или 1. Эти утверждения можно доказать, как аналогичные утверждения для высших размерностей. Все предыдущие рассуждения показывают, что приведенное выше общее определение размерности не стоит в противоречии с обычным его пониманием.

объемная фигура (тело) разбита на достаточно маленькие ячейки, то наверное существуют точки, принадлежащие по меньшей мере четырем ячейкам, и вместе с тем можно выбрать такие подразделения, что никакая точка не будет принадлежать сразу больше чем четырем ячейкам.

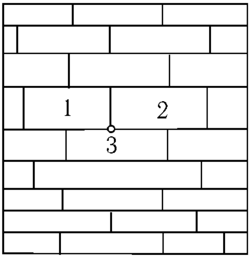

Рис. 131. Теорема о покрытии

Все эти соображения приводят нас к следующей теореме, высказанной Лебегом и Брауэром: *если n-мерная фигура подразделена на достаточно маленькие ячейки, то непременно существуют точки этой фигуры, принадлежащие сразу по меньшей мере $n+1$ ячейкам; вместе с тем возможно указать и такие подразделения, что ни одна точка фигуры не будет принадлежать сразу более чем $n+1$ ячейкам.* Эта теорема характеризует размерность рассматриваемой фигуры: все фигуры, для которых теорема верна, являются n-мерными, все прочие имеют иную размерность. По этой причине указанная теорема может быть взята за определение размерности (так и делают некоторые авторы).

Размерность фигуры относится к числу топологических ее свойств: никакие две фигуры различных размерностей не могут быть топологически эквивалентными. В этом заключается замечательная теорема об «инвариантности размерности»: чтобы оценить ее должным образом, стоит напомнить другую теорему (доказанную на стр. 121), согласно которой множество точек квадрата имеет ту же мощность, что и множество точек отрезка. Соответствие между точками, установленное при доказательстве этой теоремы, не топологическое, так как требование непрерывности нарушается.

***4. Теорема о неподвижной точке.** В приложениях топологии к другим отраслям математики играют важную роль теоремы о «неподвижной точке». Типическим примером является излагаемая ниже теорема Брауэра. Она гораздо менее «очевидна» в интуитивном смысле, чем другие топологические теоремы.

Рассмотрим круглый диск на плоскости. Под таковым мы понимаем внутренность некоторого круга вместе с его границей (окружностью). Предположим, что весь этот диск подвергается некоторому топологическому преобразованию (не обязательно взаимно однозначному), при котором всякая точка диска остается точкой диска, хотя и меняет свое положение. Например, представляя себе этот диск сделанным из тонкой резины, можно его сжимать, растягивать, вращать, изгибать — одним словом, деформировать как угодно, лишь бы его точки не вышли за пределы первоначального положения диска. Иначе еще можно представить себе, что жидкость, налитая в стакан, приведена в движение таким образом, что частицы, находившиеся на поверхности, остаются на ней и во время движения; тогда в каждый определенный момент времени положение частиц на поверхности, определяет некоторое топологическое преобразование или трансформацию первоначального их распределения. Теорема Брауэра утверждает: *каждое непрерывное преобразование такого рода оставляет неподвижной по крайней мере одну точку*; другими словами, существует по меньшей мере одна точка, положение которой после преобразования совпадает с положением ее до преобразования. (В примере с жидкостью неподвижные точки зависят от избранного момента времени; в частности, если движение сводится к простому круговому вращению, то неподвижной точкой в любой момент является центр.) Излагаемое далее доказательство существования неподвижной точки — очень характерный пример рассуждений, применяемых в топологии.

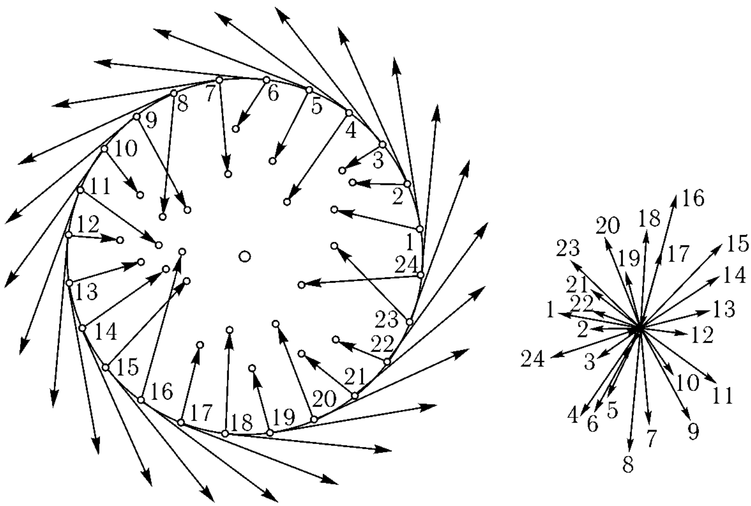

Рис. 133. К доказательству теоремы Броуэра

Рассмотрим наш диск до и после трансформации и допустим, что, вопреки утверждению теоремы, *ни одна* точка не остается неподвижной, так что любая точка диска после трансформации превращается в некоторую *другую* точку диска. Каждой точке P диска в его первоначальном положении сопоставим стрелку или «вектор трансформации» PP', причем P' есть та точка, в которую переходит P после трансформации. Такая стрелка будет поставлена во всякой точке диска, так как всякая точка куда-то перемещается. Рассмотрим теперь все точки граничной окружности вместе с соответствующими векторами трансформации. Все эти векторы направлены внутрь круга, так как, по предположению, ни одна точка не выходит за его пределы. Начнем с какой-нибудь точки P, лежащей на граничной окружности, и пойдем по этой окружности в направлении, противоположном движению часовой стрелки. При этом направление вектора трансформации будет изменяться, так как различным точкам границы соответствуют различно направленные векторы. Все эти векторы можно также представить себе (подвергнувши их параллельному переносу) выходящими из некоторой одной и той же точки плоскости (рис. 133). Легко понять, что, когда мы обойдем один раз весь круг от точки P_1 до точки P_2, соответствующий вектор, после ряда поворотов, вернется в первоначальное положение. Число полных поворотов, сделанных при этом нашим вектором, мы назовем *индексом* рассматриваемой граничной окружности; точнее говоря, мы определим индекс как *алгебраическую сумму* различных изменений в угле векторов, условливаясь, что всякому частному повороту по часовой стрелке приписывается знак минус, против часовой стрелки — знак плюс. Индекс есть итоговый результат, который a priori равен одному из чисел 0, ± 1, ± 2, $\pm 3, \ldots$, соответствующих итоговым поворотам на $0°$, $\pm 360°$, $\pm 720°, \ldots$. Мы утверждаем теперь, что индекс граничной окружности равен единице, т. е. что итоговый поворот вектора трансформации составляет один полный поворот в положительном направлении. Прежде всего напомним еще раз, что вектор трансформации, имеющий начало в точке граничного круга, направлен непременно внутрь круга, а не по касательной. Если допустим, что итоговый поворот вектора трансформации отличается от итогового поворота *касательного вектора* (а этот последний поворот в точности равен $360°$, так как касательный вектор, очевидно, делает один полный поворот), то разность между итоговыми поворотами касательного вектора и вектора трансформации будет равна кратному $360°$, но никак не нулю. Отсюда следует, что вектор трансформации при обходе круга должен будет по крайней мере раз сделать полный поворот вокруг касательного вектора, а так как оба вектора изменяются непрерывно, то в некоторой точке окружности направления двух векторов совпадут. Но это, как мы видели, невозможно.

Рассмотрим теперь окружность, концентрическую границе диска, но с меньшим радиусом, а также соответствующие векторы трансформации. Для этой новой окружности индекс также непременно равен единице. В самом деле, при переходе от граничной окружности к новой окружности индекс должен меняться непрерывно, так как направления самих векторов трансформации меняются непрерывно. Но индекс может принимать только целые значения и потому остается равным единице: действительно, переход от единицы к какому-нибудь другому целому числу обязательно был бы связан со скачком, т. е. нарушением непрерывности. (Очень характерное математическое рассуждение: величина меняется непрерывно, но может принимать только целые значения, значит, она постоянна.) Итак, мы можем найти окружность, концентрическую граничной, притом сколь угодно малую, для которой индекс будет равен единице. Но это невозможно, так как, в силу непрерывности преобразования, векторы трансформации в достаточно малом круге должны весьма мало отличаться от вектора в центре круга. И потому итоговый поворот такого вектора при обходе круга может быть сделан, скажем, меньше 10°, если только радиус круга будет достаточно мал. Но отсюда следует, что индекс такого круга (обязательно целое число) не может быть отличен от нуля. Полученное противоречие показывает, что сделанное нами допущение об отсутствии неподвижных точек преобразования должно быть отвергнуто. Таким образом, теорема доказана.

Теорема о неподвижных точках имеет место не только для кругового диска, но, конечно, и для треугольника, квадрата и всякой другой фигуры, в которую диск может быть переведен топологическим преобразованием. В самом деле, если бы некоторая фигура A, получающаяся из кругового диска посредством такого рода трансформации, могла быть преобразована сама в себя без неподвижных точек, то тем самым было бы определено и топологическое преобразование кругового диска самого в себя без неподвижных точек, а это, как мы видели, невозможно. Теорема обобщается также на случай трехмерных фигур — сфер или кубов, но доказательство не столь просто.

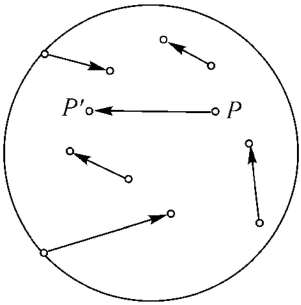

Рис. 132. Векторы преобразования

Хотя теорема Брауэра о неподвижных точках в случае круга не является вполне очевидной в интуитивном смысле, однако легко убедиться, что она является непосредственным следствием такой, достаточно очевидной теоремы: *невозможно трансформировать непрерывно круговой диск в одну только его граничную окружность таким образом, чтобы каждая точка этой окружности оставалась неподвижной.* Убедимся, что существование непрерывной трансформации диска на себя без неподвижных точек противоречит этой последней теореме. Предположим, что указанного рода непрерывная трансформация $P \to P'$ существует. Тогда для всякой точки P нашего диска проведем вектор с началом в точке P', проводя его через P и заканчивая в точке P^*, где он встретится с граничной окружностью. Тогда преобразование $P \to P^*$ будет непрерывным преобразованием всего диска в граничную окружность, оставляющим неподвижными все точки этой окружности, возможность чего была отвергнута. Подобное рассуждение можно применить и при доказательстве теоремы Брауэра в трехмерном случае сферы или куба.

Легко убедиться, с другой стороны, что для некоторых фигур непрерывные преобразования в себя без неподвижных точек возможны.

Например, кольцеобразная область между двумя концентрическими кругами может быть подвергнута вращению около центра на угол, не являющийся кратным 360°, и это как раз будет непрерывным преобразованием области в себя без неподвижных точек. Такое же преобразование можно произвести над поверхностью сферы, сопоставляя всякой ее точке диаметрально противоположную. Но, применяя тот же метод, что и в случае диска, не представит труда доказать, что непрерывное преобразование сферической поверхности, не переводящее ни одной точки в диаметрально противоположную (например, всякая малая деформация), непременно имеет неподвижные точки.

Теоремы о неподвижных точках вроде перечисленных выше доставляют могущественный метод для доказательства многих «теорем существования» в разных областях математики, причем геометрический характер этих теорем часто далеко не очевиден. Замечательным примером может служить теорема Пуанкаре, высказанная им незадолго до смерти, в 1912 г., без доказательства. Из этой теоремы непосредственно вытекает существование бесчисленного множества периодических орбит в ограниченной проблеме трех тел. Пуанкаре не сумел обосновать своей догадки, доказательство этого замечательного факта получил через год американский математик Г. Д. Биркгофф. С тех пор топологические методы неоднократно и с большим успехом применялись к изучению качественного поведения динамических систем.

5. Узлы. В качестве последнего примера отметим, что трудные математические проблемы топологического характера возникают в связи с изучением узлов. Узел образуется, когда из отрезка веревки делают петли, затем сквозь них пропускают концы веревки и, наконец, два конца соединяют вместе. Полученная, изготовленная из веревки замкнутая кривая представляет собой геометрическую фигуру, существенные свойства которой не изменяются, как бы в дальнейшем не перетягивать или не перекручивать веревку. Но как возможно было бы дать внутреннюю характеристику, которая позволила бы различить тем или иным способом «заузленные» кривые между собой и отличать их от

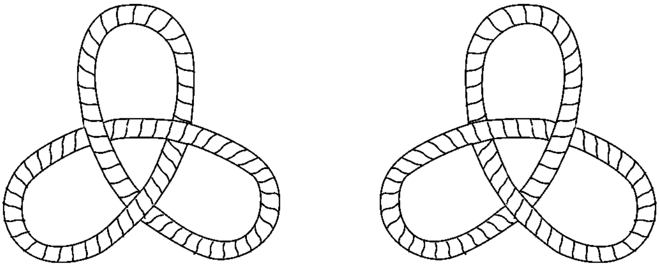

Рис. 134. Топологически эквивалентные узлы, не переводящиеся друг в друга

«незаузленных» вроде круга? Ответ далеко не прост и еще менее прост исчерпывающий математический анализ узлов разных типов. Затруднения встречаются даже при самых первых шагах в этом направлении. Взгляните на два узла, напоминающие трилистники, изображенные на рис. 134. Они совершенно симметричны друг другу, являются взаимно «зеркальными отображениями», они топологически эквивалентны и вместе с тем неконгруэнтны друг другу. Возникает проблема: можно ли деформировать непрерывным движением один узел в другой? Ответ отрицателен; но доказательство потребовало бы значительно большего владения топологической техникой и больших знаний из области теории групп, чем предполагают рамки этой книги.

§ 4. Топологическая классификация поверхностей

1. Род поверхности. Многие простые, но весьма существенные обстоятельства выясняются при изучении двумерных поверхностей. Сравним, например, поверхность сферы с поверхностью тора. Взглянув на рис. 135, сразу можно обнаружить различие: на сфере, как и на плоскости, замкнутая кривая, вроде C, разделяет поверхность на две части; но на торе существуют и такие замкнутые кривые, например C', которые не разделяют поверхности на две части. Если мы говорим, что кривая C разделяет сферу на две части, то это означает, другими словами, что при разрезании поверхности сферы по кривой C эта поверхность распадается на два не связанных между собой куска, или, еще иначе, что можно найти две такие точки сферы, что всякая кривая на сфере, их соединяющая, непременно пересечется с кривой C. Напротив, если разрезать тор по кривой C', то после разреза поверхность не распадется: любые две ее точки можно соединить кривой, не имеющей общих точек с C'. Указанное различие свидетельствует о том, что сфе-

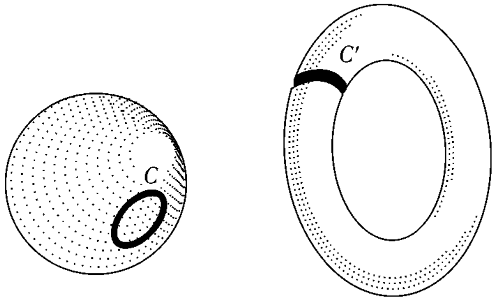

Рис. 135. Разрезы на сфере и на торе

ра и тор в топологическом смысле не принадлежат одному и тому же классу поверхностей: тор нельзя топологически преобразовать в сферу.

Рассмотрим теперь поверхность с двумя «дырами», изображенную на рис. 136. На этой поверхности оказывается возможным провести сразу две замкнутые кривые A и B, которые не разделяют поверхности на части. Тор, напротив, при проведении двух таких кривых непременно разделится на части. С другой стороны, любые три замкнутые кривые разделяют нашу поверхность с двумя дырами.

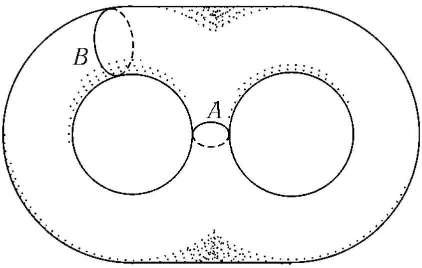

Рис. 136. Поверхность рода 2

Все это подсказывает мысль ввести понятие *рода* поверхности, понимая под родом поверхности наибольшее возможное число взаимно не пересекающихся простых замкнутых кривых, которые можно провести на поверхности, не разделяя ее на части. Род сферы равен 0, род тора равен 1, род поверхности, изображенной на рис. 136, равен 2. Такая же поверхность с p «дырами» имеет род p. Род есть топологический инвариант поверхности: он не изменяется при деформировании поверхности. Обратно, можно доказать (но мы не приводим здесь этого доказательства), что если две замкнутые поверхности имеют один и тот же род, то одну можно деформировать в другую; таким образом, род $p = 0, 1, 2, \ldots$ замкнутой поверхности полностью характеризует топологический класс, к которому она принадлежит. (Здесь предполагается, что мы рассматриваем только обыкновенные «двусторонние» поверхности. В пункте 3 этого параграфа мы рассмотрим также и «односторонние» поверхности.) Например, только что рассмотренная поверхность с двумя дырами и сфера с двумя «рукоятками», изображенная на рис. 137, являются обе замкнутыми поверхностями рода 2, и мы видим, что каждую из этих поверхностей удается деформировать в другую. Так как поверхность с p дырами или ее эквивалент — сфера с p рукоятками — поверхности рода p, то любую из этих поверхностей можно взять в качестве «топологического представителя» всех замкнутых поверхностей рода p.

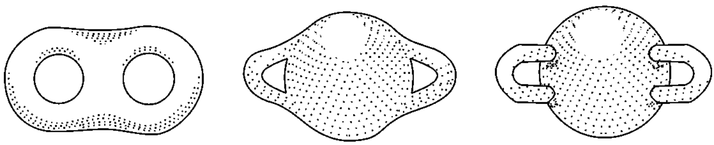

Рис. 137. Поверхность рода 2

***2. Эйлерова характеристика поверхности.** Предположим, что замкнутая поверхность S рода p подразделена на некоторое число областей: такое подразделение получается, если мы отметим на S ряд «вершин» и соединим их затем между собой дугами кривых. Мы покажем, что в таком случае

$$V - E + F = 2 - 2p, \tag{1}$$

где V — число вершин, E — число дуг и F — число областей. Число $2 - 2p$ называется *эйлеровой характеристикой* поверхности. Как мы уже видели, для случая сферы $V - E + F = 2$, что согласуется с формулой (1), так как сфера имеет род p, равный нулю.

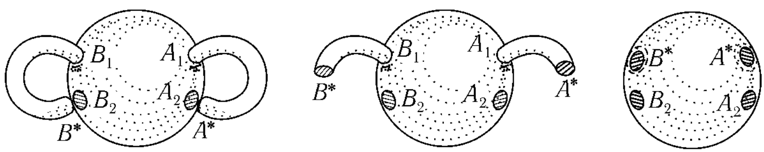

Рис. 138. К эйлеровой характеристике поверхностей

Желая доказать общую формулу (1), вообразим, что S есть сфера с p рукоятками. Как мы отметили, любая поверхность рода p может быть непрерывной деформацией приведена к этому виду, и во время деформации ни $V - E + F$, ни $2 - 2p$ не изменяются. Непрерывную деформацию мы выберем таким образом, чтобы замкнутые кривые A_1, $A_2, B_1, B_2, \ldots$, по которым рукоятки соединяются со сферой, пришлись как раз на дуги данного подразделения. (Рис. 138 иллюстрирует описываемую дальше процедуру в случае $p = 2$.)

Прорежем теперь поверхность S по кривым A_2, B_2, $\ldots$ и выпрямим рукоятки. У каждой рукоятки появится свободный край, ограниченный новой кривой A^*, B^*, $\ldots$, причем на появившемся крае будет столько же вершин и столько же дуг, сколько их было соответственно на $A_2, B_2, \ldots$.

Число $V - E + F$ при прорезывании не изменится, так как новых областей не возникнет, а число вновь возникших вершин уравновешивается числом вновь возникших дуг. Затем деформируем поверхность дальше, сплющивая торчащие рукоятки (включая их в поверхность сферы). В итоге получается сфера с $2p$ отверстиями. Так как $V - E + F$, как нам известно, равно 2 для всякого подразделения полной сферы, то для нашей сферы с $2p$ отверстиями мы получаем $V - E + F = 2 - 2p$, и это равенство, очевидно, справедливо также и для первоначальной сферы с p рукоятками. Наше утверждение доказано.

Рис. 121 иллюстрирует применение формулы (1) к поверхности S, составленной из плоских многоугольников. Эту поверхность можно топологически деформировать в поверхность тора, так что ее род p равен 1, и потому $2 - 2p = 2 - 2 = 0$. Как и требуется по формуле (1), мы получаем

$$V - E + F = 16 - 32 + 16 = 0.$$

Упражнение. Произвести какое-нибудь подразделение на поверхности с двумя дырами, изображенной на рис. 137, и проверить, что $V - E + F = -2$.

3. Односторонние поверхности. У каждой из обыкновенных поверхностей имеется по две стороны. Это относится и к замкнутым поверхностям вроде сферы или тора, и к поверхностям, имеющим границы, каковы, например, диск или тор, из которого удален кусок поверхности. Чтобы легко различать две стороны одной и той же поверхности, их можно было бы раскрасить разными красками. Если поверхность — замкнутая, две краски нигде не встретятся. Если поверхность имеет граничные кривые, то разные краски встречаются по этим кривым. Предположим, что по таким поверхностям ползал бы клоп и что-нибудь мешало бы ему пересекать граничные кривые; тогда он оставался бы всегда на одной стороне поверхности.

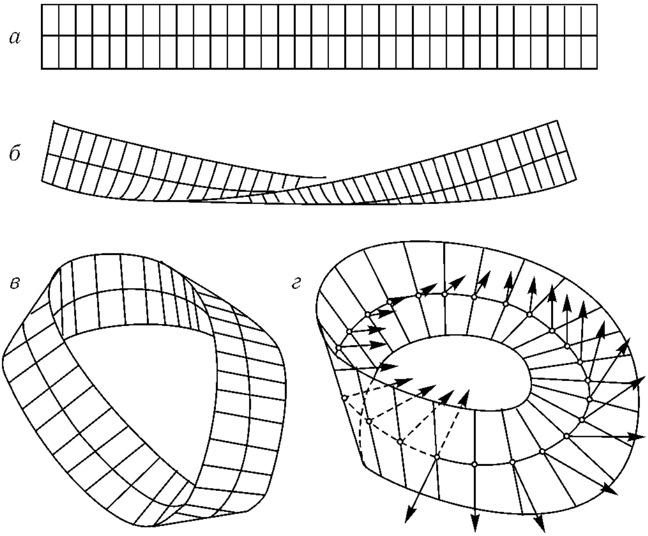

Рис. 139. Лист Мёбиуса: а, б, в — перекручивание и склеивание ленты; г — ориентация «сторон»

Мебиусу принадлежит честь ошеломляющего открытия: существуют поверхности, у которых имеется только одна сторона. Простейшая из таких поверхностей есть так называемая лента (или лист) Мебиуса. Чтобы ее построить, нужно взять лист бумаги, имеющий форму очень вытянутого прямоугольника, и склеить его концы после полуповорота, как показано на рис. 139. Клоп, который будет ползти по этой поверхности, держась все время середины «ленты», вернувшись в исходную точку, окажется в перевернутом положении (рис. 139, г). Если кто-нибудь вздумает раскрасить «только одну» сторону поверхности мебиусовой ленты, пусть лучше сразу погрузит ее всю в ведро с краской.

Другое замечательное свойство поверхности Мебиуса заключается в том, что у нее только один край: вся граница состоит из одной замкнутой кривой. Обыкновенная двусторонняя поверхность, получающаяся при склеивании концов ленты без всякого поворота, явственно имеет две различные граничные кривые. Если эту последнюю поверхность разрезать по центральной линии, она распадется на две поверхности того же типа. Но если разрезать таким же образом по центральной линии ленту Мебиуса (см. рис. 139), то мы увидим, что распадения на две части не будет. Тому, кто не упражнялся с лентой Мебиуса,

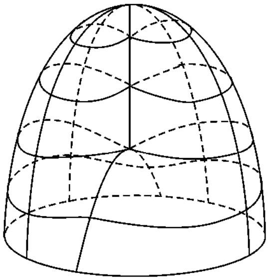

Рис. 140. Кросс-кэп

трудно предсказать это обстоятельство, столь противоречащее нашим интуитивным представлениям о том, что «должно» случиться. Но если поверхность, полученную после описанного выше разрезания ленты Мебиуса, снова разрезать по ее центральной линии, то у нас в руках окажутся две не связанные, но переплетенные между собой ленты!

Очень интересно разрезать по линиям, параллельным границе и отстоящим от нее на $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и т. д. ширины ленты. Поверхность Мебиуса, без сомнения, заслуживает упоминания и в школьном курсе.

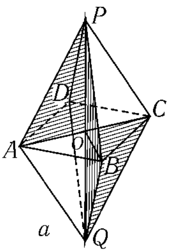

Рис. 141а

Граница поверхности Мебиуса представляет собой простую «незаузленную» замкнутую кривую и ее можно деформировать в окружность. Но придется допустить, что в процессе деформации поверхность будет сама себя пересекать. Получающаяся при этом самопересекающаяся односторонняя поверхность известна под названием «кросс-кэп» (рис. 140)[1]. Линию пересечения здесь следует считать дважды, один раз относя к одному из пересекающихся листов поверхности, другой раз — к другому. Кросс-кэп, как и всякую одностороннюю поверхность, нельзя непрерывно деформировать в двустороннюю (топологическое свойство).

Любопытно, что ленту Мебиуса можно, оказывается, так деформировать, что ее граница будет плоской ломаной, — а именно, треугольником, — причем лента останется несамопересекающейся. Такая модель, найденная д-ром Б. Туккерманом, показана на рис. 141, а; границей ленты служит треугольник ABC, ограничивающий половину диагонального квадратного сечения октаэдра (симметричного относительно этого сечения). Сама лента состоит при этом из шести граней октаэдра и четырех прямоугольных треугольников — четвертей вертикальных диагональных плоскостей октаэдра[2].

[1] Cross-cap — «перекрещивающаяся шляпа» (англ.).

[2] Из поверхности октаэдра вырезаются грани ABP и BCQ. К оставшимся шести граням приклеиваются четыре треугольника OAP, OBP, OCQ и OBQ. На рис. 141, б приведена развертка описанной поверхности. По линии, соединяющей точку O с точкой, помеченной двумя буквами A и C, надо сделать разрез, а потом склеить соответствующие отрезки края развертки. Жирными отрезками обозначен край ленты (периметр треугольннка ABC).

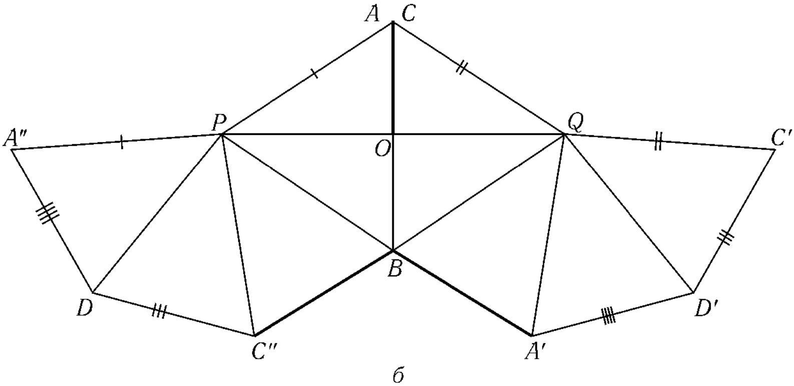

Рис. 141б. Лента Мёбиуса с прямолинейным краем (а) и ее развертка (б)

Другой любопытный пример односторонней поверхности — так называемая «бутылка Клейна». Это — замкнутая поверхность, но она, в противоположность известным нам замкнутым поверхностям, не делит пространства на «внутреннюю» и «внешнюю» части. Топологически она эквивалентна паре кросс-кэпов со склеенными между собой граничными кривыми.

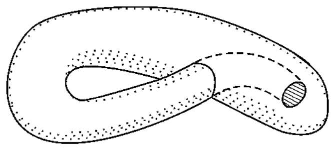

Рис. 142. Бутылка Клейна

Можно доказать, что всякая замкнутая *односторонняя* поверхность рода $p = 1, 2, \ldots$ топологически эквивалентна сфере, из которой вынуты p дисков и заменены кросс-кэпами. Отсюда легко выводится, что эйлерова характеристика $V - E + F$ такой поверхности связана с родом p соотношением

$$V - E + F = 2 - p.$$

Доказательство этого предложения такое же, как и для двусторонних поверхностей. Прежде всего убедимся, что эйлерова характеристика кросс-кэпа или ленты Мебиуса равна 0. Для этого заметим, что, перерезая поперек ленту Мебиуса, предварительно подразделенную на области, мы получим прямоугольник, у которого будут все лишнее вершины и одна лишняя дуга, число же областей останется то же самое, что и для ленты Мебиуса. Мы видели на стр. 283, что для прямоугольника $V - E + F = 1$. Следовательно, для ленты Мебиуса $V - E + F = 0$. Предлагаем читателю в качестве упражнения восстановить это доказательство во всех подробностях.

Изучение топологической структуры поверхностей, подобных тем, которые только что были описаны, проводится более удобно, если вос-

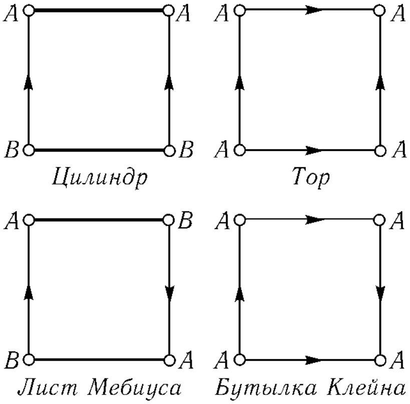

Рис. 143. Замкнутые поверхности, определенные посредством идентификации сторон квадрата

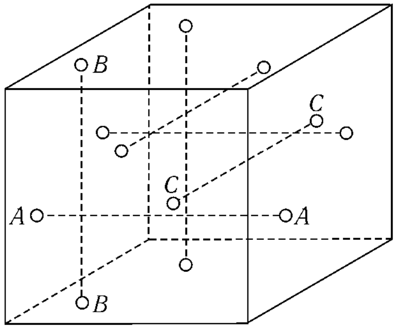

Рис. 144. Определение трехмерного тора посредством идентификации граней куба

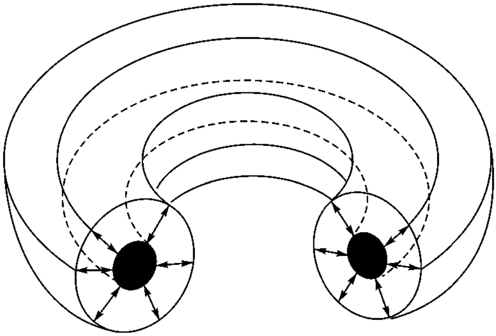

Рис. 145. Другое представление трехмерного тора (разрезы показывают идентификацию)

пользоваться плоскими многоугольниками с попарно идентифицированными сторонами (см гл. IV, приложение, пункт 3). Так, на схемах рис. 143 стрелки показывают, какие из параллельных сторон и в каком направлении должны быть идентифицированы: если возможно, то физически, если невозможно, то хотя бы мысленно, абстрактно.

Метод идентификации можно применить и для определения трехмерных замкнутых многообразий, аналогичных двумерным замкнутым поверхностям. Например, отождествляя соответствующие точки взаимно противоположных граней куба (рис. 144), мы получаем замкнутое трехмерное многообразие, называемое трехмерным тором. Такое многообразие топологически эквивалентно пространственной области, заключенной между двумя концентрическими поверхностями тора (одна внутри другой), с идентификацией соответствующих точек (рис. 145). Действительно, это последнее многообразие получается из куба, если привести в «физическое» совпадение две пары «мысленно отождествленных» взаимно противоположных граней.

Приложение

***1. Проблема пяти красок.** Доказательство того, что всякая карта на сфере может быть правильно раскрашена с помощью не более чем пяти различных красок, основывается на формуле Эйлера. (В соответствии с тем, что было сказано на стр. 289, карта считается раскрашенной правильно, если никакие две области, соприкасающиеся по целой дуге, не окрашены одинаково.) Мы ограничимся рассмотрением таких карт, на которых все области являются простыми замкнутыми многоугольниками, ограниченными круговыми дугами. Не уменьшая общности, можно допустить, что в каждой вершине сходится ровно по три дуги; карту, удовлетворяющую такому условию, будем называть регулярной. Заменим каждую вершину, в которой встречается более трех дуг, маленьким кружком и присоединим внутренность этого кружка к одной из прилегающих областей: тогда получится новая карта, в которой «кратные» вершины заменены обыкновенными. Новая карта будет содержать столько же областей, сколько и старая, и она будет регулярной. Если ее удастся правильно раскрасить, то, сжимая потом кружок и сводя его в точку, мы получим требуемую раскраску первоначальной карты. Таким образом, достаточно убедиться, что каждую регулярную карту на сфере можно правильно раскрасить пятью красками.

Прежде всего докажем, что всякая регулярная карта содержит по крайней мере один многоугольник с числом сторон, меньшим шести. Обозначим через F_n число n-угольных областей нашей регулярной карты; тогда, обозначая через F число всех областей, получим равенство

$$F = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \dots \tag{1}$$

У каждой дуги — два конца; в каждой вершине сходится три дуги. Поэтому, если E обозначает число дуг, а V — число вершин на нашей карте, то

$$2E = 3V. \tag{2}$$

Далее, так как область, ограниченная n дугами, имеет n вершин и каждая вершина принадлежит трем областям, то

$$2E = 3V = 2F_2 + 3F_3 + 4F_4 + \ldots \tag{3}$$

По формуле Эйлера, мы имеем

$$V - E + F = 2, \quad \text{или} \quad 6V - 6E + 6F = 12.$$

Из соотношения (2) следует, что $6V = 4E$, так что $6F - 2E = 12$. Тогда соотношения (1) и (3) нам дают

$$6(F_2 + F_3 + F_4 + \ldots) - (2F_2 + 3F_3 + 4F_4 + \ldots) = 12,$$

или

$$(6-2)F_2 + (6-3)F_3 + (6-4)F_4 + (6-5)F_5 + (6-6)F_6 + (6-7)F_7 + \ldots = 12.$$

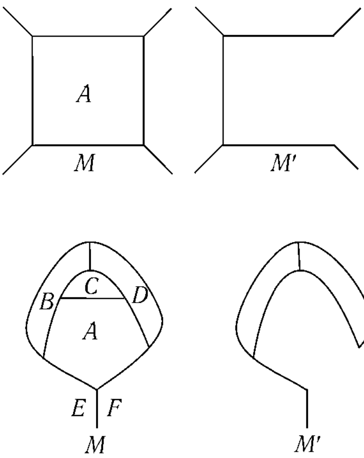

Рис. 146–147. К доказательству теоремы о пяти красках

Так как хотя бы один из членов суммы слева должен быть положительным, то отсюда ясно, что четыре числа F_2, F_3, F_4 и F_5 не могут одновременно равняться нулю. Но это и есть то, что нам нужно было доказать.

Перейдем теперь к теореме о пяти красках. Пусть M — какая угодно регулярная карта на сфере, n — число всех ее областей. Мы знаем, что имеется хоть одна область с числом сторон, меньшим шести.

Случай 1. M содержит область A с 2, 3 или 4 сторонами (рис. 146). В этом случае удалим дугу, отделяющую A от одной из прилежащих областей. (Здесь необходимо следующее примечание. Если у области A — четыре стороны, то может случиться, что одна из прилежащих областей, если ее обойти вокруг, окажется также прилежащей к A с противоположной стороны. В этом случае, на основании теоремы Жордана, две области, прилегающие к A с двух остальных сторон, будут различными, и мы сможем удалить одну из этих двух сторон.) Вновь полученная карта M' будет также регулярной, но содержащей уже только $n-1$ областей. *Если карту M' можно правильно раскрасить пятью красками,* *то можно раскрасить и карту M.* В самом деле, к области A прилегает самое большее четыре области карты M, и потому для A всегда найдется пятая краска.

Случай 2. M содержит область A с пятью сторонами. Рассматривая пять областей, прилегающих к A, обозначим их через B, C, D и F. Можно всегда среди этих пяти областей найти две, которые не прилегают друг к другу: действительно, если, например, B и D прилегают одна к другой, то отсюда вытекает, что C не прилегает ни к E, ни к F, так как в противном случае всякий путь, идущий из C в E или F, должен был бы пройти по крайней мере через одну из областей A, B или D (рис. 147). (Ясно, что это утверждение существенно зависит от теоремы Жордана, справедливой для плоскости и для сферы. Для тора, напротив, все это рассуждение отпадает.) Итак, можно допустить, что, например, C и F не прилегают друг к другу. Удалим те две стороны A, которые отделяют A от C и F, и тогда получим новую карту M' с $n-2$ областями, также регулярную. *Если новую карту M' можно правильно раскрасить пятью красками, то можно раскрасить и первоначальную карту M.* В самом деле, после восстановления удаленных сторон область A будет прилегать к пяти областям, окрашенным не более чем четырьмя красками (так как C и F окрашены одинаково), и потому для A всегда найдется пятая краска.

Таким образом, во всех случаях всякий регулярной карте M с n областями можно сопоставить такую, также регулярную, карту, M', с $n-1$ или $n-2$ областями, что если M' можно раскрасить пятью красками, то M — также. Это рассуждение можно повторить для карты M'' и т. д. В результате мы получим последовательность карт, в которой первым членом будет M;

$$M, M', M'', \dots,$$

обладающую тем свойством, что каждая карта этой последовательности может быть раскрашена пятью красками, если может быть раскрашена следующая за ней. Но так как число областей в картах этой последовательности неизменно убывает, то рано или поздно в ней найдется карта с пятью областями (или меньшим числом). Такую карту всегда можно раскрасить не более чем пятью красками. Возвращаясь по последовательности карт, шаг за шагом, обратно, заключим отсюда, что и сама карта М может быть раскрашена пятью красками. Этим доказательство и заканчивается.

Остается заметить, что это доказательство имеет «конструктивный» характер: оно дает практически осуществимый, хотя может быть и утомительный, метод нахождения требуемой раскраски данной карты M, составленной из n областей посредством конечного числа шагов.

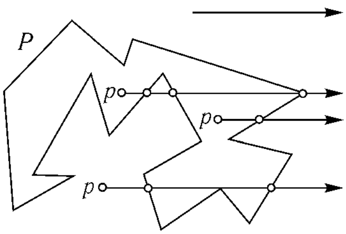

Рис. 148. Счет пересечений

2. Теорема Жордана для случая многоугольников. Теорема Жордана утверждает, что всякая простая замкнутая кривая C разделяет точки плоскости, не принадлежащие C, на такие две области (не имеющие общих точек), по отношению к которым сама кривая C является общей границей. Мы докажем здесь эту теорему для частного случая, когда C есть замкнутый многоугольник P.

Мы покажем, что точки плоскости (кроме точек, находящихся на самом многоугольном контуре P) разбиваются на два класса A и B, обладающие следующими свойствами: 1) две точки одного и того же класса могут быть соединены ломаной линией, не имеющей общих точек с P; 2) если две точки принадлежат разным классам, то любая ломаная линия, их соединяющая, имеет общие точки с P. Один из названных классов образует «внутренность» многоугольника, другой состоит из точек, находящихся «вне» многоугольника.

Приступая к доказательству, выберем какое-то фиксированное направление в нашей плоскости, непараллельное ни одной из сторон P. Так как P имеет конечное число сторон, то это всегда возможно. Затем определим классы A и B следующим образом.

Точка p принадлежит классу A, если луч, проведенный через нее в фиксированном направлении, пересекает P в *четном* числе точек $(0, 2, 4, 6$ и т. д.). Точка p принадлежит классу B, если луч, проведенный из p в фиксированном направлении, пересекает P в *нечетном* числе точек $(1, 3, 5$ и т. д.).

К этому нужно добавить, что если рассматриваемый луч проходит через какую-нибудь вершину P, то эта вершина идет в счет как точка пересечения луча с P или не идет, смотря по тому, расположены ли прилежащие стороны многоугольника P по разные стороны луча или по одну и ту же его сторону.

Условимся говорить, что две точки p и q имеют одну и ту же «четность», если они принадлежат одному и тому же из двух классов A и B.

Заметим прежде всего, что все точки любого отрезка прямой, не пересекающегося с P, имеют одну и ту же четность. Действительно,

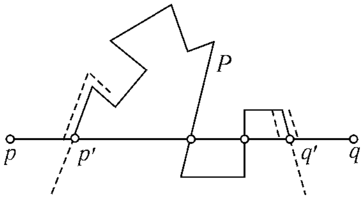

Рис. 149. К доказательству теоремы Жордана

четность точки p, движущейся по такому отрезку, может измениться не иначе, как при пересечении соответствующего луча с одной из вершин P; но, принимая во внимание наше соглашение о счете точек пересечения, легко убедиться, что в каждом из двух возможных случаев четность все же не меняется. Из сказанного следует, что *если некоторая точка p_1 области A соединена ломаной линией с некоторой точкой p_2 области B, то эта линия непременно пересекает P.* Иначе четность всех точек ломаной линии, в частности, точек p_1 и p_2, была бы одинаковой. Дальше, покажем, что *две точки одного и того же из двух классов A и B могут быть соединены ломаной линией, не пересекающейся с P.* Обозначим две данные точки через p и q. Если прямолинейный отрезок pq, соединяющий p и q, не пересекается с P, то доказывать больше нечего. В противном случае пусть p' — первая, а q' — последняя точка пересечения отрезка pq с многоугольником P (рис. 149). Построим ломаную линию, начинающуюся от точки p прямолинейным отрезком, расположенным по направлению pq, но заканчивающуюся непосредственно перед точкой p': отсюда ломаная пойдет вдоль P (безразлично, в каком из двух возможных направлений) и будет так идти, пока не придет снова на прямую pq — около точки q'. Весь вопрос в том, произойдет ли пересечение с прямой pq на отрезке $p'q'$ или на отрезке $q'q$: мы сейчас убедимся, что справедливо именно последнее, и тогда будем иметь возможность закончить ломаную, соединяя последнюю из полученных точек с точкой q прямолинейным отрезком, снова лежащим на отрезке pq. Если две точки r и s расположены очень близко одна от другой, но по разные стороны одной из сторон многоугольника P, то они имеют различную четность, так как выходящие из них (в фиксированном направлении) лучи будут таковы, что на одном из них будет на одну точку больше точек пересечения с P, чем на другом. Отсюда ясно, что четность меняется, когда, двигаясь по pq, мы проходим через точку q'. Значит, ломаный «путь», намеченный на чертеже пунктиром, вернется на pq между q' и q, так как p и q (следовательно, все точки на рассматриваемом «пути») имеют одну и ту же четность.

Таким образом, теорема Жордана для случая многоугольника доказана. «Внешними» по отношению к многоугольнику P будут те точки, которые принадлежат классу A: действительно, двигаясь по какому-нибудь лучу в фиксированном направлении достаточно далеко, мы, несомненно, придем к точке, за которой пересечений с P уже не будет, и все такие точки будут принадлежать классу A, так что их четность будет 0. Тогда уже придется заключить, что точками «внутренними» будут точки класса B. Каким бы запутанным ни был замкнутый многоугольник P, всегда очень легко узнать, расположена ли данная точка p внутри или вне его: достаточно из p провести луч и посчитать число его точек пересечения с P. Если это число нечетное, значит, p «сидит» внутри и не сможет выбраться наружу, не пересекая P. Но если это число четное, то точка p — вне многоугольника P (попробуйте проверить это на рис. 128).

Вот идея другого доказательства жордановой теоремы для случая многоугольников. Определим порядок точки p_0 относительно замкнутой кривой C (не проходящей через p_0) как число полных поворотов[1], совершаемых стрелкой (вектором), проведенным от p к p_0, когда точка p делает один обход по кривой C.

Затем пусть A есть совокупность точек p_0 (не на P) *четного* порядка относительно P, а B есть совокупность точек p_0 (не на P) *нечетного* порядка относительно P. В таком случае A и B, определенные указанным способом, представляют собой соответственно области «внешнюю» и «внутреннюю» относительно P. Читатель может в качестве упражнения воспроизвести все детали доказательства.

***3. Основная теорема алгебры.** Основная теорема алгебры утверждает, что если функция $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_1 z + a_0, \tag{1}$$

где $n \geqslant 1$ и $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ — какие угодно комплексные числа, то существует такое комплексное число α, что $f(\alpha) = 0$. Другими словами, ***в поле комплексных чисел всякое алгебраическое уравнение имеет корень.*** (Основываясь на этой теореме, мы на стр. 138 сделали дальнейшее заключение: полином $f(z)$ может быть разложен на n линейных множителей

$$f(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_n),$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — нули $f(z)$.) Замечательно, что эту теорему можно доказать, исходя из соображений топологического характера, как и теорему Брауэра о неподвижной точке.

---

[1]Это число нужно, конечно, брать в алгебраическом смысле, т. е. с учетом направления вращения.

Пусть читатель вспомнит, что комплексное число есть символ вида $x+yi$, где x и y — действительные числа, а символ i обладает свойством $i^2 = -1$. Комплексное число $x + yi$ изображается точкой (x, y) в плоскости прямоугольных координат. Если мы введем в этой же плоскости полярные координаты, принимая начало координат за полюс, а положительное направление оси x за полярную ось, то можно будет написать

$$z = x + yi = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Из формулы Муавра следует, что $z^n = r^n(\cos\theta + {} + i\sin\theta)$ (см. стр. 133). Отсюда ясно, что если комплексное число z описывает круг радиуса r с центром в начале координат, то z^n опишет ровно n раз круг с радиусом r^n. Напомним еще, что модуль z (обозначаемый через $|z|$) представляет собой расстояние z от 0 и что, если $z' = x' + iy'$, то $|z - z'|$ есть расстояние между z и z'. После этих напоминаний можно перейти к доказательству теоремы.

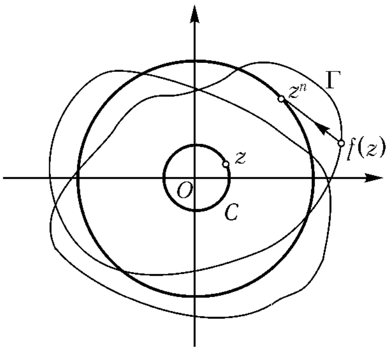

Рис. 150. Доказательство основной теоремы алгебры

Допустим, что полином (1) *не* имеет корней, так что при любом комплексном z

$$f(z) \neq 0.$$

При этом допущении, если z описывает некоторую замкнутую кривую в x, y плоскости, то $f(z)$ опишет некоторую замкнутую кривую Γ, не проходящую через начало координат (рис. 150). Можно определить *порядок* точки O для функции $f(z)$ относительно замкнутой кривой C как *число полных поворотов, совершаемых вектором, идущим от O к точке $f(z)$ на кривой Γ, когда z делает полный обход по кривой C*. Возьмем в качестве кривой C окружность с центром O и радиусом t и обозначим через $\varphi(t)$ порядок точки O для функции $f(z)$ относительно окружности с центром O и радиусом t. Очевидно, $\varphi(0) = 0$, так как круг радиуса 0 сводится к одной точке и кривая Γ также сводится к одной точке $f(0) \neq 0$. Если мы докажем, что при достаточно больших значениях t функция $\varphi(t)$ равна n, то в этом уже будет заключаться противоречие, так как, с одной стороны, порядок $\varphi(t)$ должен быть непрерывной функцией t (поскольку $f(z)$ есть непрерывная функция z), а с другой стороны, функция $\varphi(t)$ может принимать только целые значения и потому никак не может перейти от значения 0 к значению n непрерывно.

Нам остается доказать, что при достаточно больших значениях t

$$\varphi(t) = n.$$

Для этого заметим, что если радиус круга t удовлетворяет неравенствам

$$t > 1 \quad \text{и} \quad t > |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|,$$

то

$$\begin{aligned}|f(z) - z^n| &= |a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_0| \leqslant \\ &\leqslant |a_{n-1}| \cdot |z|^{n-1} + |a_{n-2}| \cdot |z|^{n-2} + \ldots + |a_0| = \\ &= t^{n-1}\left[|a_{n-1}| + \frac{|a_{n-2}|}{t} + \ldots + \frac{|a_0|}{t^{n-1}}\right] \leqslant \\ &\leqslant t^{n-1}\left[|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \ldots + |a_0|\right] < t^n = |z^n|.\end{aligned}$$

Так как выражение слева есть не что иное, как расстояние между точками z^n и $f(z)$, а выражение в самой правой части неравенства — расстояние точки z^n от начала координат, то мы видим отсюда, что отрезок, соединяющий точки z^n и $f(z)$, не пройдет через начало координат, если только z будет находиться на круге радиуса t с центром в начале. В таком случае имеется возможность *деформировать* кривую, описываемую точкой $f(t)$ в кривую, описываемую точкой z^n, без прохода через начало, смещая непрерывным движением каждую точку $f(z)$ к соответствующей точке z^n по прямоугольному отрезку. При этом порядок начала может принимать только целые значения и, вместе с тем, во время деформации может меняться не иначе, как непрерывно; значит, для обеих функций $f(z)$ и z^n он одинаков, и так как для z^n он равен n, то имеет то же самое значение и для $f(z)$. Доказательство закончено.