1. Топологические пространства

1.1. Топологическое пространство

Пусть X - произвольное множество и $\tau = \{U_i;\ i \in I\}$- некоторое семейство его подмножеств.

Определение 1.1. Будем говорить, что *семейство* τ *задаёт* (*определяет*) *в множестве* X *топологическую* ***структуру*** (***топологию***), *если это семейство удовлетворяет следующим* (*свойствам*) *аксиомам*:

АТ1. *Всё множество* X *и пустое множество* $\varnothing$ *принадлежат семейству* τ.

АТ2. *Объединение любой совокупности множеств из* τ *принадлежат* τ.

АТ3. *Пересечение любого конечного числа множеств из* τ *принадлежат* τ.

Часто *топологическую структуру* τ *называют* ***топологией*** *в* X.

Определение 1.2. *Множество* X*, рассматриваемое вместе с заданной в* X *топологией* τ*, называется* ***топологическим пространством****; при этом элементы множества* X *называются* ***точками*** *а подмножества* U_i*, принадлежащие семейству* τ*, -* ***открытыми множествами*** *этого топологического пространства.*

Иногда само множество X называют носителем топологии τ.

Таким образом, *топологическое пространство есть пара: - множество* X *и введённая в нём топология* τ. Поэтому топологическое пространство будем обозначать как (X,τ). Там, где это не вызовет недоразумений, вместо (X,τ) будем писать просто X.

1.2. Примеры топологических пространств

1.2.1. Тривиальная топология

Пусть X - произвольное множество, а $\tau_0 = \{\varnothing, X\}$. Ясно, что аксиомы АТ1-АТ3 выполнены и τ_0 задаёт в X простейшую топологию, которая называется *тривиальной*.

1.2.2. Дискретная топология

Пусть снова X - произвольное множество и каждый элемент множества X является открытым множеством в топологии τ_d. Все аксиомы топологического пространства будут выполнены и такая топология $\tau_d = \{H, H \subset X\}$, состоящая из всех подмножеств H множества X, называется *дискретной* топологией.

1.2.3. Связное двоеточие

Пусть $X = \{a, b\}$, а $\tau = \{\varnothing, X, a\}$. Так как аксиомы топологического пространства выполнены, мы имеем точечное топологическое пространство (X, τ) весьма простого строения, имеющее определённый интерес и носящее специальное название - *связное двоеточие*.

1.2.4. Метрические пространства

Если в арифметическом пространстве R^n введена обычная метрика, то в качестве открытых множеств (см. пример 1.1) можно взять шары $D_r(x)$ с центром в точке x и радиусом $r > 0$, т.е. множество точек, удалённых от точки x на расстояние *строго меньше* чем r. Тогда множество U открыто в R^n, если для каждой точки $x \in U$ существует такое $r > 0$, что шар $D_r(x) \subset U$. Топология, состоящая из таких открытых множеств называется *естественной* (*метрической*) топологией. Такое топологическое пространство обозначим как E^n и покажем, что выполнена, например, аксиома АТ3. Пусть U_1 и U_2 - открыты в E^n и $U = U_1 \cap U_2$. Если $x \in U$, то $x \in U_1$ и $x \in U_2$. Поэтому существуют такие числа $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$, что $D_{r_1}(x) \subset U_1$ и $D_{r_2}(x) \subset U_2$. Если $r = \min(r_1, r_2)$, то $D_r(x) \subset U$, т.е. множество U открыто в E^n.

Любое евклидово пространство E^n *является топологическим пространством.*

Пример 1.2. **Рациональная прямая**. Пусть $X = \mathbf{Q}$ множество всех рациональных чисел. Примем за открытые множества всевозможные *объединения ограниченных открытых интервалов*. Аксиома АТ2 очевидна. Для проверки аксиомы АТ3 заметим, что если пересечение двух открытых интервалов (a,b) и (c,d) не пусто, то оно является открытым интервалом (l,m), где $l = \sup(a,c)$, а $m = \inf(b,d)$. Та же топология получится, если для каждого $x \in \mathbf{Q}$ определить множество $\mathbf{Q}(x)$ всех окрестностей этой точки как *множество всех подмножеств в* $\mathbf{Q}$, *содержащих каждое некоторый открытый интервал, которому принадлежит* x. Топологическое пространство, полученное путём наделения $\mathbf{Q}$ описанной топологией называется *рациональной прямой*. Заметим, что в этом пространстве всякий открытый интервал есть открытое множество.

*Упражнение 1.1***.** Описать естественную топологию для $X = R^1$ (числовая прямая) и $X = R^2$ (плоскость).

Упражнение 1.2. **Концентрическая топология**. Пусть $X = R^n$. Открытыми в X множествами будем рассматривать шары $D_{r_i}(O)$ с центром в точке $O(0,...,0)$ и $r_i > 0$, всё множество X и $\varnothing$. Показать, что этим определена так называемая *концентрическая топология*.

1.2.5. Топология, индуцируемая метрикой

В каждом метрическом пространстве (X,ρ) топология естественным образом ***индуцируется*** метрикой ρ этого пространства. Пусть $D_r(x)$ - (шар с центром в точке x и радиусом $r>0$ в метрическом пространстве (X,ρ)) есть множество точек $y\in X$, таких, что $\rho(x,y)<r$.

Открытым в (X,ρ) *множеством* назовём такое множество U для любой точки которого существует некоторый шар положительного радиуса $\varepsilon>0$ с центром в этой точке $x\in U$. Эти множества U порождают в (X,ρ) топологию (см. п. 1.2.4). Такая топология называется топологией, индуцированной в (X,ρ) метрикой ρ.

1.3. Сравнение топологий

Пусть X - множество, содержащее более одного элемента, а τ_1 и τ_2 заданные в X - *две* ***разные*** *топологии*.

Определение 1.3. *Говорят, что топология* τ_1 ***мажорируется*** *топологией* τ_2 *на* X *если* $\tau_1\subseteq\tau_2$.

Другими словами, топология τ_2 ***мажорирует*** топологию τ_1, если всякое подмножество, открытое в топологии τ_1, является открытым и в топологии τ_2, при этом пишут $\tau_1\le\tau_2$.

Если $\tau_1\le\tau_2$, но $\tau_1\ne\tau_2$, то говорят, что топология τ_1 ***слабее*** (***грубее***) топологии τ_2 или что топология τ_2 ***сильнее*** (***тоньше***) топологии τ_1.

Ясно, что если $\tau_1\le\tau_2$ и $\tau_2\le\tau_1$, то $\tau_1=\tau_2$ (топологии совпадают на X).

Кроме того, если $\tau_1 \le \tau_2$ и $\tau_2 \le \tau_3$, то $\tau_1 \le \tau_3$ и мы видим, что различные топологии на одном и том же множестве X образуют частично упорядоченное множество.

Из приведённых выше примеров топологических пространств тривиальная топология τ_0 является наименьшим элементом, а дискретная топология τ_d - наибольшим элементом в частично упорядоченном множестве всевозможных топологий в фиксированном множестве X.

Таким образом любая топология мажорирует тривиальную топологию и мажорируется дискретной топологией.

1.4. Открытые и замкнутые множества. Окрестности

Определение 1.4. Пусть X - топологическое пространство, а U - его подмножество. *Множество U называется* ***открытым*** *в X, если U является окрестностью для любой точки $p \in U$.*

С понятием *открытого* множества в топологическом пространстве (X, τ) тесно связано двойственное понятие *замкнутого* множества и наряду с первым играет основополагающую роль в общей топологии.

Напомним, что если X - произвольное множество и H его подмножество, то множество $X \setminus H$ - *дополнение* H *до* X и обозначается как $C_X H$, т.е. $C_X H = X \setminus H$.

Из определения дополнения следуют очевидные равенства

$$H \cap C_X H = \varnothing, \quad H \cup C_X H = X, \qquad 1.1.$$

$$C_X(C_X H) = H, \qquad 1.2.$$

$$\bigcup_i C_X H_i = C_X\left(\bigcap_i H_i\right), \qquad 1.3.$$

$$\bigcap_i C_X H_i = C_X\left(\bigcup_i H_i\right). \qquad 1.4.$$

Определение 1.5. *Подмножество* F *топологического пространства* X *называется* ***замкнутым*** *в* X *, если его дополнение* $C_X F = X \setminus F$ *открыто в* X *.*

Пример 1.3. Отрезок $[a,b]$ в $X = R^1$ (см. упражнение 1.1) замкнут, так как его дополнение $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ открыто.

Пример 1.4. Множество Z всех рациональных целых чисел на рациональной прямой (пример 1.2) замкнуто, так как его дополнение $\bigcup_{n\in \mathbf{Z}} (n, n+1)$ открыто.

Упражнение 1.3. Пусть $X = R^2$ (см. *упражнение 1.1*), а U и V соответственно открытый и закрытый круги в X . Показать, что U - открытое, а V - замкнутое множества в X .

В силу двойственного характера операций в теории множеств семейство $\{F\}$ всех замкнутых множеств топологического пространства (X, τ) удовлетворяют следующим свойствам (аксиомам):

АТ1*. *Всё множество* X *и пустое множество* $\varnothing$ *замкнуты в* X (и, значит, ***открыто-замкнуты***). $X, \varnothing \in \{F\}$.

АТ2*. Пересечение любой совокупности множеств из $\{F\}$ принадлежит $\{F\}$.

АТ3*. Объединение конечного числа замкнутых множеств из $\{F\}$ принадлежит $\{F\}$.

Эти свойства полностью характеризуют замкнутые множества топологического пространства (X, τ), а следовательно, и топологию τ (так как множества из τ - это дополнения замкнутых множеств) и могут быть приняты в качестве аксиом АТ1*-АТ3* топологического пространства. Таким образом, топологию на X можно задать, указав семейство $\{F\}$ подмножеств X, удовлетворяющее свойствам (аксиомам) АТ1*-АТ3*. В этом случае топологией на X будет семейство $\{C_X F\}$.

Пусть (X,τ) - топологическое пространство и пусть $x\in X$ - произвольная точка топологического пространства.

Определение 1.5. ***Окрестностью точки*** $x\in X$ *называется всякое подмножество* $A\subset X$ *если оно содержит открытое в* X *подмножество, содержащее точку* x.

Непосредственно из определения следует, что любое надмножество окрестности само является окрестностью и что открытое множество служит окрестностью для каждой своей точки. В частности, *все пространство* X *и только оно служит окрестностью любой точки из* X, тогда как *пустое множество* $\varnothing$ *является единственным открытым множеством, которое не служит окрестностью.*

Свойства совокупности всех окрестностей данной точки $x\in X$:

1. *Объединение любой совокупности окрестностей точки* x *есть окрестность точки* x.

2. *Пересечение конечного числа окрестностей точки* x *- окрестность точки* x.

3. *Всякое множество, содержащее некоторую окрестность точки* x, *является окрестностью точки* x.

Теорема 1.1. *Подмножество* A $(A\neq\varnothing)$ *топологического пространства* (X,τ) *открыто тогда и только тогда, когда оно содержит некоторую окрестность каждой своей точки.*

<u>Доказательство</u>. **1**. Пусть A открыто и $x\in A$. Тогда A-окрестность точки x и, следовательно, A содержит окрестность любой своей точки. **2**. Пусть для каждого $x\in A$ существует окрестность точки x, целиком лежащая в A. По определению окрестности в ней содержится некоторое открытое множество

U_x, $x \in U_x$. Рассмотрим объединение $\bigcup_{x \in A} U_x$ всех таких множеств. Оно открыто и совпадает с A. Действительно, так как всякая точка множества A принадлежит $\bigcup_{x \in A} U_x$, то $A \subseteq \bigcup_{x \in A} U_x$. С другой стороны, для каждого x имеем $U_x \subset A$, т.е. $\bigcup_{x \in A} U_x \subset A$. Поэтому $A = \bigcup_{x \in A} U_x$, а значит, A открыто

Свойства открытых (АТ2, АТ3) и замкнутых (АТ2*, АТ3*) множеств относительно операций объединения и пересечения описываются теоремой 1.2.

Теорема 1.2.

1. *Объединение любой совокупности открытых множеств открыто.*

2. *Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.*

3. *Пересечение любой совокупности замкнутых множеств замкнуто.*

4. *Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.*

Доказательство. **1**. Пусть дана произвольная совокупность открытых множеств $\{U_i\}$ топологического пространства X. Положим $U = \bigcup_i U_i$ и пусть точка x лежит в U. Ясно, что для некоторого i точка x окажется в U_i и тогда U_i будет окрестностью этой точки. Но $U \supset U_i$, а значит U - окрестность точки x (третье свойство окрестности). Поэтому U является окрестностью каждой своей точки и, следовательно, открытым множеством (определение 1.4).

2. Пусть U_1 и U_2 - открытые в X множества, и пусть $x \in U_1 \bigcap U_2$. Так как U_1 и U_2 оба открыты и содержат точку

x, они являются (определение 1.5) её окрестностями. Тогда множество $U_1 \cap U_2$ является окрестностью каждой своей точки (второе свойство окрестности) и потому открыто в X в силу определения 1.5.

3. Пусть $\{F_i\}$ - система замкнутых в (X, τ) множеств F_i. Тогда система $\{U_i = C_X F_i\}$ состоит из открытых в (X, τ) множеств. Используя (1.2) и (1.4) имеем

$$F_i = C_X\left(C_X F_i\right),$$

$$F = \bigcap_i F_i = \bigcap_i C_X\left(C_X F_i\right) = \bigcap_i C_X U_i = C_X\left(\bigcup_i U_i\right).$$

Таким образом F есть дополнение к $\bigcup_i U_i$, которое открыто по аксиоме АТ2 и, следовательно, F - замкнутое множество.

4. Пусть F_1 и F_2 замкнутые множества, тогда

$$F_1 \cup F_2 = C_X U_1 \cup C_X U_2 = C_X\left(U_1 \cap U_2\right).$$

Мы видим, что объединение $F_1 \cup F_2$ замкнутых множеств F_1 и F_2 есть дополнение к пересечению $U_1 \cap U_2$ открытых множеств U_1 и U_2, которое открыто в силу аксиомы АТ3.