2.4. База и предбаза топологии

Часто топологию в пространстве вводят не задавая сразу всё семейство открытых множеств, а определяя сначала лишь часть из этого семейства, которую называют ***базисом*** топологии, а затем из базисных множеств с помощью операции объединения получают все открытые множества.

Так, например, на евклидовой плоскости E^2 открытые множества можно получить из открытых кругов.

Определение 2.12. *Совокупность* $B=\{B_\alpha\}$ *открытых множеств топологического пространства* (X,τ) *называется* ***базой топологии*** τ*, если для любой точки* $a\in X$ *и любой её окрестности* $U\in\tau$ *найдётся такое множество* $B_0\in B$*, что* $a\in B_0\subset U$.

Таким образом, всякое непустое открытое множество топологического пространства (X,τ) можно представить в виде объединения открытых множеств из базы топологии τ (это свойство характеризует базу и часто принимается за определение базы (см. Вернер, Александрян)). В частности, X равно объединению всех множеств базы, т.е. $X=\bigcup\limits_{\alpha}B_\alpha$.

Очевидно, что всякое топологическое пространство (X,τ) обладает базой, так как система всех открытых подмножеств, очевидно, образует базу топологии τ. *Заметим, что все изолированные точки пространства* X*, если они существуют, обязательно должны входить в состав любой базы этого пространства.*

Пример 2.8. Рассмотрим на числовой прямой R^1 множество интервалов (a,b). Ясно, что для каждой точки $x_0\in R^1$ и произвольной её окрестности U найдётся такой интервал $B_0=(a_0,b_0)$, что $x_0\in(a_0,b_0)\subset U$. Итак, совокупность всевозможных интервалов (a,b) образует базу топологии числовой прямой. Заметим, что из всевозможных интервалов (a,b) можно взять лишь интервалы с рациональными концами, которые образуют базу топологии на R^1 из *счётного*[1] числа элементов.

Пример 2.9. Пусть $X = R^n$ - n- мерное векторное пространство. В качестве базы топологии на R^n можно взять систему множеств $B = \{B_{a,b}\}$,

где $B_{a,b} = \{x \in R^n : a_i < \xi_i < b_i, i = 1,...,n\}$,

ξ_i - координаты вектора $x = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$; $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ - произвольные векторы в R^n и $a_i < b_i$.

Такие множества $B_{a,b}$ называются ***открытыми параллелепипедами*** в R^n. Здесь, как и в предыдущем примере, в качестве координат векторов a и b можно взять рациональные числа, тогда база топологии в R^n будет состоять из *счётного* множества параллелепипедов с рациональными вершинами.

Определение 2.13. *Всякую систему подмножеств из X, объединение которых равно X, будем называть* ***покрытием*** *X. Покрытие называется* ***открытым покрытием***, *если все подмножества данной системы открыты.*

Если $\{B_\alpha\}$- некоторое покрытие X, то возникает вопрос: при каких условиях можно построить топологию на X так, чтобы семейство $\{B_\alpha\}$ было базой этой топологии?

Теорема 2.6. (***Критерий базы***). *Пусть $B = \{B_\alpha\}$- покрытие X удовлетворяющее следующим условиям:*

1. $X = \bigcup_\alpha B_\alpha$;

1 Множество X называется ***счётным***, если оно равномощно множеству $\mathbf{N}$ всех натуральных чисел. Примером счётного множества служит множество всех полиномов от одной переменной с рациональными коэффициентами.

2. $\varnothing \in B$;

3. *Каковы бы ни были множества* B_α, B_β *из* B *и точка* $a \in B_\alpha \cap B_\beta$, *существует множество* $B_\gamma \in B$ *такое, что* $a \in B_\gamma \subset B_\alpha \cap B_\beta$.

Тогда в X *существует топология, для которой покрытие* $B = \{B_\alpha\}$ *является базой и эта топология единственная.*

Доказательство. Если $B = \{B_\alpha\}$ - база топологии, то $B_\alpha \cap B_\beta$ - открытое множество, и по определению базы для каждого $a \in B_\alpha \cap B_\beta$ существует B_γ: $a \in B_\gamma \subset B_\alpha \cap B_\beta$.

Обратно. Если $B = \{B_\alpha\}$ удовлетворяет условиям теоремы, то всевозможные объединения $U = \bigcup B_\alpha$ и пустое множество образуют, как нетрудно проверить, топологию на X, для которой $B = \{B_\alpha\}$ - база.

Единственность топологии следует из того, что система, состоящая из всевозможных объединений $U = \bigcup B_\alpha$ множеств входящих в *фиксированную систему* $B = \{B_\alpha\}$, очевидно, определена однозначно, и поэтому, в частности, если две топологии имеют одну и ту же базу, то они совпадают.

Можно ли сконструировать топологию на множестве X по произвольному его покрытию $\{S_\alpha\}$? На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема 2.7. *Покрытие* $\{S_\alpha\}$ *естественно порождает топологию на* X, *а именно совокупность множеств* $\left\{B_\alpha = \bigcap_{\alpha \in K} S_\alpha\right\}$, *где* K *- произвольное* ***конечное*** *подмножество из* $\{\alpha\}$, *- база топологии.*

Доказательство. Проверим, что совокупность $B=\{B_\alpha\}$ удовлетворяет критерию базы. В самом деле, для $B_\alpha \cap B_\beta$ положим $B_\gamma = B_\alpha \cap B_\beta$. Ясно, что $B_\gamma \in B$, поэтому критерий базы выполнен.

Таким образом, покрытие $\{S_\alpha\}$ множества X определяет на X топологию, открытыми множествами которой являются всевозможные объединения $\bigcup\left(\bigcap_{\alpha\in K} S_\alpha\right)$ и пустое множество.

Определение 2.14. *Семейство* $\{S_\alpha\}$ *по отношению к топологии, которую оно порождает, называется* ***предбазой*** *этой топологии.*

Пример 2.10. Пусть $X = R^1$. Множества вида $S_\alpha = \{x : x < \alpha\}$, $\alpha \in R^1$, и $S_\beta = \{x : x > \beta\}$, $\beta \in R^1$, образуют предбазу топологии числовой прямой R^1.

2.5. Индуцированная топология и подпространства

Топологическое пространство обладает замечательным свойством: любое множество в таком пространстве само естественным образом является топологическим пространством.

Это является следствием того, что топология любого пространства естественным образом задаёт (индуцирует) в каждом подмножестве этого пространства некоторую вполне определённую топологию. Пусть (X,τ) - произвольное топологическое пространство и $Y \subset X$ - некоторое его непустое подмножество. Рассмотрим семейство $\tau_Y = \{U_Y\} = \{Y \cap U, U \in \tau\}$ подмножеств U_Y, представляющих собой пересечение с Y всех подмножеств U, входящих в состав семейства τ, т.е. подмножеств вида $U_Y = Y \cap U$, где $U \in \tau$. Ясно, что семейство τ_Y

удовлетворяет всем аксиомам (АТ1 $\div$ АТ3) топологической структуры и поэтому задаёт в Y определённую топологию, которая называется *топологией в* Y*, индуцированной из пространства* (X,τ).

Топологическое пространство (Y,τ_Y) *называется* ***подпространством*** *пространства* (X,τ).

Предположим теперь, что множество $Z \subset Y \subset X$. Тогда в соответствии с вышеизложенным в Z окажутся заданными две топологии: одна индуцируется из пространства (X,τ), а другая из пространства (Y,τ_Y). Ясно, что эти две топологии совпадают, поэтому индуцированная в Z топология не зависит от того, подмножеством именно какого объемлющего подпространства пространства (X,τ) мы его рассматриваем. Можно сказать, что *индуцирование топологий транзитивно*, что делает корректным понятие индуцированной топологии.

Рассмотрим, как устроены замкнутые множества в подпространстве Y.

Вспомним, что подмножество $V \subset Y$ является (определение 1.5) замкнутым в пространстве Y, если его дополнение $C_Y V$ до Y открыто в пространстве Y.

Теорема 2.8. *Подмножество* V *множества* Y *является замкнутым в пространстве* (Y,τ_Y) *тогда и только тогда, когда оно является пересечением* Y *с замкнутым подмножеством из* (X,τ).

<u>Доказательство</u>. Пусть $V = Y \cap H$, где H - замкнутое в (X,τ) подмножество. Тогда $C_Y V = Y \cap C_X H$ будет открытым в (Y,τ_Y), так как $C_X H$ открыто в (X,τ). Тогда V замкнуто в (Y,τ_Y).

Обратно. Пусть V замкнуто в (Y,τ_Y). Тогда $C_Y V$ открыто в (Y,τ_Y) и $C_Y V = Y \cap G$, где $G \in \tau$. Но тогда $V = Y \cap C_X G$ замкнуто в (X,τ).

2.6. Связность

Понятие связности обобщает интуитивное представление о целостности, неразделённости геометрической фигуры, а понятие несвязного пространства - отрицание целостности, разделённость.

Рассмотрим топологическое пространство (X,τ) и его подмножества A, B.

Определение 2.15. *Множества A и B называются отделёнными друг от друга, если* $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$.

Пример 2.11. Пусть $X = R^1$, $A=(a,b)$, $B=(b,c)$ - интервалы и $a<b<c$, тогда A и B отделены. Если $A=(a,b]$, $B=(b,c)$, то A и B не отделены, так как $A \cap \overline{B} = \{b\} \neq \varnothing$.

Определение 2.16. *Пространство X называется* ***несвязным,*** *если его можно представить как объединение двух непустых отделённых друг от друга множеств U и V.* $U \cap V = \varnothing$, $U \cup V = X$.

Пространство, не удовлетворяющее условию определения 2.16, называется ***связным****.*

Пример 2.12. Пусть X - пространство, состоящее из двух точек a и b, в котором окрестностями точки a являются множества $\{a\}$ и $\{a,b\}$, а окрестности точки b - это множества $\{b\}$ и A и B. Ясно, что X - топологическое пространство в котором множества $\{a\}$ и $\{b\}$ открыты и X является объединением двух открытых непересекающихся множеств. Следовательно, пространство X не связно.

Пример 2.13. Пусть $X = \mathbf{Q} = \{p/q\}$ - множество рациональных чисел с топологией, индуцированной из R^1. Пусть $a \in R^1$ - произвольное иррациональное число. Тогда множества

$$U_a = \{x : x \in \mathbf{Q}, x < a\},\ V_a = \{x : x \in \mathbf{Q}, x > a\}$$

непусты, открыты, не пересекаются и $\mathbf{Q} = U_a \cup V_a$, что означает несвязность $\mathbf{Q}$.

Упражнение 2.1. Докажите, что множество всех иррациональных чисел несвязно.

Намного труднее дать пример связного пространства (за исключением тривиальных случаев: $X = \{*\}$ - одноточечное пространство; произвольное множество X с тривиальной топологией τ_0) так как *связность приходиться доказывать* - нельзя же перебрать в уме одно за другим все возможные представления X в виде объединения двух открытых подмножеств и убедиться, что эти два подмножества всегда пересекаются.

Заметим, что если несвязное пространство X разбито на два не имеющих общих точек непустых открытых множества U и V, то $U = C_X V$ и $V = C_X U$.

В силу чего можно дать определение связного пространства.

Определение 2.17. *Пространство X называется связным, если в нём одновременно открытым и замкнутым множеством является лишь само пространство X* ***или*** *пустое множество*.

Определение 2.18. *Множество $H \subset X$ называется связным, если оно является связным пространством относительно индуцированной топологии*.

Другими словами, множество H в топологическом пространстве X называется связным, если нельзя найти двух открытых в X множеств U и V таких, что

$$H \subset U \cup V,$$
$$(H \cap U) \cap (H \cap V) = \varnothing,$$
$$H \cap U \neq \varnothing,$$
$$H \cap V \neq \varnothing. \qquad (2.5)$$

Теорема 2.9. *Пусть* $\{H_\alpha\}$ *- совокупность связных подмножеств пространства* X *, имеющих общую точку. Тогда множество* $H = \bigcup\limits_\alpha H_\alpha$ *также будет связным в* X .

<u>Доказательство</u>. Предположим, что утверждение теоремы неверно. Тогда существуют открытые в X множества U и V , такие, что

$$H \subset U \cup V, \qquad (2.6)$$
$$(H \cap U) \cap (H \cap V) = \varnothing, \qquad (2.7)$$
$$H \cap U \neq \varnothing,\ H \cap V \neq \varnothing. \qquad (2.8)$$

Очевидно, что при любом α

$$H_\alpha = (H_\alpha \cap U) \cup (H_\alpha \cap V). \qquad (2.9)$$

Множества $H_\alpha \cap U$ и $H_\alpha \cap V$ открыты в H_α и их пересечение пусто, поскольку

$$(H_\alpha \cap U) \cap (H_\alpha \cap V) \subset (H \cap U) \cap (H \cap V) = \varnothing. \qquad (2.10)$$

Так как H_α связно в X , то одно из двух множеств $H_\alpha \cap U$ или $H_\alpha \cap V$ пусто. Поэтому каждое H_α содержится либо в U , либо в V .

Допустим сначала, то нашлись такие различные α_1 и α_2 , для которых $H_{\alpha_1} \subset U$, а $H_{\alpha_2} \subset V$. Тогда в силу (2.7)

$$H_{\alpha_1} \cap H_{\alpha_2} \subset (H \cap U) \cap (H \cap V) = \varnothing,$$

что невозможно, так как H_{α_1} и H_{α_2} по условию теоремы имеют общую точку.

Остаётся только одна из двух возможностей: при любом α либо все $H_\alpha \cap U=\varnothing$, либо все $H_\alpha \cap V=\varnothing$. Пусть для определённости $H_\alpha \cap U=\varnothing$, тогда $H \cap U=\bigcup\limits_{\alpha}\left(H_\alpha \cap U\right)=\varnothing$, что противоречит (2.8).

Пусть $x\in X$ - произвольная точка топологического пространства. Согласно теореме 2.9 среди всех связных множеств H_x в X, содержащих точку x, всегда найдётся наибольшее, т.е. такое, которое содержит любое связное множество, содержащее точку x: $L_x=\bigcup H_x$, где все H_x являются связными множествами, содержащими точку x. Множество L_x замкнуто, так как *замыкание* $\overline{L}_x$ *связного множества* L_x *связно*, и поэтому $\overline{L}_x \subset L_x$, т.е. $\overline{L}_x=L_x$.

Определение 2.19. *Наибольшее связное множество* L_x, *содержащее точку* x, *называется* ***компонентой связности (связной компонентой)*** *точки* x *в топологическом пространстве* X.

Пусть $x,y\in X$, $x\neq y$, а L_x и L_y их компоненты связности. В силу теоремы 2.9 и определения компоненты связности имеем две возможности: 1) либо $L_x=L_y$ ($L_x \cap L_y\neq\varnothing$); 2) либо $L_x \cap L_y=\varnothing$. В первом случае, если $L_x \cap L_y\neq\varnothing$, то $L_x \cup L_y=L_x=L_y$. Во втором случае L_x отделено от L_y, так как

$$L_x \cap \overline{L}_y=\varnothing,\ \overline{L}_x \cap L_y=\varnothing.$$

Таким образом справедлива следующая теорема.

Теорема 2.10. *Компоненты связности двух различных точек либо не пересекаются, либо совпадают*. (*Всякое топологическое пространство можно представить в виде объединения своих связных компонент, замкнутых и непересекающихся*).

Из теоремы вытекает, что всякое топологическое пространство разбивается в сумму попарно непересекающихся компонент связности его точек. Компоненты связности отдельных точек топологического пространства X называют просто *компонентами* X.

Рассмотрим несколько важных для приложений примеров связных пространств.

Теорема 2.11. *Отрезок* $[a,b]$ *числовой прямой связен.*

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим топологическое пространство $X=[a,b]$ с топологией, индуцированной из R^1.допустим, что X несвязно: $X=U\cup V$, $U\cap V=\varnothing$, где U и V непустые и открытые множества. Пусть для определённости точка $a\in U$. Будем рассматривать полуинтервалы $[a,x)$, где $x\in(a,b]$.

Когда x близко к a, то $[a,x)\subset U$, так как U открыто. Supremum таких x, что $[a,x)\subset U$, обозначим через a_* $(a_*\in X)$; ясно, что $a_*\neq b$.

Если $a_*\in U$, то в силу открытости U близкие к a_* точки как слева так и справа тоже лежат в U, что противоречит определению a_*. Следовательно $a_*\notin U$. Если $a_*\in V$, то в силу открытости V близкие к a_* точки тоже лежат в V. Поэтому $[a,a_*-\varepsilon)\cap V\neq\varnothing$ для малых $\varepsilon>0$, что противоречит определению a_*. Следовательно, $a_*\notin V$. Таким образом, $a_*\notin U\cup V$, получаем противоречие с предложением $X=U\cup V$.

Таким же способом с небольшими изменениями можно доказать связность $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b), а так же интервалов, бесконечных в одном или обоих направлениях.

Теорема 2.12. *Всякое выпуклое множество* $T \subset R^n$ *связно*.

<u>Доказательство</u>. Пусть $T = U \cup V$, где U, V - непустые непересекающиеся открытые множества. Пусть $[a,b] = X$ - отрезок, соединяющий некоторые точки $a \in U$ и $b \in V$. Тогда $U_X = X \cap U$, $V_X = X \cap V$ - непустые непересекающиеся открытые множества в X и $X = U_X \cup V_X$, что противоречит связности отрезка $[a,b] = X$.

Следствие. *Пространство* R^n *и диски* $D_r^n(x_0)$, $\overline{D}_r^n(x_0)$ *связны*.