

МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ¹⁾

§ 1. Основные понятия

Мы познакомились с аналитическими методами решения уравнений с частными производными. Однако явное представление решения в виде ряда или интеграла не всегда возможно.

Рассмотрим, например, уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (1)$$

Метод разделения переменных применим только в случае $k(x, t) = k_1(x)k_2(t)$. Однако часто встречаются задачи, когда коэффициент теплопроводности непредставим в таком виде или даже зависит от температуры (квазилинейное уравнение теплопроводности). Представление решений нелинейных уравнений в аналитической форме возможно в исключительных случаях.

Универсальным методом приближенного решения дифференциальных уравнений, применимым для широкого класса уравнений математической физики, является метод конечных разностей (или метод сеток).

Метод конечных разностей состоит в следующем. Область непрерывного изменения аргументов (например, x и t) заменяется конечным (дискретным) множеством точек (узлов), называемым сеткой; вместо функций непрерывного аргумента рассматриваются функции дискретного аргумента, определенные в узлах сетки и называемые сеточными функциями. Производные, входящие в дифференциальное уравнение, заменяются (аппроксимируются) при помощи соответствующих разностных отношений; дифференциальное уравнение при этом заменяется системой алгебраических уравнений (разностным уравнением). Начальные и краевые условия тоже заменяются разностными начальными и краевыми условиями для сеточной функции.

Естественно требовать, чтобы полученная таким образом разностная краевая задача была разрешима и ее решение при увеличении числа N узлов сетки приближалось (сходилось) к решению исходной задачи для дифференциального уравнения. Ниже понятия аппроксимации, сходимости, точности и устойчивости иллюстрируются на простейших примерах.

¹⁾ См. А. А. Самарский, Введение в теорию разностных схем, «Наука», 1971.

1. Сетки и сеточные функции. Рассмотрим простейшие примеры сеток.

Пусть область изменения аргумента x есть отрезок $0 \leq x \leq l$. Разобьем отрезок $0 \leq x \leq l$ точками $x_i = ih$ ($i = 0, 1, 2, \dots, N$; $h > 0$) на N равных частей длины $h = l/N$ каждая. Множество точек $x_i = ih$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$, называется разностной сеткой на отрезке $0 \leq x \leq l$ и обозначается $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N\}$, а число h — расстояние между точками (узлами) сетки $\bar{\omega}_h$ — называется шагом сетки.

Отрезок $[0, l]$ можно разбить на N частей, вводя произвольные точки $x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < l$. Тогда получим сетку $\bar{\omega}_h = \{x_i, i = 0, 1, \dots, N, x_0 = 0, x_N = l\}$ с шагом $h_i = x_i - x_{i-1}$, который зависит от номера i узла x_i . Если $h_i \neq h_{i+1}$ хотя бы для одного номера i , то сетка $\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_h^*$ называется неравномерной. Если $h_i = \text{const} = h = l/N$ для всех $i = 1, 2, \dots, N$, то мы получаем построенную выше равномерную сетку.

На бесконечной прямой $-\infty < x < \infty$ можно рассматривать сетку $\omega_{h,x} = \{x + ih, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ с началом в любой точке x , состоящую из бесконечного числа узлов.

Функцию $y_i = y(x_i)$ дискретного аргумента x_i , $i = 0, 1, \dots, N$, называют сеточной функцией, определенной на сетке $\bar{\omega}_h$.

Всякой непрерывной функции $f(x)$ можно поставить в соответствие сеточную функцию f_i^h , полагая, например, $f_i^h = f(x_i)$. Впрочем, в некоторых случаях удобнее устанавливать это соответствие другими способами.

Пусть область изменения аргументов (x, t) есть прямоугольник $\bar{D} = (0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T)$. Построим на отрезке $0 \leq x \leq 1$ сетку $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N\}$ с шагом $h = 1/N$ и сетку $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, N_0\}$ с шагом $\tau = T/N_0$ на отрезке $0 \leq t \leq T$. Множество узлов (x_i, t_j) с координатами $x_i = ih$ и $t_j = j\tau$ назовем сеткой в прямоугольнике \bar{D} и обозначим $\bar{\omega}_{h\tau} = \{(x_i = ih, t_j = j\tau), i = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, N_0\}$. Эта сетка равномерна по каждому из переменных x и t . Если хотя бы одна из сеток $\bar{\omega}_h$ или $\bar{\omega}_\tau$ неравномерна, то сетка $\bar{\omega}_{h\tau}$ называется неравномерной. Сетка $\bar{\omega}_{h\tau}$, очевидно, состоит из точек пересечения прямых $x = x_i$, $i = 0, 1, \dots, N$ и прямых $t = t_j$, $j = 0, 1, \dots, N_0$.

Пусть y — сеточная функция, заданная на $\bar{\omega}_{h\tau}$. Будем обозначать $y_i^j = y(x_i, t_j)$ значение сеточной функции y в узле (x_i, t_j) сетки $\bar{\omega}_{h\tau}$.

Непрерывной функции $u(x, t)$, где (x, t) — точка из \bar{D} , будем ставить в соответствие сеточную функцию $u_i^j = u_i^j = u(x_i, t_j)$.

Возможны и другие способы такого соответствия, на которых мы здесь не останавливаемся.

2. Аппроксимация простейших дифференциальных операторов. Оператор L_h , преобразующий сеточную функцию y в сеточную функцию $Y = L_h y$, называют сеточным или разностным оператором. Дифференциальный оператор L , заданный в классе функций непрерывного аргумента, может быть приближенно заменен (аппроксимирован) разностным оператором L_h , заданным на сеточных функциях. Для этого каждая из производных заменяется разностным отношением (отсюда и название «разностный оператор»), содержащим значения сеточной функции в нескольких узлах сетки. Посмотрим, как это делается для первых и вторых производных функции одного переменного.

Пусть $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih\}$ — сетка с шагом h на отрезке $0 \leq x \leq 1$. Рассмотрим первую производную $Lv = v'$ функции $v(x)$. Заменить ее разностным выражением можно бесчисленным множеством способов. Простейшими являются замены

$$Lv \sim \frac{v_i - v_{i-1}}{h} = L_h^- v_i$$

— левая разностная производная или левое разностное отношение,

$$Lv \sim \frac{v_{i+1} - v_i}{h} = L_h^+ v_i$$

— правая разностная производная или $L_h^0 v_i = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h}$ — центральная разностная производная.

Здесь $v_i = v(x_i)$, знак \sim означает соответствие или аппроксимацию. При замене $Lv = v'$ разностным выражением $L_h^\pm v_i$ допускается погрешность $L_h^\pm v_i - (Lv)_i = \psi_i^h$, называемая погрешностью аппроксимации оператора L разностным оператором L_h . Естественно требовать, чтобы при стремлении h к нулю эта погрешность стремилась к нулю. Для оценки ψ_i^h надо предположить, что $v(x)$ гладкая функция. Будем говорить, что $v(x)$ принадлежит классу (пространству) $C^{(m)}[0, 1]$ ($v(x) \in C^{(m)}[0, 1]$) функций, заданных на отрезке $0 \leq x \leq 1$, если $v(x)$ имеет m непрерывных на отрезке $0 \leq x \leq 1$ производных. При $m = 0$ получаем класс $C^{(0)}[0, 1]$ непрерывных при $0 \leq x \leq 1$ функций.

Пусть $v(x) \in C^{(m)}[0, 1]$, где $m \geq 2$. Разложим $v(x)$ в окрестности точки $x = x_i$:

$$v_{i \pm 1} = v_i \pm hv_i' + O(h^2)$$

и вычислим $\psi_i^h = L_h^- v_i - v_i' = O(h)$, $\psi_i^h = L_h^+ v_i - v_i' = O(h)$.

Будем говорить, что разностный оператор L_h : 1) аппроксимирует дифференциальный оператор L на сетке $\bar{\omega}_h$, если

$\max_{\omega_h} |\psi_i^h| = \max_{\omega_h} |L_h v_i - (Lv)_i|$, где $v(x)$ — достаточно гладкая функция, стремится к нулю при $h \rightarrow 0$; 2) аппроксимирует L с порядком n ($n > 0$), если $\max_{\omega_h} |\psi_i^h| = O(h^n)$ (или $\max_{\omega_h} |\psi_i^h| \leq Mh^n$, где M — положительная постоянная, не зависящая от h).

Обращаясь к формулам для L_h^\pm , видим, что $L_h^- v_i$ и $L_h^+ v_i$ аппроксимируют $Lv = v'$ с первым порядком при $v \in C^{(m)}$, где $m \geq 2$. Увеличение m не меняет порядка аппроксимации.

Выражение для $L_h^- v_i$ содержит значения v в двух узлах $x = x_i$ и $x = x_{i-1}$ сетки. Говорят, что оператор L_h^- является двухточечным или оператором первого порядка.

Множество узлов, значения сеточной функции в которых входят в выражение $L_h v_i$, называют шаблоном оператора L_h в точке x_i . Очевидно, что шаблон оператора L_h^- состоит из двух узлов x_i и x_{i-1} , а шаблон L_h^+ — из узлов x_i и x_{i+1} .

Возьмем, например, трехточечный оператор, определенный на шаблоне x_{i-1}, x_i, x_{i+1} :

$$L_h^{(\sigma)} v_i = \sigma L_h^+ v_i + (1 - \sigma) L_h^- v_i = \frac{\sigma v_{i+1} + (1 - 2\sigma) v_i - (1 - \sigma) v_{i-1}}{h}, \quad (2)$$

где σ — произвольное число. В частности, при $\sigma = 1/2$ получаем центральную разностную производную $L_h^0 v_i = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h}$, которая, как нетрудно показать, при $v(x) \in C^{(3)}$ [0, 1] аппроксимирует $v'(x)$ со вторым порядком.

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями

$$\begin{aligned} v_{\bar{x}, i} &= \frac{v_i - v_{i-1}}{h}, & v_{x, i} &= \frac{v_{i+1} - v_i}{h}, \\ v_{\bar{x}, i}^{\circ} &= \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} = \frac{1}{2} (v_{\bar{x}, i} + v_{x, i}). \end{aligned} \quad (3)$$

В тех случаях, когда номер i узла не имеет значения, будем его опускать и писать $v_{\bar{x}}$, v_x , $v_{\bar{x}}^{\circ}$.

Рассмотрим теперь вторую производную $Lv = v''$. На двухточечном шаблоне, очевидно, ее аппроксимировать нельзя. Выберем трехточечный шаблон, состоящий из узлов x_{i-1}, x_i, x_{i+1} , и рассмотрим разностный оператор

$$L_h v_i = v_{\bar{x}\bar{x}, i} = \frac{1}{h} (v_{x, i} - v_{\bar{x}, i}) = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2}. \quad (4)$$

Если $v \in C^{(m)}$ [0, 1], $m \geq 4$, то можно написать

$$v_{i \pm 1} = v_i \pm hv'_i + \frac{h^2}{2} v''_i \pm \frac{h^3}{6} v'''_i + \frac{h^4}{24} v^{(IV)}_i + o(h^4), \quad (5)$$

($o(h^n)$) — величина, стремящаяся к нулю при $h \rightarrow 0$ быстрее, чем h^n). Отсюда следует (индекс i опускаем), что

$$v_{\bar{x}x} - v'' = \frac{h^2}{12} v^{(IV)} + o(h^2), \quad (6)$$

т. е. $v_{\bar{x}x}$ аппроксимирует v'' со вторым порядком.

Для аппроксимации четвертой производной $Lv = v^{(IV)}$ выберем пятиточечный шаблон, состоящий из узлов $x_i + kh$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2$), и положим

$$L_h v_i = v_{\bar{x}x\bar{x}x, i} = \frac{v_{i-2} - 4v_{i-1} + 6v_i - 4v_{i+1} + v_{i+2}}{h^4}. \quad (7)$$

В этом случае $v_{\bar{x}x\bar{x}x} - v^{(IV)} = O(h^2)$ для $v(x) \in C^{(6)}$. На пятиточечном шаблоне ($x_i + kh$), $k = 0, \pm 1, \pm 2$, можно добиться аппроксимации $O(h^4)$ для v'' , если $v \in C^{(6)}$. В самом деле, из (6) и (7) следует, что оператор

$$L_h v = v_{\bar{x}x} - \frac{h^2}{12} v_{\bar{x}x\bar{x}x} = v'' + O(h^4) \quad (8)$$

имеет 4-й порядок аппроксимации.

На практике аппроксимация производных на многоточечных шаблонах используется редко, так как при увеличении шаблона обычно увеличивается объем вычислительной работы и ухудшаются качества получающихся разностных операторов (в смысле устойчивости).

Еще раз отметим, что порядок аппроксимации разностного оператора L_h зависит от порядка m дифференцируемости функции $v(x)$. Мы везде фактически говорили о максимальном порядке аппроксимации, который не меняется при увеличении номера m класса $C^{(m)}$, считая, что $v(x)$ — любая функция из $C^{(m)}$. Очевидно, что при специальном выборе $v(x)$ порядок аппроксимации может повыситься. Если, например, $v(x) = u(x)$ есть решение уравнения $u'' = x$, то $u^{(IV)} = 0$ и $u_{\bar{x}x} = u''$, т. е. $v_{\bar{x}x}$ аппроксимирует v'' точно при $v = u$.

Рассмотрим более сложный оператор

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (9)$$

где $u = u(x, t)$ — функция двух аргументов x и t , меняющихся в области $\bar{D} = (0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T)$. Введем сетку

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \{(x_i = ih, t_j = j\tau), i = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, N_0\}$$

с шагами $h = 1/N$ и $\tau = T/N_0$, построенную в п. 2.

Произведем замену

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^{i+1} \sim \frac{u_i^{i+1} - u_i^i}{\tau} = u_i^{i+1}, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^i \sim \frac{u_{i-1}^i - 2u_i^i + u_{i+1}^i}{h^2} = u_{xx}^i.$$

В результате получим разностный оператор

$$L_{h\tau} u_i^{i+1} = \frac{u_i^{i+1} - u_i^i}{\tau} - \frac{u_{i-1}^i - 2u_i^i + u_{i+1}^i}{h^2}, \quad (10)$$

который можно записать в виде $L_{h\tau} u = u_i - \check{u}_{xx}$, где $\check{u} = u_i^i$, $u = u_i^{i+1}$. Этот оператор определен на шаблоне, состоящем из четырех точек (x_i, t_{j+1}) , (x_i, t_j) , (x_{i-1}, t_j) , (x_{i+1}, t_j) (рис. 85, а). Оператор $L_{h\tau}$ определен не во всех узлах $\bar{\omega}_{h\tau}$, а только при $0 < i < N$ и $j > 0$, т. е.

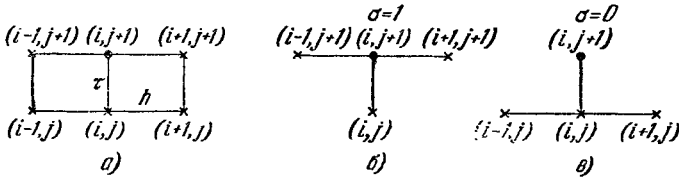


Рис. 85.

в тех узлах, в которых шаблон состоит только из узлов сетки $\bar{\omega}_{h\tau}$. Узлы (x_i, t_j) , $0 < i < N$, $j > 0$, назовем внутренними и обозначим $\omega_{h\tau} = \{(x_i, t_j), 0 < i < N, 0 < j \leq N_0\}$ множество всех внутренних узлов. Таким образом, оператор $L_{h\tau}$ определен на $\omega_{h\tau}$, т. е. во внутренних узлах. В остальных узлах, называемых граничными, должны быть заданы краевые и начальные условия. Оператор $L_{h\tau}$ имеет первый порядок аппроксимации по τ и второй по h :

$$\max_{\omega_{h\tau}} |L_{h\tau} u_i^i - (Lu)_i^i| = O(h^2 + \tau), \quad (11)$$

так как $u_{xx} = u'' + O(h^2)$, $u_i = \check{u} + O(\tau)$ ($\check{u} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^i$). Здесь штрих означает дифференцирование по x , точка — дифференцирование по t . Рассмотрим оператор

$$L_{h\tau} u_i^{i+1} = \frac{u_i^{i+1} - u_i^i}{\tau} - \frac{u_{i-1}^{i+1} - 2u_i^{i+1} + u_{i+1}^{i+1}}{h^2}, \quad \text{или } L_{h\tau} u = u_i - u_{xx}, \quad (12)$$

определенный на четырехточечном шаблоне (x_{i-1}, t_{j+1}) , (x_i, t_{j+1}) , (x_{i+1}, t_{j+1}) , (x_i, t_j) (рис. 85, б). Он аппроксимирует Lu с тем же порядком, что и оператор (10).

В § 2 будет рассмотрено однопараметрическое семейство разностных операторов, аппроксимирующих оператор (9). Это семейство содержит операторы (10) и (12).

До сих пор мы оценивали величину погрешности аппроксимации $\psi = L_h v - Lv$ для оператора L_h (или $L_{h\tau}$) как $\max_{\omega_h} |\psi|$, т. е. по норме ¹⁾ («в норме»)

$$\|\psi\|_0 = \max_{x \in \omega_h} |\psi(x)|. \quad (13)$$

Для оценки величины сеточной функции ψ можно использовать и другие нормы, например:

$$\|\psi\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{N-1} h\psi_i^2 \right)^{1/2}, \quad \|\psi\|_1 = \sum_{i=1}^{N-1} h|\psi_i| \text{ и т. д.} \quad (14)$$

Пусть $\|\psi\|$ — некоторая норма для функций ψ , заданных на сетке ω_h . В дальнейшем будем говорить, что разностный оператор L_h : 1) аппроксимирует дифференциальный оператор L по норме $\|\cdot\|$, если $\|\psi\| = \|L_h v - Lv\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$; 2) аппроксимирует L с порядком n ($n > 0$) (L_h имеет n -й порядок аппроксимации), если $\|\psi\| = O(h^n)$ или $\|\psi\| \leq Mh^n$, где $M = \text{const} > 0$ не зависит от h .

Если v — достаточно гладкая функция, а $\bar{\omega}_h$ — равномерная сетка, то все рассмотренные выше разностные операторы имеют один и тот же порядок аппроксимации в любой из норм (13), (14).

Иначе обстоит дело в случае неравномерной сетки.

Пусть $\bar{\omega}_h = \{x_i, i = 0, 1, \dots, N, x_0 = 0, x_N = 1\}$ — неравномерная сетка с шагами $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, N$, на отрезке $0 \leq x \leq 1$. Рассмотрим оператор $Lv = v''$. Ему поставим в соответствие разностный оператор

$$L_h v_i = \frac{1}{\bar{h}_i} \left[\frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}} - \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i} \right], \quad (15)$$

где $\bar{h}_i = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1})$, — определенный на трехточечном шаблоне (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) .

Вычислим погрешность аппроксимации $\psi_i = L_h v_i - Lv_i$. Предполагая, что $v(x) \in C^4 [0, 1]$ и пользуясь разложениями

$$v_{i+1} = v_i + h_{i+1}v'_i + \frac{h_{i+1}^2}{2}v''_i + \frac{1}{6}h_{i+1}^3v'''_i + O(h_{i+1}^4),$$

$$v_{i-1} = v_i - h_i v'_i + \frac{1}{2}h_i^2 v''_i - \frac{1}{6}h_i^3 v'''_i + O(h_i^4),$$

¹⁾ Каждой сеточной функции y ставится в соответствие некоторое неотрицательное число $\|y\|$, называемое нормой и представляющее собой аналог расстояния от начала координат в обычной геометрии. Норма удовлетворяет требованиям: 1) $\|y\| = 0$ только при $y(x) \equiv 0$; 2) $\|cy\| = |c| \|y\|$, $c = \text{const}$; 3) $\|y+z\| \leq \|y\| + \|z\|$ (неравенство треугольника) (см. Л. В. Канторович и Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959).

находим

$$\psi_i = \frac{h_{i+1} - h_i}{3} v_i''' + O(h_i^2 + h_{i+1}^2).$$

Отсюда видно, что $\|\psi\|_s = O(h_0)$, $h_0 = \max h_i$, если $\|\cdot\|_s$ при $s = 0, 1, 2$, — любая из норм (13), (14). Отсюда следует, что L_h имеет 1-й порядок аппроксимации в нормах $\|\cdot\|_0, \|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$.

Покажем, что при надлежащем выборе нормы, а именно:

$$\|\psi\|_3 = \left[\sum_{i=1}^{N-1} h_i \left(\sum_{k=1}^i \dot{h}_k \Psi_k \right)^2 \right]^{1/2},$$

оператор (15) имеет в этой норме второй порядок аппроксимации:

$$\|\psi\|_3 = \|L_h v - Lv\|_3 = O(h_0^2).$$

Так как $v_i''' = v_{i+1}''' + O(h_{i+1})$, то $(h_{i+1} - h_i)v_i''' = \frac{h_{i+1}^2 - h_i^2}{h_i + h_{i+1}} v_i''' = \frac{1}{2\dot{h}_i} (h_{i+1}^2 v_{i+1}''' - h_i^2 v_i''') + O(h_{i+1}^2)$, и поэтому ψ_i представится в виде

$$\begin{aligned} \psi_i &= \dot{\psi}_i + \psi_i^*, & \psi_i^* &= O(h_i^2 + h_{i+1}^2), \\ \dot{\psi}_i &= \frac{1}{\dot{h}_i} (\eta_{i+1} - \eta_i), & \eta_i &= \frac{1}{6} h_i^2 v_i''' = O(h_i^2). \end{aligned}$$

Вычисляя $\sum_{k=1}^i \dot{h}_k \dot{\psi}_k = \sum_{k=1}^i (\eta_{k+1} - \eta_k) = \eta_{i+1} - \eta_1$ и учитывая, что $|\eta| = O(h_0^2)$, получаем $\|\dot{\psi}\|_3 = O(h_0^2)$ и, следовательно,

$$\|\psi\|_3 \leq \|\dot{\psi}\|_3 + \|\psi^*\|_3 \leq M h_0^2,$$

где $M = \text{const} > 0$ не зависит от сетки, т. е. (15) имеет 2-й порядок аппроксимации в норме $\|\cdot\|_3$ на любой неравномерной сетке $\bar{\omega}_h$. Этот результат сохраняет силу и для норм

$$\|\psi\|_3 = \left[\sum_{i=1}^{N-1} h_i \left(\sum_{k=i}^{N-1} \dot{h}_k \Psi_k \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \|\psi\|_{3*} = \sum_{i=1}^{N-1} h_i \left| \sum_{k=1}^i \dot{h}_k \Psi_k \right|.$$

Отметим, что $\|\psi\|_3 \leq \|\psi\|_s$, $s = 0, 1, 2$.

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями

$$\begin{aligned} v_{\bar{x}, i} &= \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i}, & v_{x, i} &= \frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}}, & v_{\dot{x}, i} &= \frac{v_{i+1} - v_i}{\dot{h}_i}, \\ v_{\bar{x}\dot{x}, i} &= \frac{1}{\dot{h}_i} (v_{x, i} - v_{\bar{x}, i}) = \frac{1}{\dot{h}_i} \left[\frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}} - \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Если сетка ω_h неравномерна, то при аппроксимации оператора (9) используется оператор (15), так что вместо (10) и (12) будем иметь разностные операторы $L_{h\tau}u = u_i - \ddot{y}_{\bar{x}\bar{x}}$, $L_{h\tau}u = u_i - u_{\bar{x}\bar{x}}$. В этом случае вместо (11) получим оценку

$$\max_{\omega_\tau} \|L_{h\tau}u - Lu\|_3 = O(h_0^2 + \tau), \quad (17)$$

где максимум берется по $j = 1, 2, \dots, N_0$.

Сетка $\bar{\omega}_\tau$ также может быть неравномерной с шагом $\tau_j = t_j - t_{j-1}$, $j = 1, 2, \dots, N_0$. При этом $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{i+1} \sim \frac{u^{i+1} - u^i}{\tau_{j+1}} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{i+1} + O(\tau_{j+1})$; тогда в (17) $\tau = \max_{1 \leq j \leq N_0} \tau_j$.

3. Разностная задача. До сих пор мы занимались аппроксимацией простейших дифференциальных операторов разностными операторами. Обычно требуется решить дифференциальное уравнение $Lu = -f$ с некоторыми дополнительными (начальными, краевыми) условиями. Поэтому кроме построения разностного оператора нужно аппроксимировать на сетке правую часть и дополнительные условия, после чего можно поставить разностную задачу, т. е. написать разностные (алгебраические) уравнения и дополнительные условия на сетке.

Закон написания разностных уравнений и дополнительных условий называют разностной схемой.

Рассмотрим несколько примеров постановки разностной задачи.

Пример 1. Задаче Коши для уравнения 1-го порядка

$$u'(x) = f(x), \quad x > 0, \quad u(0) = u_0, \quad (18)$$

на равномерной сетке соответствует разностная краевая задача

$$y_{i+1} - y_i = h\varphi_i, \quad y_0 = u_0 \quad (\varphi_i = f_i^{(h)} = f(x_i)),$$

получаемая при замене оператора u' разностным оператором

$$L_h u = u_{\bar{x}}.$$

Пример 2. Краевой задаче для уравнения 2-го порядка

$$u'' = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad u(0) = \mu_1, \quad u(1) = \mu_2, \quad (19)$$

на равномерной сетке соответствует краевая задача

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = -h^2\varphi_i, \quad y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2 \quad (\varphi_i = f(x_i)),$$

получаемая при замене оператора u'' разностным оператором $u_{\bar{x}\bar{x}}$.

Пример 3. Краевой задаче для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T, \quad (20)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (21)$$

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(1, t) = \mu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (22)$$

на равномерной сетке $\bar{\omega}_{h\tau} = \{x_i = ih, t_j = j\tau (i = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, N_0)\}$ соответствует разностная краевая задача

$$y_i^{j+1} - y_i^j = \gamma(y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j) + \tau\varphi_i^{j+1}, \quad 0 < i < N, \quad j \geq 0$$

$$\left(\gamma = \frac{\tau}{h^2}, \quad \varphi_i^{j+1} = f(x_i, t_j) \right), \quad y_i^0 = u_0(x_i), \quad (23)$$

$$y_0^j = \mu_1(t_j), \quad y_N^j = \mu_2(t_j), \quad (24)$$

получаемая при замене оператора теплопроводности разностным оператором (10). Определим y_i^{j+1} :

$$y_i^{j+1} = (1 - 2\gamma)y_i^j + \gamma(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j) + \tau\varphi_i^{j+1}, \quad (25)$$

где $\gamma = \tau/h^2$.

Если y_i^j известно, то по этой формуле можно определить y_i^{j+1} во всех узлах $i = 1, 2, \dots, N-1$ (на слое $j+1$). Так как при $j=0$ задано начальное условие $y_i^0 = u(x_i)$, то формула (25) позволяет определить от слоя к слою значения y_i^{j+1} во всех узлах сетки $\bar{\omega}_{h\tau}$, используя при этом крайевые условия (24). Схема (23) называется явной.

Пусть $L_{h\tau}$ определяется формулой (12). Тогда уравнение принимает вид

$$y_i = y_{\bar{x}\bar{x}} + \varphi \quad \text{или} \quad \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{y_{i-1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}}{h^2} + \varphi_i^{j+1}. \quad (26)$$

Для определения y_i^{j+1} на новом слое $j+1$ получаем систему алгебраических уравнений

$$\gamma y_{i-1}^{j+1} - (1 + 2\gamma)y_i^{j+1} + \gamma y_{i+1}^{j+1} = -y_i^j - \tau\varphi_i^{j+1}, \quad 0 < i < N. \quad (27)$$

Такая схема называется неявной или схемой с опережением.

4. Устойчивость. После того как разностная схема написана, т. е. сформулированы разностное уравнение и все дополнительные условия, возникает прежде всего вопрос о разрешимости полученной алгебраической системы уравнений. Если эта система неразрешима, то такую схему следует признать непригодной.

Пусть разностная задача разрешима. Тогда естественно требовать, чтобы при неограниченном измельчении сетки решение разностной задачи стремилось к решению исходной задачи для дифференциального уравнения (схема сходилась). В этих рассуждениях мы предполагаем, что разностная задача решается точно и решение может быть найдено с любым числом знаков. Практически же все вычисления ведутся с конечным числом знаков и на каждом этапе вычислений допускаются ошибки округления. Если малые ошибки округления, допускаемые на промежуточных этапах вычислительного процесса, при сгущении сетки приводят к большим искажениям решения, то такую схему называют неустойчивой. Она непригодна для практики.

Ошибки вычислений можно рассматривать как возмущение начальных данных или правой части уравнения. Отсюда следует, что от схемы надо требовать, чтобы решение разностной задачи мало менялось при малом изменении входных данных задачи (правой части, краевых и начальных условий) или, иными словами, чтобы решение непрерывно зависело от входных данных при измельчении сетки. Если это требование выполняется, то схема называется устойчивой, в противном случае схема неустойчива. Ниже приводятся примеры неустойчивых и устойчивых схем.

Пример 4. Устойчивая схема. Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$u' = -au, \quad x > 0, \quad u(0) = u_0, \quad a > 0, \quad (28)$$

имеющую решением $u(x) = u_0 e^{-ax}$ и заменим ее разностной схемой

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h} = -ay_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad y_0 = u_0.$$

Из разностных уравнений получаем $y_i(1 + ah) = y_{i-1}$ или $y_i = s y_{i-1} = s^i y_0$, где $s = \frac{1}{1 + ah} < 1$. Преобразуем выражение для s :

$$\ln s = -\ln(1 + ah) = -ah + O(h^2) = -h(a + O(h)),$$

или

$$s = e^{-h(a + O(h))}.$$

Рассмотрим какую-либо точку \bar{x} . Для простоты будем предполагать, что эта точка является узлом последовательности сеток $\bar{\omega}_h$ при $h \rightarrow 0$. Номера i , соответствующие этой точке для сетки $\bar{\omega}_h$, равны $i = \bar{x}/h$. Очевидно, что

$$y_i = s^i y_0 = y_0 e^{-h(a + O(h)) \frac{\bar{x}}{h}} = y_0 e^{-a\bar{x} + O(h)} = y_0 [e^{-a\bar{x}} + O(h)],$$

что и доказывает сходимость разностной схемы.

Отсюда видно, что при малом изменении начального значения y_0 решение y_i разностной задачи также меняется мало (непрерывно зависит от y_0).

Пример 5. Неустойчивая схема. Рассмотрим ту же задачу (28), что и в примере 4:

$$u' = -au, \quad x > 0, \quad u(0) = u_0.$$

Аппроксимируем уравнение $u' = -au$ разностной схемой

$$\sigma \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + (1 - \sigma) \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + \alpha y_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (29)$$

где σ — произвольный параметр, не равный единице, $\sigma \neq 1$.

Так как схема трехточечная, то начальные значения надо задавать не только в точке $x = 0$, но и в точке $x_1 = h$: $y_0 = u_0$, $y_1 = \bar{u}_0$. Из (29) следует

$$(\sigma - 1)y_{i+1} - [(2\sigma - 1) + ah]y_i + \sigma y_{i-1} = 0. \quad (30)$$

Будем искать частные решения этого уравнения в виде $y_i = s^i$. Для s из (30) получим квадратное уравнение

$$(\sigma - 1)s^2 - (2\sigma - 1 + ah)s + \sigma = 0, \quad (31)$$

дискриминант которого равен

$$\Delta = (2\sigma - 1 + ah)^2 - 4\sigma(\sigma - 1) = 1 + 2(2\sigma - 1)ah + \alpha^2 h^2,$$

так что $\sqrt{\Delta} = 1 + (2\sigma - 1)ah + O(h^2)$. Отсюда находим для корней s_1 и s_2 уравнения (31):

$$s_1 = \frac{\sigma}{\sigma - 1} (1 + ah + O(h^2)), \quad s_2 = 1 - ah + O(h^2).$$

Общее решение уравнения (30) имеет вид

$$y_i = As_1^i + Bs_2^i, \quad (32)$$

где постоянные A и B определяются из начальных условий при $i = 0$ и $i = 1$. Учитывая, что $\ln(1 \pm ah + O(h^2)) = \pm h(\alpha + \frac{1}{2}ah + O(h))$, находим

$$s_1 = \frac{\sigma}{\sigma - 1} e^{h(\alpha + O(h))}, \quad s_2 = e^{-h(\alpha + O(h))}.$$

Пусть \bar{x} — фиксированная точка, являющаяся узлом сетки ω_h , так что $\bar{x} = ih$. Из (32) следует

$$y_i = A \left(\frac{\sigma}{\sigma - 1} \right)^{\frac{\bar{x}}{h}} e^{\bar{x}(\alpha + O(h))} + B e^{-\bar{x}(\alpha + O(h))}.$$

Отсюда видно, что поведение решения зависит от значения параметра σ . Если $\sigma > 1$, то $\frac{\sigma}{\sigma - 1} > 1$ и первое слагаемое

при любом значении $A \neq 0$ неограниченно возрастает при $h \rightarrow 0$.

Коэффициент A зависит от y_0, y_1 . Если при некотором выборе начальных значений $A = 0$, то при сколь угодно малом возмущении начальных данных, хотя бы за счет ошибки округления, мы получим $A \neq 0$ и соответствующее решение будет неограниченно возрастать при $h \rightarrow 0$.

Таким образом, при $\sigma > 1$ схема (29) неустойчива и непригодна для вычислений¹⁾.

Приведенные выше примеры показывают, что если схема устойчива, то малые изменения начальных данных или правой части уравнения приводят к малым изменениям решения разностной задачи; если же схема неустойчива, то малые изменения начальных данных и правой части могут приводить на достаточно мелкой сетке к сколь угодно большим изменениям решения. Поэтому неустойчивая схема расходится.

Пусть ищется решение y^h некоторой разностной задачи с шагом h на сетке ω_h , удовлетворяющее разностному уравнению с заданной правой частью φ и дополнительными соотношениями (например, начальным, краевым условиями), заданными в граничных узлах сетки. Правую часть уравнения и известные функции, содержащиеся в дополнительных условиях, называют входными данными. Решение разностной задачи зависит от входных данных и от параметра h — шага сетки. Меняя h , мы получаем последовательность $\{y^h\}$ решений разностной задачи.

Говорят, что разностная задача поставлена корректно (разностная схема корректна), если ее решение y^h при любом достаточно малом $h \leq h_0$:

- 1) существует для произвольных входных данных;
- 2) непрерывно зависит от входных данных, причем эта зависимость равномерна относительно шага h .

Свойство непрерывной зависимости решения разностной задачи от входных данных называется также устойчивостью разностной задачи (схемы).

Решение разностной задачи y^h рассматривается не при одном фиксированном значении h , а при любых $h \leq h_0$, т. е. на любых последовательностях достаточно мелких сеток. Равномерная по h непрерывная зависимость y^h от входных данных означает, что свойство непрерывной зависимости сохраняется при $h \rightarrow 0$. Иными словами, если решение оценивать по норме $\|\cdot\|_{(1)}$, а входные данные, например, правую часть φ по норме $\|\cdot\|_{(2)}$, то устойчивость (равномерная по h) схемы по правой части означает существование такой постоянной $M > 0$, не

¹⁾ При $\sigma = 0,5$ схема (29) также неустойчива.

зависящей от h , что

$$\|y^h\|_{(1)} \leq M \| \varphi \|_{(2)} \quad \text{при любых } h \leq h_0.$$

Данное выше определение корректности разностной схемы аналогично определению корректности задачи для дифференциального уравнения, с которым мы неоднократно встречались в курсе. Различие между этими определениями состоит в требовании равномерной по h устойчивости решения разностной задачи.

§ 2. Разностные схемы для уравнения теплопроводности

1. Схемы для уравнения с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения теплопроводности:

найти непрерывную в прямоугольнике \bar{D} ($0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq T$) функцию $u = u(x, t)$, удовлетворяющую условиям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & 0 < x < 1, & \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & u(0, t) &= u_1(t), & \quad u(1, t) = u_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Введем в \bar{D} описанную в § 1 сетку $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i = ih, t_j = j\tau), i = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, N_0\}$ с шагами $h = 1/N$, $\tau = T/N_0$. Проводя замену

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i \sim (u_{\bar{x}\bar{x}})_i = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^{j+1} \sim \frac{u^{j+1} - u^j}{\tau} = u_i^{j+1}, \quad f \sim \varphi$$

и вводя произвольный вещественный параметр σ (вес верхнего слоя $t = t_{j+1}$), получим однопараметрическое семейство схем

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda (\sigma y_i^{j+1} + (1 - \sigma) y_i^j) + \varphi_i^{j+1}, \quad (2)$$

$$j = 1, 2, \dots, N_0, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1,$$

где $\Lambda y_h = y_{\bar{x}\bar{x}, i}$.

Схема (2) определена на шеститочечном шаблоне, состоящем из узлов (x_{i+s}, t_{j+k}) ($s = -1, 0, 1; k = 0, 1$), расположенных на двух слоях $t = t_j$ и $t = t_{j+1}$ (рис. §5, а). Поэтому схему (2) часто называют двухслойной шеститочечной схемой или схемой с весами.

Поскольку в (2) входит произвольный параметр σ , то фактически мы рассматриваем не одну схему, а однопараметрическое