Введение

Общую топологию можно охарактеризовать как *абстрактное* изучение понятий близости и непрерывности. Вспомним сначала как эти понятия вводятся в евклидовом пространстве E^n. Пусть p - точка в E^n, тогда окрестность точки p должна состоять из точек близких к точке p и целиком окружать её. Ясно, что такую окрестность точки p можно представить как произвольное множество U, содержащее *открытый* шар с центром в точке p.

Пример 1.1. В евклидовом пространстве E^3 *открытый шар* радиуса r для точки $p(0,0,0)$ можно задать уравнением $x^2 + y^2 + z^2 < r^2$. Как мы видим, открытый шар состоит из точек, расстояние которых до центра *строго меньше* r.

Открытый шар не следует путать с *замкнутым шаром* $x^2 + y^2 + z^2 \le r^2$ и *сферой* $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

На плоскости E^2 открытому (замкнутому) шару и сфере будут соответствовать открытый (замкнутый) *круг* и *окружность*.

На прямой E^1 это будут соответственно открытый (a,b), замкнутый $[a,b]$ *отрезки* и *пара точек* $\{a,b\}$.

На рис. 1.1а множество U является окрестностью точки p на плоскости, так как оно содержит открытый круг с центром в этой точке, а для множества U на рис. 1.1б любой круг с центром в точке p будет содержать точки лежащие вне U и U в этом случае окрестностью точки p не является.

Проанализируем подробнее свойства окрестности точки p в E^n.

1. Если в качестве окрестности точки p взять открытый шар $D_r(p)$ радиуса r с центром в точке p, то задавая произ-

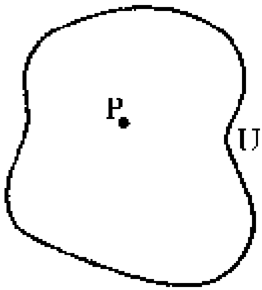

Рис. 1.1а

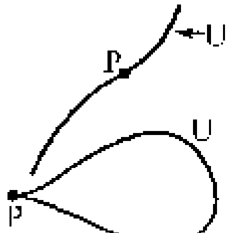

Рис. 1.1б

вольные значения $r > 0$ мы будем получать различные окрестности точки p, а при $r \to +\infty$ мы можем сказать, что само евклидово пространство E^n открыто.

2. Если U - окрестность точки p, и $V \supset U$, то V - тоже окрестность точки p, так как открытый шар лежащий в U лежит и в V.

3. Если U и V - окрестности точки p, то их пересечение $U \cap V$ - тоже окрестность точки p (см. п. 1.3.4).

4. Если U - окрестность точки p, то можно найти такую окрестность V точки p, что $V \subset U$ и V является окрестностью для каждой из своих точек.

Мы рассмотрели понятие окрестности в евклидовом пространстве, в котором тем или иным способом введена метрика. Нетрудно проверить перечисленные выше свойства окрестностей и применительно к понятию окрестности и непрерывности в математическом анализе.

В самом начале мы определили топологию как *абстрактное* изучение понятий близости и непрерывности и поэтому при абстрактном подходе мы можем принять свойства 1-4 за аксиомы, которые мы положим в основу определения топологического пространства.