2. Операции над множествами в топологическом пространстве

2. 1. Изолированные и предельные точки, точка соприкосновения

Определение 2.1. *Точка x_0 подмножества A топологического пространства X называется* ***изолированной точкой*** *множества A, если существует окрестность U этой точки такая, что пересечение состоит из самой этой точки,* т.е. $U \cap A = \{x_0\}$.

Точка $x_0 \in A$ изолирована тогда и только тогда, когда $x_0 \in A \setminus A$.

Определение 2.2. *Множество A называется дискретным, если каждая его точка изолирована*.

Пример 2.1. **1**. Одноточечное подмножество $\{a\}$, открытое в рассматриваемой топологии является изолированной точкой.

2. В топологии числовой прямой R^1 каждая точка $m \in \mathbf{Z}$ является для множества $\mathbf{Z}$ целых чисел изолированной точкой.

3. Множества $\mathbf{Q}$ рациональных чисел и множества $R^1 \setminus \mathbf{Q}$ иррациональных чисел лишены изолированных точек.

Определение 2.3. *Точка x_0 топологического пространства X называется* ***точкой прикосновения*** *множества $A \subset X$, если любая окрестность U точки x_0 содержит хотя бы одну точку из A*, т.е. $A \cap U \neq \varnothing$.

Это определение можно выразить ещё, сказав, что *точка x_0 есть точка прикосновения множества A, если в A имеются точки, сколь угодно близкие к x_0*.

Определение 2.4. *Точка* x_0 *топологического пространства* X *называется* ***предельной точкой*** *множества* $A \subset X$, *если любая окрестность* U *точки* x_0 *содержит хотя бы одну точку из* A, *отличную от точки* x_0.

Пример 2.2. Рассмотрим на числовой прямой R^1 множества $A = \{n\}$, $B = \{1/n\}$, $n = 1,2,...;$ $C = (0,1)$ и $D = [0,1]$.

Из определения 2.3. следует, что все точки рассматриваемых множеств являются точками прикосновения, в то время как определение 2.4 говорит, что множество A предельных точек не имеет, множество B имеет одну предельную точку 0, предельные точки множеств C и D заполняют весь отрезок $[0,1]$.

Ясно, что *всякая предельная точка множества является для него и точкой прикосновения,* в то время как точка прикосновения множества далеко не всегда бывает его предельной точкой, например, изолированная точка.

2.2. Замыкание и производное множество

Определение 2.5. *Множество всех точек прикосновения множества* A *называют его* ***замыканием*** *и обозначают* $\overline{A}$, *а операцию перехода от множества* A *к множеству* $\overline{A}$ *называют* ***операцией топологического замыкания***.

Пример 2.3. **1**. В евклидовом пространстве E^n замыканием открытого шара $D_r^n(x_0)$ является замкнутый шар $\overline{D}_r^n(x_0)$ с тем же центром x_0 и радиусом r (см. пример 1.1).

2. На числовой прямой R^1 замыкание всех точек с рациональными координатами совпадает со всей числовой прямой R^1.

Пример 2.4. (*Теорема Вейерштрасса*). В метрическом пространстве $C[a,b]$ непрерывных вещественных функций, заданных на конечном отрезке $[a,b]$, замыкание множества всех полиномов совпадает со всем пространством $C[a,b]$.

Из определения замыкания следует, что *замыкание пустого множества* $\varnothing$ *пусто*, а *замыкание всего множества* X *совпадает с* X. Ясно так же, что любое множество A содержится в своём замыкании $\overline{A}$, т.е. $A \subset \overline{A}$ и если $A \subset B$, то $\overline{A} \subset \overline{B}$, что говорит о *монотонности операции замыкания*.

Операция замыкания является ***идемпотентной*** операцией, т.е. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ для произвольного подмножества $A \subset X$. Так как $\overline{A} \subset \overline{\overline{A}}$, нам надо показать, что $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$. Пусть точка $a \in \overline{\overline{A}}$ и U - её произвольная открытая в рассматриваемой топологии окрестность. Так как $U \cap \overline{A} \neq \varnothing$, то, существует точка $b \in U \cap \overline{A}$, поэтому, рассматривая U как некоторую окрестность точки b, из $b \in \overline{A}$ заключаем, что $U \cap A \neq \varnothing$, т.е. $a \in \overline{A}$.

Замкнутое множество можно охарактеризовать через понятие предельных точек.

Теорема 2.1. *Подмножество* $A \subset X$ *замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки* (*совпадает со своим замыканием*).

<u>Необходимость</u>. Пусть A замкнуто, x_0 - предельная точка A и $x_0 \notin A$. Тогда x_0 принадлежит открытому множеству $G = C_X A$, которое является окрестностью точки x_0. Но $G \cap A = \varnothing$, что противоречит определению предельной точки x_0.

<u>Достаточность</u>. Пусть теперь A содержит все свои предельные точки. Докажем, что подмножество A замкнуто, т.е. что его дополнение $G = C_X A$ открыто. Для этого достаточно показать, что для любой точки $x \in G$ найдётся такая окрестность U точки x, что $U \subset G$. Рассуждая от противного для

некоторой точки $x_0 \in G$ и всякой её окрестности U найдётся точка $y \in U$ такая, что $y \notin G$. Тогда $y \in C_X U = A$, следовательно, x_0 - предельная точка для A, и, значит, $x_0 \in A$ в противоречии с предложением, что $x_0 \in G = C_X A$.

Следствие. *Замыкание $\overline{A}$ любого множества из топологического пространства X замкнуто в X.*

Упражнение 2.1. Покажите справедливость теоремы 2.1 если в основу её формулировки положить равенство $\overline{A} = A$. (см. Александрян, стр. 15).

Определение 2.6. *Совокупность всех предельных точек множества A называют **производным множеством** множества A* и обозначают A'.

Таким образом, мы получили новую операцию, сопоставляющую каждому множеству $A \subset X$ его производное множество A'.

Теорема 2.2. *Для любого множества $A \subset X$ объединение A с его производным множеством A' замкнуто.*

Доказательство. Покажем, что если множество $A \cup A'$ замкнуто, то множество $C_X(A \cup A')$ открыто. Пусть x - произвольная точка $C_X(A \cup A')$. Тогда x не является предельной точкой для A и найдётся такая её окрестность U, что $U \cap A = \varnothing$. Пусть $y \in U$ - произвольная точка. Тогда для любой окрестности V точки y такой, что $V \subset U$, имеем $V \cap A = \varnothing$, следовательно, y не является предельной точкой для A и $U \cap A' = \varnothing$. Таким образом, $U \subset C_X(A \cup A')$; ввиду произвольности x множество $C_X(A \cup A')$ открыто, следовательно, $A \cup A'$ замкнуто.

Упражнение 2.2. Проверьте, что

$$(A \cup B)' = A' \cup B'; \ (A \cap B)' \subset A' \cap B'; \ (A \setminus B)' \supset A' \setminus B'.$$

Рассмотрим основное утверждение о структуре замыкания множества.

Теорема 2.3. *Для любого подмножества* A *топологического пространства* X $\overline{A} = A \cup A'$.

<u>Доказательство</u>. По теореме 2.2 множество $A \cup A'$ замкнуто и по определению замыкания 2.5 $\overline{A} \subset A \cup A'$. С другой стороны, любое замкнутое множество, содержащее A, содержит и все предельные точки A, а следовательно, содержит и производное множество A'. Отсюда следует, что $A \cup A' \subset \overline{A}$, а тогда $\overline{A} = A \cup A'$.

Определение 2.7. *Множество* A *топологического пространства* X *называется* ***совершенным****, если оно совпадает со своим производным множеством, т.е. если* $A = A'$.

Ясно, что *множество совершенно в том и только том случае, если оно, во-первых, замкнуто и, во-вторых, лишено изолированных точек*. Другой крайностью служит так называемое дискретное множество, которое состоит исключительно из изолированных точек. Простейшим примером совершенного множества служит замкнутый отрезок на R^1, а простейшим примером замкнутого, но не совершенного и даже дискретного множества на числовой прямой R^1 может служить множество $\mathbf{Z}$ целых чисел.

2.3. Внутренние, внешние и граничные точки множества

Определение 2.8. *Точка* a *называется* ***внутренней*** *точкой множества* $A \subseteq X$ *, если существует такая окрестность* U *точки* a *, что* $U \subset A$.

Множество всех внутренних точек множества A обозначают как $\operatorname{int} A$ ($\operatorname{int} A$ - сокращённое “interior”).

Пример 2.5. Пусть $A=[0,1]$ - отрезок вещественной прямой R^1, тогда $\operatorname{int} A=(0,1)$.

Непосредственно из определения внутренней точки следует, что любое подмножество окрестности, само является окрестностью и что открытое множество служит окрестностью для каждой своей точки.

В частности, *всё пространство* X *и только оно служит окрестностью любой своей точки*, тогда как *пустое множество* $\varnothing$ *является единственным открытым множеством, которое не служит окрестностью.*

Операция int *двойственна операции замыкания*, что видно из её свойств, формулируемых в следующей теореме.

Теорема 2.4. *Для любого множества* $A\subset X$ *имеем*:

1. *Множество внутренних точек* $\operatorname{int} A$ *- открытое множество.*

2. $\operatorname{int} A$ *- наибольшее открытое множество.*

3. *Если* A *открыто в рассматриваемой топологии, то* $\operatorname{int} A=A$.

4. *Если* $x\in \operatorname{int} A$, *то* $x\in A$ *и* x *не является предельной точкой для* $C_X A$.

5. $\overline{C_X A}=C_X \operatorname{int} A$.

<u>Доказательство</u>. **1**. Пусть x - произвольная точка из $\operatorname{int} A$; тогда, в силу определения внутренней точки, найдётся такая открытая окрестность U_x точки x, что $U_x\subset A$. Поскольку открытое множество является окрестностью любой своей точки, то все точки множества U_x являются внутренними для A, т.е. $U_x\subset \operatorname{int} A$. Так как $\operatorname{int} A=\bigcup_{x\in \operatorname{int} A} U_x$, то из аксиомы AT2 следует, что множество $\operatorname{int} A$ открыто.

2. По определениям 2.8 и 1.5 x есть внутренняя точка множества A, если существует открытое множество U_x содержащееся в A и содержащее x. Тогда $\operatorname{int} A = \bigcup\limits_{x \in \operatorname{int} A} U_x$ есть объединение всех открытых множеств U_x, содержащихся в A, т.е. *наибольшее открытое множество содержащееся в* A.

3. Очевидно, что если A открытое множество, то оно автоматически и является наибольшим открытым множеством содержащимся в A, т.е. $\operatorname{int} A = A$.

4. Пусть $x \in \operatorname{int} A$, тогда $x \in A$ и $x \notin (C_X A)'$, т.е. x не содержится в производном множестве к $C_X A$, а, значит, не является предельной точкой для $C_X A$. Обратно: если $x \in A$ и $x \notin (C_X A)'$, то найдётся окрестность $U_x \subset A$, следовательно $x \in \operatorname{int} A$.

5. $\overline{C_X A} = C_X \operatorname{int} A$ (В качестве упражнения доказать самостоятельно).

Пример 2.6. Покажем, что $\overline{A} = C_X \operatorname{ext} A$.

Определение 2.9. *Точка* b *называется* ***внешней*** *точкой множества* A, *если существует такая окрестность* V *точки* b, *в которой нет точек из* A, *т.е.* $V \subset C_X A$. *Множество всех внешних точек будем обозначать через* $\operatorname{ext} A$.

Ясно, что $\operatorname{ext} A$ есть ***внешняя*** *открытая часть* множества A, или

$$\operatorname{ext} A = \operatorname{int}(C_X A). \tag{2.1}$$

Понятия граничной точки и границы множества A ассоциируются с интуитивным представлением о “перегородке” отделяющей область пространства от внешней части.

Определение 2.10. *Точка* c *называется* ***граничной*** *точкой множества* A, *если в любой окрестности* W *точки* c

имеются как точки из A*, так и точки из* $C_X A$.

Определение 2.11. ***Границей*** ∂A *множества* A *назовём множество всех его граничных точек*.

$$\partial A = C_X\left(\operatorname{int} A \cup \operatorname{ext} A\right). \qquad (2.2)$$

Пример 2.7. Пусть $X = R^1$ и $A = (0,1]$.

Тогда

$\operatorname{int} A = (0,1)$, $C_X A = (-\infty,0] \cup (1,+\infty)$

и в соответствии с (2.1) имеем

$\operatorname{ext} A = \operatorname{int} C_X A = (-\infty,0) \cup (1,+\infty)$.

С учётом (2.2) получим

$\partial A = C_X\left(\operatorname{int} A \cup \operatorname{ext} A\right) = C_X\left((0,1) \cup (-\infty,0) \cup (1,+\infty)\right) = \{0,1\}$.

Мы видим, что граница множества A состоит из двух точек: 0 и 1.

Из определения внутренних, внешних и граничных точек следует, что относительно каждого множества A всё пространство X распадается на три множества $\operatorname{int} A$, $\operatorname{ext} A$, ∂A.

Ясно, что

$$\operatorname{int} A \cup \operatorname{ext} A \cup \partial A = X, \qquad (2.3)$$

$$\operatorname{int} A \cap \operatorname{ext} A = \operatorname{int} A \cap \partial A = \operatorname{ext} A \cap \partial A = \varnothing. \qquad (2.4)$$

Связь граничной операции ∂ с операцией замыкания и операцией int даёт следующая теорема.

Теорема 2.5. *Для любого множества* A *топологического пространства* X *имеют место следующие утверждения*:

1. $\partial A = \overline{A} \cap \overline{C_X A}$;

2. $\partial A = C_{\overline{A}} \operatorname{int} A$;

3. $\overline{A} = A \cup \partial A$;

4. $\operatorname{int} A = C_A \partial A$;

5. (A *замкнуто*) $\Leftrightarrow$ $(\partial A \subset A)$;

6. (A *открыто*) $\Leftrightarrow$ $\left((\partial A) \cap A = \varnothing\right)$.

<u>Доказательство</u>.

1. Пусть $x \in \partial A$; тогда (см. опр. 2.10) в любой окрестности U точки x найдутся точки x_1, x_2 такие, что $x_1 \in A$, $x_2 \in C_X A$. Отсюда $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{C_X A}$, т.е. $x \in \overline{A} \cap \overline{C_X A}$.

<u>Обратно</u>: если $x \in \overline{A} \cap \overline{C_X A}$, то $x \in \overline{A}$ и $x \in \overline{C_X A}$. Так как $\overline{C_X A} = C_X \operatorname{int} A$, $\overline{A} = C_X \operatorname{ext} A$ (см. п. 5 теоремы 2.4 и пример 2.6), то $x \notin \operatorname{int} A$ и $x \notin \operatorname{ext} A$, откуда следует, что $x \in \partial A$.

2. Согласно определению 2.11

$$\partial A = C_X\left(\operatorname{int} A \cup \operatorname{ext} A\right) = C_{C_X \operatorname{ext} A} \operatorname{int} A = C_{\overline{A}} \operatorname{int} A.$$

3. Так как $\operatorname{int} A \subset \overline{A}$, то из предыдущего п. **2** следует, что $\overline{A} = \operatorname{int} A \cup \partial A \subset A \cup \partial A$; так как $\partial A \subset \overline{A}$, то

$$A \cup \partial A \subset A \cup \overline{A} = \overline{A}.$$

4. $\operatorname{int} A = C_A \partial A$; (В качестве упражнения доказать самостоятельно).

5. Если A замкнуто, то $\partial A \subset A = \overline{A}$. Обратно: если $\partial A \subset A$, то в силу п.**3** $\overline{A} = A \cup \partial A$, откуда $A = \overline{A}$, т.е. A замкнуто.

6. (A *открыто*) $\Leftrightarrow$ $\left((\partial A) \cap A = \varnothing\right)$ (В качестве упражнения доказать самостоятельно).