зависящей от h, что

$$\| y^h \|_{(1)} \leqslant M \| \varphi \|_{(2)} \quad \text{при любых} \quad h \leqslant h_0.$$

Данное выше определение корректности разностной схемы аналогично определению корректности задачи для дифференциального уравнения, с которым мы неоднократно встречались в курсе. Различие между этими определениями состоит в требовании равномерной по h устойчивости решения разностной задачи.

§ 2. Разностные схемы для уравнения теплопроводности

1. Схемы для уравнения с постоянными коэффициентами. Рассмотрим первую краевую задачу для уравнения теплопроводности:

найти непрерывную в прямоугольнике $\overline{Д}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$ *функцию* $u = u(x, t)$, *удовлетворяющую условиям:*

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \qquad 0 < x < 1, \qquad 0 < t \leqslant T, \\ &u(x, 0) = u_0(x), \qquad u(0, t) = u_1(t), \qquad u(1, t) = u_2(t). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Введем в $\overline{Д}$ описанную в § 1 сетку $\bar\omega_{h\tau} = \bar\omega_h \times \bar\omega_\tau = \{(x_i = ih,\ t_j = j\tau),\ i = 0, 1, \ldots, N,\ j = 0, 1, \ldots, N_0\}$ с шагами $h = 1/N$, $\tau = T/N_0$. Проводя замену

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i \sim (u_{\bar x x})_i = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+1} \sim \frac{u^{j+1} - u^j}{\tau} = u_{\bar t}^{j+1}, \qquad f \sim \varphi$$

и вводя произвольный вещественный параметр σ (вес верхнего слоя $t = t_{j+1}$), получим однопараметрическое семейство схем

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda\left(\sigma y_i^{j+1} + (1 - \sigma) y_i^j\right) + \varphi_i^{j+1}, \tag{2}$$

$$j = 1, 2, \ldots, N_0, \quad i = 1, 2, \ldots, N - 1,$$

где $\Lambda y_h = y_{\bar x x,\, i}$.

Схема (2) определена на шеститочечном шаблоне, состоящем из узлов (x_{i+s}, t_{j+k}) $(s = -1, 0, 1;\ k = 0, 1)$, расположенных на двух слоях $t = t_j$ и $t = t_{j+1}$ (рис. 85, *а*). Поэтому схему (2) часто называют двухслойной шеститочечной схемой или схемой с весами.

Поскольку в (2) входит произвольный параметр σ, то фактически мы рассматриваем не одну схему, а однопараметрическое семейство схем. В дальнейшем будет показано, что с помощью параметра σ можно управлять устойчивостью и точностью схемы (2). Так как схема (2) пишется одинаково во всех внутренних (при $1 < i < N$, $j > 0$) узлах (x_i, t_j) сетки $\omega_{h\tau}$, то индексы i, j можно опустить и пользоваться безындексными обозначениями, полагая

$$y = y_i^{j+1}, \qquad \check{y} = y_i^j, \qquad y_{\bar{t}} = \frac{y - \check{y}}{\tau}, \qquad \varphi = \varphi_i^{j+1}.$$

В этих обозначениях схему (2) перепишем в виде

$$y_{\bar{t}} = \Lambda(\sigma y + (1 - \sigma)\check{y}) + \varphi, \qquad (x, t) \in \omega_{h\tau}. \tag{3}$$

Присоединяя сюда начальные и краевые условия

$$y(x, 0) = u_0(x), \qquad x \in \bar{\omega}_h,$$

$$y(0, t) = u_1(t), \qquad y(1, t) = u_2(t), \qquad t \in \bar{\omega}_\tau, \tag{4}$$

получаем разностную задачу (3)—(4), соответствующую задаче (1). Требуется найти сеточную функцию $y(x, t)$, определенную для $(x, t) \in \bar{\omega}_{h\tau}$ и удовлетворяющую уравнению (3) во внутренних узлах $\omega_{h\tau} = \{(x_i, t_j),\ 0 < i < N,\ 0 < j \leqslant N_0\}$, а в граничных узлах $\gamma_{h\tau} = \{(x_i, t_j),\ i = 0,\ 0 \leqslant j \leqslant N_0;\ i = N,\ 0 \leqslant j \leqslant N_0;\ j = 0,\ 0 \leqslant i \leqslant N\}$ сетки $\bar{\omega}_{h\tau}$ — условиям (4).

Для определения $y = y^{j+1}$ из (3) и (4) получаем задачу

$$\sigma\gamma y_{i-1} - (1 + 2\sigma\gamma) y_i + \sigma\gamma y_{i+1} = -F_i, \qquad 0 < i < N,$$

$$y_0 = u_1, \qquad y_N = u_2,$$

$$F_i = (1 - 2\gamma(1 - \sigma))\check{y}_i + (1 - \sigma)\gamma(\check{y}_{i-1} + \check{y}_{i+1}) + \tau\varphi_i, \qquad \gamma = \frac{\tau}{h^2}.$$

Значения $\check{y} = y_i^j$ и, следовательно, F_i на нижнем слое (при $t = t_j$) известны. Счет идет от слоя j к слою $j + 1$, начиная с $j = 0$, при котором задано $y^0 = u_0(x)$.

При $\sigma = 0$ получаем явную схему (см. § 1, п. 2). Для нее $y_i = F_i$, т. е. значения y определяются независимо в каждом узле сетки ω_h. При $\sigma \neq 0$ для определения y получаем систему алгебраических уравнений порядка $N - 1$ (такие схемы называются неявными). Метод решения этой системы, учитывающий специальный вид (трехдиагональность ее матрицы, у которой отличны от нуля только элементы, стоящие вдоль главной диагонали и двух соседних с нею диагоналей), указан в п. 10.

2. Погрешность аппроксимации. Пусть $y = y(x, t)$ — решение задачи (3) — (4), $u = u(x, t)$ — решение исходной задачи (1). Рассмотрим разность $z_i^{j+1} = y_i^{j+1} - u(x_i, t_{j+1})$ или $z = y - u$ и подставим $y = z + u$ в уравнение (3). Предполагая $u =$

$= u(x, t)$ заданной функцией, найдем

$$\left.\begin{aligned} z_{\bar t} &= \Lambda(\sigma z + (1-\sigma)\check z) + \psi, \qquad (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ z(x, 0) &= 0, \qquad z(0, t) = z(1, t) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где

$$\psi = \Lambda(\sigma u + (1-\sigma)\check u) + \varphi - u_{\bar t} \tag{6}$$

представляет собой погрешность, с которой решение $u = u(x, t)$ уравнения (1) удовлетворяет разностному уравнению (3). Сеточная функция $\psi = \psi(x, t, u;\ h, \tau, \sigma)$, определяемая формулой (6), называется погрешностью аппроксимации дифференциального уравнения (1) разностным уравнением (3) в классе решений $u = u(x, t)$ уравнения (1) (или «погрешностью аппроксимации для схемы (3) на решении уравнения (1)»).

Для оценки величины функции ψ мы будем пользоваться различными нормами (при фиксированном $t \in \omega_\tau$), например:

$$\|\psi\|_c = \max_{1<i<N} |\psi_i|, \tag{7}$$

$$\|\psi\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{N-1} h\psi_i^2\right)^{1/2}, \tag{8}$$

а также нормами

$$\max_{\omega_\tau} \|\psi\|_c, \qquad \max_{\omega_\tau} \|\psi\|_2 \quad \text{и т. д.} \tag{9}$$

Будем говорить, что схема (3) имеет по норме $\|\psi\|$ m-й порядок аппроксимации по h и n-й по τ на решении $u = u(x, t)$ (аппроксимирует уравнение (1) с порядком (m, n)) или просто имеет аппроксимацию $O(h^m) + O(\tau^n)$, если

$$\|\psi\| \leqslant M(h^m + \tau^n) \qquad (m > 0,\ n > 0), \tag{10}$$

где M — положительная постоянная, не зависящая от h и τ, а $\|\cdot\|$ — некоторая норма (например, (7) или (8)).

Для оценки порядка ψ по h и τ разложим $u = u(x, t)$ в окрестности точки $(x_i,\ \bar t = t_{j+1/2} = t_j + 0{,}5\tau)$ по степеням h и τ. Будем предполагать, что $u(x, t)$ имеет нужное по ходу изложения число производных. Обозначая $\dot u = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u' = \frac{\partial u}{\partial x}$ и т. д., $u = u(x_i, t_{j+1})$,

$\bar u = u(x_i, t_{j+1/2})$, получим $\Lambda u = u'' + \frac{h^2}{12} u^{(IV)} + \ldots$ (см. § 1, п. 1),

$$u = \bar u + 0{,}5\tau\bar{\dot u} + \frac{\tau^2}{8}\bar{\ddot u} + O(\tau^3), \qquad \check u = \bar u - 0{,}5\tau\bar{\dot u} + \frac{\tau^2}{8}\bar{\ddot u} + O(\tau^3),$$

$$u_{\bar t} = \bar{\dot u} + O(\tau^2).$$

Пользуясь разложениями для u, $\check{u}$, Λu, находим

$$\sigma u + (1-\sigma)\check{u} = \bar{u} + (\sigma - 0{,}5)\tau\bar{\dot{u}} + O(\tau^2)$$

$$\Lambda(\sigma u + (1-\sigma)\check{u}) = \sigma u'' + (1-\sigma)\check{u}'' + O(h^2) =$$
$$= \bar{u}'' + (\sigma - 0{,}5)\tau\bar{\dot{u}}'' + O(h^2+\tau^2).$$

Подставляя полученные выражения в (6), будем иметь

$$\psi = \bar{u}'' - \bar{\dot{u}} + (\sigma - 0{,}5)\tau\bar{\dot{u}}'' + \varphi + O(h^2+\tau^2).$$

Так как u есть решение уравнения (1), то $\bar{u}'' - \bar{\dot{u}} = -\bar{f}$ и

$$\psi = \varphi - \bar{f} + (\sigma - 0{,}5)\tau\dot{u}'' + O(h^2+\tau^2)\,^{1)}.$$

Выбирая φ так, чтобы $\varphi = \bar{f} + O(h^2+\tau^2)$, например $\varphi = \bar{f}$, если $f \in C^{(0)}$, получаем

$$\psi = (\sigma - 0{,}5)\tau\dot{u}'' + O(h^2+\tau^2). \tag{11}$$

Обозначим через $C_n^m(\bar{Д})$ класс функций, имеющих m производных по x и n производных по t, непрерывных в $\bar{Д}$. Из предыдущего ясно, что

$$\|\psi\|_C = O(h^2+\tau) \quad \text{при} \quad \sigma \neq 0{,}5 \quad \text{и} \quad u \in C_2^{(4)}, \tag{12}$$

$$\|\psi\|_C = O(h^2+\tau^2) \quad \text{при} \quad \sigma = 0{,}5 \quad \text{и} \quad u \in C_3^{(4)}. \tag{13}$$

Выбирая параметр σ равным

$$\sigma = \sigma_* = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau} \tag{14}$$

и правую часть

$$\varphi = \bar{f} + \frac{h^2}{12}\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}, \tag{15}$$

получим схему повышенного порядка аппроксимации $\psi = O(h^4+\tau^2)$, если $u \in C_3^{(6)}$, $f \in C_1^{(2)}$ [2]).

3. Энергетическое тождество. Чтобы выяснить, при каких значениях σ схема (2) устойчива по начальным данным и по правой части, найдем оценку решения разностной задачи (3) — (4) с однородными краевыми условиями ($u_1 = u_2 \equiv 0$) через φ и u_0.

Для этого используем метод интегральных или энергетических соотношений, который без существенных изменений переносится на случай уравнений с переменными коэффициентами. Нам

---

[1]) Так как $\bar{u}'' + \bar{f} - \bar{\dot{u}} = 0$, то (6) можно было бы сразу записать в виде $\psi = [\Lambda(\sigma u + (1-\sigma)\check{u}) - \bar{u}''] + (\varphi - \bar{f}) - (u_{\bar{t}} - \bar{\dot{u}})$.

[2]) К пп. 1, 2 см. В. К. Саульев, Интегрирование параболических уравнений методом сеток, Физматгиз, 1960.

понадобится небольшое число предварительных сведений. Пусть $v(x) = v_i$, $z(x) = z_i$ — произвольные функции, заданные на сетке $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih\}$.

Имеют место следующие формулы:

1. *Формула разностного дифференцирования произведения*

$$(vz)_{x,i} = v_i z_{x,i} + v_{x,i} z_{i+1}. \tag{16}$$

В самом деле, $v_i z_{x,i} + v_{x,i} z_{i+1} = [v_i(z_{i+1} - z_i) + (v_{i+1} - v_i) z_{i+1}]/h = (v_{i+1} z_{i+1} - v_i z_i)/h = (vz)_{x,i}$. Формула (16) является разностным аналогом формулы дифференцирования произведения $(uv)' = u'v + uv'$.

2. *Формула суммирования по частям*

$$(v,\ z_x) = -(z,\ v_{\bar{x}}] + (vz)_N - v_0 z_1, \tag{17}$$

где

$$(v,\ w) = \sum_{i=1}^{N-1} v_i w_i h, \qquad (v,\ w] = \sum_{i=1}^{N} v_i w_i h, \tag{18}$$

являющаяся разностным аналогом формулы интегрирования по частям.

Выразим из (16) $v_i z_{x,i} = (vz)_{x,i} - v_{x,i} z_{i+1}$ и преобразуем сумму

$$(v,\ z_x) = \sum_{i=1}^{N-1} v_i z_{x,i} h = \sum_{i=1}^{N-1} [(vz)_{i+1} - (vz)_i] - \sum_{i=1}^{N-1} v_{x,i} z_{i+1} h =$$
$$= (vz)_N - v_1 z_1 - \sum_{i=2}^{N} v_{\bar{x},i} z_i h \qquad (v_{x,i} = v_{\bar{x},i+1}).$$

Учитывая затем, что $v_1 = v_0 + (v_1 - v_0) = v_0 + h v_{\bar{x},1}$, получим

$$(v, z_x) = (vz)_N - (v_0 + h v_{\bar{x},1}) z_1 - \sum_{i=2}^{N} z_i v_{\bar{x},i} h = (vz)_N - v_0 z_1 - (z, v_{\bar{x}}].$$

3. *Первая разностная формула Грина*

$$(v,\ (a y_{\bar{x}})_x) = -(a y_{\bar{x}},\ v_{\bar{x}}] + a y_{\bar{x}} v\,\big|_N - v_0 a_1 y_{\bar{x}}\,\big|_1. \tag{19}$$

В самом деле, полагая в (17) $z = a y_{\bar{x}}$, сразу получим (19). Из (19), в частности, следует, что

$$(v,\ (a y_{\bar{x}})_x) = -(a y_{\bar{x}},\ v_{\bar{x}}], \quad \text{если} \quad y = v = 0 \quad \text{при} \quad i = 0,\ N; \tag{20}$$

$$(y,\ (a y_{\bar{x}})_x) = -(a,\ (y_{\bar{x}})^2], \quad \text{если} \quad y_0 = y_N = 0. \tag{21}$$

Формула (19) является разностным аналогом формулы Грина

$$\int_0^1 u\,(kw')'\,dx = kuw'\Big|_0^1 - \int_0^1 ku'w'\,dx.$$

4. *Вторая разностная формула Грина*

$$(v, (ay_{\bar{x}})_x) - (y, (av_{\bar{x}})_x) = a_N (vy_{\bar{x}} - yv_{\bar{x}})_N - a_1 (vy_x - yv_x)_0 \tag{22}$$

получается из (19), если в (19) поменять местами y и v и вычесть из (19) полученное равенство.

Нам понадобится также неравенство

$$|(y, z)^i| \leqslant \sqrt{(y, y)^i (z, z)^i}, \tag{23}$$

где

$$(y, z)^i = \sum_{k=1}^{i} y_k z_k h, \qquad i = 2, 3, \ldots, N. \tag{24}$$

Рассмотрим сумму

$$(y + \lambda z, y + \lambda z)^i = (y, y)^i + 2\lambda (y, z)^i + \lambda^2 (z, z)^i \geqslant 0,$$

где λ — любое вещественное число.

Если $(z, z)^i \neq 0$, то $(y + \lambda z, y + \lambda z)^i \geqslant 0$ при любых значениях λ только при условии, что дискриминант квадратного трехчлена $[(y, z)^i]^2 - (y, y)^i \cdot (z, z)^i \leqslant 0$. Отсюда и следует (23). В частности, при $i = N$ получаем неравенство Коши — Буняковского

$$|(y, z)| \leqslant \|y\| \cdot \|z\|, \tag{25}$$

где (,) дается формулой (18), а $\|y\|$ — норма сеточной функции $y = y_i$, равная

$$\|y\| = \sqrt{(y, y)} = \left(\sum_{i=1}^{N-1} y_i^2 h\right)^{1/2}. \tag{26}$$

Докажем следующие неравенства:

$$\|z\| \leqslant \frac{1}{2} \|z_{\bar{x}}], \quad \text{если} \quad z_0 = z_N = 0, \tag{27}$$

$$\|z\|_c \leqslant \frac{1}{2} \|z_{\bar{x}}], \quad \text{если} \quad z_0 = z_N = 0, \tag{28}$$

где $\|z\|_c = \max\limits_{0<i<N} |z_i|$, $\|z\|$ дается формулой (26), а

$$\|z_{\bar{x}}] = (z_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}]^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{N} z_{\bar{x}, i}^2 h\right)^{1/2}.$$

Замечая, что $z_i^2 = \left(\sum\limits_{k=1}^{i} z_{\bar{x}, k} h\right)^2 = \left(\sum\limits_{k=i+1}^{N} z_{\bar{x}, k} h\right)^2$, представим z_i^2) в виде

$$z_i^2 = (1 - x_i) \left(\sum_{k=1}^{i} z_{\bar{x}, k} h\right)^2 + x_i \left(\sum_{k=i+1}^{N} z_{\bar{x}, k} h\right)^2.$$

Применяя неравенство (23) для каждой из сумм, например:

$$\left(\sum_{k=1}^{i} z_{\bar{x},k}h\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{i} (z_{\bar{x},k})^2 h \cdot \sum_{k=1}^{i} 1^2 h = x_i \sum_{k=1}^{i} (z_{\bar{x},k})^2 h,$$

получим:

$$z_i^2 \leqslant x_i(1-x_i)\left(\sum_{k=1}^{i} (z_{\bar{x},k})^2 h + \sum_{k=i+1}^{N} (z_{\bar{x},k})^2 h\right) = x_i(1-x_i)\| z_{\bar{x}}]|^2. \tag{29}$$

Так как $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} x(1-x) = \frac{1}{4}$, то отсюда следует, что $\| z \|_c \leqslant \leqslant \frac{1}{2} \| z_{\bar{x}}]|$.

Умножив (29) на h и просуммировав по $i = 1, 2, \ldots, N-1$, будем иметь $\| z \|^2 \leqslant \frac{1}{4} \| z_{\bar{x}}]|^2$ или $\| z \| \leqslant \frac{1}{2} \| z_{\bar{x}}]|$, так как $\sum\limits_{i=1}^{N-1} ih = (N-1)h < 1$.

Пусть $\Lambda v = (av_{\bar{x}})_x$, $a \geqslant c_1 > 0$. Из (21) и (27) следует оценка

$$-(\Lambda v, v) = -((av_{\bar{x}})_x, v) \geqslant 4c_1 \| v \|^2. \tag{30}$$

В самом деле, $-(\Lambda v, v) = (a, (v_{\bar{x}})^2] \geqslant c_1 \| v_{\bar{x}}]|^2$ в силу (21). Пользуясь затем неравенством (27), получим (30).

Укажем еще одно неравенство:

$$2|ab| \leqslant c_0 a^2 + \frac{1}{c_0} b^2, \tag{31}$$

где a и b — заданные числа, c_0 — произвольное положительное число. В самом деле,

$$2|ab| = 2\left|\left(a\sqrt{c_0}\right)\left(\frac{b}{\sqrt{c_0}}\right)\right| \leqslant (a\sqrt{c_0})^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{c_0}}\right)^2,$$

так как $2|a_1 b_1| \leqslant a_1^2 + b_1^2$ при любых a_1 и b_1.

Перейдем теперь к изучению вопроса об устойчивости схемы (3) по начальным данным и по правой части.

Напишем энергетическое тождество, соответствующее уравнению с однородными граничными условиями:

$$z_{\bar{t}} = \Lambda z^{(\sigma)} + \psi, \quad z_0 = z_N = 0, \quad z(x, 0) = z_0(x), \tag{32}$$

где

$$z^{(\sigma)} = \sigma z + (1-\sigma)\check{z}.$$

Умножим уравнение на $2\tau z_{\bar{t},i} h = 2(z_i - \check{z}_i)h$ и просуммируем по $i = 1, 2, \ldots, N-1$:

$$2\tau \| z_{\bar{t}} \|^2 = 2\tau(\Lambda z^{(\sigma)}, z_{\bar{t}}) + 2\tau(\psi, z_{\bar{t}}), \quad \Lambda z = z_{\bar{x}x}. \tag{33}$$

Представляя $z^{(\sigma)}$ в виде

$$z^{(\sigma)} = 0{,}5(z + \check{z}) + (\sigma - 0{,}5)(z - \check{z}) = 0{,}5(z + \check{z}) + (\sigma - 0{,}5)\tau z_{\bar{t}}$$

и пользуясь первой формулой Грина (20) для $a = 1$, $y = \tau z_{\bar{t}} = z - \check{z}$, $v = z + \check{z}$ и $a = 1$, $y = v = z_{\bar{t}}$, имеем[1])

$$2\tau\left(\Lambda z^{(\sigma)}, z_{\bar{t}}\right) = -2(\sigma - 0{,}5)\tau^2\left(z_{\bar{x}\bar{t}}, z_{\bar{x}\bar{t}}\right] - \left(z_{\bar{x}} + \check{z}_{\bar{x}}, z_{\bar{x}} - \check{z}_{\bar{x}}\right] = -2(\sigma - 0{,}5)\tau^2 \| z_{\bar{x}\bar{t}}]|^2 - \| z_{\bar{x}}]|^2 + \| \check{z}_{\bar{x}}]|^2.$$

Подставив это выражение в (33), получим энергетическое тождество:

$$2\tau\left[\| z_{\bar{t}} \|^2 + (\sigma - 0{,}5)\tau \| z_{\bar{x}\bar{t}}]|^2\right] + \| z_{\bar{x}}]|^2 = \| \check{z}_{\bar{x}}]|^2 + 2\tau\left(\psi, z_{\bar{t}}\right). \tag{34}$$

Отметим, что имеет место следующее неравенство:

$$\| v_{\bar{x}}]|^2 \leqslant \frac{4}{h^2} \| v \|^2, \quad \text{если} \quad v_0 = v_N = 0. \tag{35}$$

В самом деле, суммируя неравенство

$$v_{\bar{x},i}^2 = \frac{1}{h^2}\left(v_i - v_{i-1}\right)^2 \leqslant \frac{2}{h^2}\left(v_i^2 + v_{i-1}^2\right)$$

по $i = 1, 2, \ldots, N$, приходим к (35).

4. Устойчивость. Как было указано в § 1, п. 4, устойчивость схемы означает непрерывную зависимость решения разностной задачи от входных данных (от начальных данных, от правой части и от краевых условий в данном случае).

Выясним, при каких значениях параметра σ схема (3) устойчива по начальным данным и по правой части. Для этого рассмотрим задачу (32) с однородными краевыми условиями. Уточним понятие устойчивости.

Пусть решение задачи (32) оценивается по норме $\| z \|_{(1)}$ (например, $\| z \|_{(1)} = \| z \|_c$, $\| z \|_{(1)} = \| z_{\bar{x}}]|$), а правая часть ψ — по норме $\| \psi \|_{(2)}$ (например, $\| \psi \|_{(2)} = \| \psi \|_c$, $\| \psi \|_{(2)} = \| \psi \|_2$).

Будем говорить, что *схема* (32) (*или* (3) — (4)) *устойчива по начальным данным и по правой части, если при достаточно малых* $h \leqslant h_0$ и $\tau \leqslant \tau_0$ *имеет место неравенство*

$$\max_{t \in \bar{\omega}_\tau} \| z(x, t) \|_{(1)} \leqslant M_1 \| z(x, 0) \|_{(1)} + M_2 \max_{t \in \bar{\omega}_\tau} \| \psi(x, t) \|_{(2)}, \tag{36}$$

где M_1, M_2 *— положительные постоянные, не зависящие от* h *и* τ.

---

[1]) $(\Lambda(z + \check{z}), z - \check{z}) = -\left(z_{\bar{x}} + \check{z}_{\bar{x}}, z_{\bar{x}} - \check{z}_{\bar{x}}\right]$, $\left(\Lambda z_{\bar{t}}, z_{\bar{t}}\right) = -\left(z_{\bar{x}\bar{t}}, z_{\bar{x}\bar{t}}\right]$.

Для устойчивости схемы (32) достаточно, чтобы выполнялось одно из условий

$$\|z\|_{(1)} \leqslant (1 + c_1\tau)\|\check{z}\|_{(1)} + c_2\tau\|\psi\|_{(2)}, \tag{37}$$

или

$$\|z\|^2_{(1)} \leqslant (1 + c_1\tau)\|\check{z}\|^2_{(1)} + c_2\tau\|\psi\|^2_{(2)}, \tag{38}$$

где c_1, c_2 — положительные постоянные, не зависящие от h и τ.

В самом деле, пусть выполнено условие (37). Запишем его в виде

$$\|z^j\|_{(1)} \leqslant (1 + c_1\tau)\|z^{j-1}\|_{(1)} + c_2\tau\|\psi^j\|_{(2)}, \tag{39}$$
$$j = 1, 2, \ldots$$

Исключая из (39) последовательно $\|z^{j-1}\|_{(1)}$, $\|z^{j-2}\|_{(2)}, \ldots$ и учитывая, что $(1 + c_1\tau)^{j'} \leqslant e^{c_1 t_j}$ при $j' \leqslant j$, получим

$$\|z^j\|_{(1)} \leqslant e^{c_1 t_j}\left[\|z(x, 0)\|_{(1)} + c_2 \sum_{j'=1}^{j} \tau\|\psi^{j'}\|_{(2)}\right]. \tag{40}$$

Отсюда следует (36) при $M_1 = e^{c_1 T}$, $M_2 = c_2 M_1 T$. Предполагая, что выполнено (38), аналогичными рассуждениями приходим к неравенству вида (40), в котором следует заменить $\|\cdot\|$ выражениями $\|\cdot\|^2$. В результате снова получим (36) с $M_1 = e^{\frac{1}{2}c_1 T}$, $M_2 = \sqrt{c_2}\, M_1$.

Пользуясь тождеством (34) для схемы (32), мы установим неравенство вида (36), из которого и будет следовать, в силу сказанного выше, устойчивость схемы (3).

Чтобы выяснить вопрос об устойчивости по начальным данным, рассмотрим задачу (32) при $\psi = 0$ и положим $\|z\|_{(1)} = \|z_{\bar{x}}]|$.

Тождество (34) при $\psi = 0$ имеет вид

$$2\tau\left[\|z_{\bar{t}}\|^2 + (\sigma - 0{,}5)\tau\|z_{\bar{x}\bar{t}}]|^2\right] + \|z_{\bar{x}}]|^2 = \|\check{z}_{\bar{x}}]|^2. \tag{41}$$

Пусть $\sigma \geqslant 0{,}5$. Тогда выражение в квадратных скобках неотрицательно и

$$\|z_{\bar{x}}]|^2 \leqslant \|\check{z}_{\bar{x}}]|^2 \quad \text{или} \quad \|z^j_{\bar{x}}]| \leqslant \|z^{j-1}_{\bar{x}}]| \leqslant \|z^0_{\bar{x}}]|.$$

Отсюда, в силу начального условия $z^0 = z_0(x)$ следует, что

$$\|z^j\|_{(1)} \leqslant \|z_0\|_{(1)}, \quad \text{где} \quad \|z\|_{(1)} = \|z_{\bar{x}}]|. \tag{42}$$

Пусть $\sigma < 0{,}5$, так что $\sigma - 0{,}5 < 0$. Обозначая $z_{\bar{t}} = v$ и пользуясь (35), найдем

$$\|v\|^2 + (\sigma - 0{,}5)\tau\|v_{\bar{x}}]|^2 \geqslant \|v\|^2 - (0{,}5 - \sigma)\tau \cdot \frac{4}{h^2}\|v\|^2 =$$
$$= \left(1 - (0{,}5 - \sigma)\tau \cdot \frac{4}{h^2}\right)\|v\|^2 \geqslant 0$$

при

$$1-(0{,}5-\sigma)\tau\cdot\frac{4}{h^2}\geqslant 0,$$

т. е. при $\sigma\geqslant\sigma_0=\frac{1}{2}-\frac{h^2}{4\tau}$. При этом условии выражение в квадратных скобках в (34) неотрицательно, и мы снова приходим к (42).

Таким образом, схема (32) (и схема (3)) устойчива по начальным данным в норме $\|z\|_{(1)}=\|z_{\bar{x}}]|$, если выполнено условие

$$\sigma\geqslant\frac{1}{2}-\frac{h^2}{4\tau}=\sigma_0. \tag{43}$$

Рассмотрим частные случаи. Если $\sigma\geqslant\frac{1}{2}$, то условие (43) всегда выполнено и схема (32) устойчива при любых h и τ.

Для явной схемы $\sigma=0$ и условие (43) дает

$$\gamma=\frac{\tau}{h^2}\leqslant\frac{1}{2}\quad\text{или}\quad\tau\leqslant\frac{1}{2}h^2, \tag{44}$$

т. е. явная схема условно устойчива (устойчива при условии (44), связывающем τ и h). Можно показать, что при $\gamma\geqslant\frac{1}{2}+$ $+c_1\tau^\alpha$, $0\leqslant\alpha<1$, явная схема неустойчива, т. е. условие $\gamma<$ $<\frac{1}{2}+c_1\tau^\alpha$ является необходимым для устойчивости явной схемы ($c_1=\text{const}>0$ — произвольная постоянная, не зависящая от h и τ).

Из (43) видно, что схема повышенного порядка точности $\left(\sigma=\sigma_*=\frac{1}{2}-\frac{h^2}{12\tau}\right)$, безусловно (при любых h и τ) устойчива, так как $\sigma_*\geqslant\sigma_0$.

Перейдем к оценке устойчивости схемы (32) по правой части. Будем исходить из тождества (34). Имеет место теорема:

Разностная схема (32) *устойчива по начальным данным и по правой части при*

$$\sigma\geqslant\frac{1}{2},$$

так что для решения z задачи (32) *верна оценка*

$$\|z_{\bar{x}}^j]|\leqslant\|z_{0\bar{x}}]|+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sum_{j'=1}^{j}\tau\|\psi^{j'}\|^2\right)^{1/2}. \tag{45}$$

Пользуясь неравенствами (26) и (31), имеем

$$2\tau(\psi,\,z_{\bar{t}})\leqslant c_0\tau\|z_{\bar{t}}\|^2+\frac{\tau}{c_0}\|\psi\|^2. \tag{46}$$

Если $\sigma \geqslant 1/2$, то мы получаем из (34) неравенство

$$2\tau \| z_{\bar{t}} \|^2 + \| z_{\bar{x}}]|^2 \leqslant \| \check{z}_{\bar{x}}]|^2 + c_0 \tau \| z_{\bar{t}} \|^2 + \frac{\tau}{c_0} \| \psi \|^2.$$

Выбирая затем $c_0 = 2$, будем иметь

$$\| z_{\bar{x}}]|^2 \leqslant \| \check{z}_{\bar{x}}]|^2 + \frac{1}{2} \tau \| \psi \|^2.$$

Отсюда сразу следует

$$\| z^j_{\bar{x}}]|^2 \leqslant \| z_{0\bar{x}}]|^2 + \frac{1}{2} \sum_{j'=1}^{j} \tau \| \psi^{j'} \|^2.$$

Так как $a^2 + b^2 \leqslant (a + b)^2$ при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то тем самым теорема доказана.

Замечание. Несколько изменяя рассуждения, можно показать, что теорема верна при $\sigma \geqslant \sigma_\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{1-\varepsilon}{4\tau} h^2$, где $0 < \varepsilon \leqslant 1$; в (45) следует вместо $\sqrt{2}$ написать $\sqrt{2\varepsilon}$. Сравнение с (36) показывает, что $\| z \|_{(1)} \leqslant \| z_{\bar{x}}]|$, $\| \psi \|_{(2)} = \| \psi \|$, $M_1 = 1$, $M_2 = \sqrt{\frac{T}{2\varepsilon}}$.

Нетрудно получить оценку (36) с $\| z \|_{(1)} = \| z \|$, $\| \psi \|_{(2)} = \| \psi \|$ при $\sigma \geqslant 1/2$.

Ограничимся доказательством устойчивости по начальным данным. Положим в уравнении (32) $\psi = 0$, умножим его на $2\tau z_i^{(\sigma)} h$ и просуммируем по $i = 1, 2, \ldots, N-1$. Пользуясь формулой Грина (20) и тождеством $2\tau \left(z^{(\sigma)}, z_{\bar{t}} \right) = (z + \check{z},\ z - \check{z}) + 2\tau (\sigma - 0{,}5) \left\| z_{\bar{t}} \right\|^2 = \| z \|^2 - \| \check{z} \|^2 + 2\tau (\sigma - 0{,}5) \times \left\| z_{\bar{t}} \right\|^2$, получим $\| z \|^2 + 2\tau^2 (\sigma - 0{,}5) \left\| z_{\bar{t}} \right\|^2 + 2\tau \left\| z^{(\sigma)}_{\bar{x}}]\right|^2 = \| \check{z} \|^2$. Отсюда при $\sigma \geqslant 0{,}5$ следует $\| z \|^2 \leqslant \| \check{z} \|^2$ и $\| z^j \| \leqslant \| z_0 \|$.

Эта оценка справедлива и при $\sigma \geqslant \sigma_0$. Однако мы не имеем возможности останавливаться на доказательстве этого факта.

Мы доказали устойчивость схемы (32) в нормах $\| z_{\bar{x}}]|$ и $\| z \|$, являющихся разностными аналогами норм $\left(\int\limits_0^1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx \right)^{1/2}$ и $\left(\int\limits_0^1 u^2\, dx \right)^{1/2}$. Пользуясь разностным аналогом принципа максимума, можно убедиться в том, что чисто неявная схема устойчива в равномерной метрике, т. е.

$$\| z \|_c \leqslant \| z_0 \|_c \quad \text{при} \quad \sigma = 1 \quad (\psi = 0). \tag{47}$$

Оказывается, что симметричная шеститочечная схема с $\sigma = 0{,}5$ также равномерно устойчива при любых h и τ

$$\| z \|_c \leqslant M \| z_0 \|_c \quad \text{при} \quad \sigma = 0{,}5. \tag{48}$$

Рассмотрим явную схему ($\sigma=0$). Запишем ее в виде

$$y_i=(1-2\gamma)\check{y}_i+\gamma(\check{y}_{i-1}+\check{y}_{i+1})+\tau\varphi_i.$$

Если $\gamma\leqslant 1/2$, то $|y_i|\leqslant(1-2\gamma)|\check{y}_i|+\gamma(|\check{y}_{i-1}|+|\check{y}_{i+1}|)+\tau|\varphi_i|\leqslant\leqslant\|\check{y}\|_c+\tau\|\varphi\|_c$, так как $1-2\gamma\geqslant 0$. Отсюда следует $\|y\|_c\leqslant\leqslant\|\check{y}\|_c+\tau\|\varphi\|_c$ при $\gamma\leqslant 1/2$ и

$$\|y^j\|_c\leqslant\|y_0\|+\sum_{j'=1}^{j}\tau\|\varphi^{j'}\|_c, \tag{49}$$

где $\|y\|_c=\max\limits_{\bar\omega_h}|y|$. Таким образом, явная схема равномерно устойчива по начальным данным и по правой части, если выполнено условие $\gamma\leqslant 1/2$.

5. Сходимость и точность. Будем говорить, что:

1) решение задачи (3)—(4) сходится к решению $u=u(x,t)$ задачи (1) (схема (3) — (4) сходится) при $h\to 0$ и $\tau\to 0$, если $\max\limits_{0\leqslant t_j\leqslant T}\|y^j-u^j\|_{(1)}\to 0$ при $h\to 0$ и $\tau\to 0$;

2) схема (3) — (4) сходится со скоростью $O(h^m+\tau^n)$, $m>0$, $n>0$, или имеет точность $O(h^m+\tau^n)$ (порядка m по h и порядка n по τ), если при достаточно малых $h\leqslant h_0$ и $\tau\leqslant\tau_0$

$$\max_{0\leqslant t_j\leqslant T}\|y^j-u^j\|_{(1)}\leqslant M(h^m+\tau^n),$$

где $M=\text{const}>0$ не зависит от h и τ.

Характеристикой точности схемы (3) — (4) является $\|z\|_{(1)}=\|y-u\|_{(1)}$, где $\|\cdot\|_{(1)}$ — одна из введенных выше норм. Функция $z=z(x_i,t_{j+1})$ является решением задачи (5). Так как $z(x,0)=0$, то из (45) для z следует оценка

$$\|z^j_{\bar x}]\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sum_{j'=1}^{j}\tau\|\psi^{j'}\|^2\right)^{1/2} \quad\text{при}\quad \sigma\geqslant\frac{1}{2}. \tag{50}$$

Учитывая неравенство (28), получаем

$$\|z^j\|_c\leqslant\frac{\sqrt{T}}{2\sqrt{2}}\max_{\bar\omega_\tau}\|\psi^{j'}\|=M_2\max_{\bar\omega_\tau}\|\psi^{j'}\|. \tag{51}$$

Отсюда следует теорема:

Из устойчивости по правой части и аппроксимации схемы (3) следует ее равномерная сходимость, причем порядок ее точности совпадает с порядком аппроксимации[1]. Иными словами, если схема (3) устойчива по правой части, т. е. $\sigma\geqslant 1/2$, и выполнены условия, при которых схема (3) имеет максимальный порядок аппроксимации на решении $u=u(x,t)$ (см. (12),

[1]) См. В. С. Рябенький, А. Ф. Филиппов, Об устойчивости разностных уравнений, Гостехиздат, 1956.

(13)), то она имеет точность $O(\tau^{m_\sigma}+h^2)$, где $m_\sigma=2$ при $\sigma=0{,}5$, $m_\sigma=1$ при $\sigma\neq 0{,}5$:

$$\|y^j-u^j\|_c\leqslant M(h^2+\tau^{m_\sigma}) \quad \text{при} \quad \sigma\neq\sigma_*, \tag{52}$$

где $M=\text{const}>0$ не зависит от h и τ.

Из п. 2 следует, что оценка (52) имеет место, если $u\in C_2^{(4)}$, $\varphi=f$ при $\sigma\neq 0{,}5$, $u\in C_3^{(4)}$, $\varphi=\bar{f}=f^{j+1/2}$ при $\sigma=0{,}5$.

Из неравенства (49) следует, что для явной схемы $\|y^j-u^j\|_c\leqslant$ $\leqslant M(h^2+\tau)$, если $u\in C_2^{(4)}$.

Замечание. В силу замечания к теореме в п. 4 схема (3) при $\sigma=\frac{1}{2}-\frac{h^2}{12\tau}$ имеет при $u\in C_3^{(6)}$, $f\in C_1^{(2)}$ точность $O(h^4+\tau^2)$, если φ определяется по формуле (15).

6. Разностные схемы для уравнений с переменными коэффициентами. Перейдем теперь к изучению разностных схем для численного решения уравнения теплопроводности (диффузии) с переменными коэффициентами

$$c\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)-qu+f, \quad k>0, \quad c>0, \tag{53}$$

где $c=c(x,t)$, $k=k(x,t)$, $q=q(x,t)$, $f=f(x,t)$ — заданные функции x и t. Если, например, коэффициент теплопроводности $k=k(x,t,u)$ зависит от температуры u, то уравнение (53) называется квазилинейным. Квазилинейные уравнения допускают аналитические решения только в исключительных случаях. Развитие вычислительной техники и применение метода конечных разностей сделали возможным решение линейных и квазилинейных уравнений с переменными коэффициентами. При этом выявилась необходимость развивать методы, пригодные для решения по одним и тем же программам уравнений как с непрерывными, так и с разрывными коэффициентами.

Задачи с разрывными коэффициентами встречаются очень часто в физике и технике. Достаточно, например, указать задачи о диффузии нейтронов и о термическом режиме в гетерогенном реакторе, состоящем из большого числа зон с разными физическими свойствами, задачи о движении границ фазовых переходов (см. гл. III, приложение IV) и т. д. Для решения задач с разрывными коэффициентами используют схемы «сквозного» счета, не использующие информации о положении точек разрыва. При этом во всех узлах сетки и для любых коэффициентов пишутся одни и те же формулы (без какого-либо изменения формул в окрестности разрывов).

Требования сходимости и точности схем сквозного счета накладывают ограничения на вид этих схем. Схемы, сходящиеся в случае разрывных коэффициентов, можно получить при помощи метода баланса или интегро-интерполяционного метода.

7. Метод баланса. Консервативные схемы. Физические процессы, с которыми мы познакомились в курсе, характеризуются интегральными уравнениями сохранения (количества тепла, количества движения, энергии и т. д.). Так, например, закон сохранения тепла (уравнение баланса) на отрезке $[x_1, x_2]$ за время $\Delta t = t_2 - t_1$ имеет вид

$$\int_{x_1}^{x_2} c\,[u(x, t_2) - u(x, t_1)]\,dx = \int_{t_1}^{t_2} [W(x_1, t) - W(x_2, t)]\,dt + \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} f(x, t)\,dx\,dt,$$

где $u(x, t)$ — температура, c — теплоемкость единицы длины, $f(x, t)$ — плотность источников тепла, $W(x, t) = -k(x, t) \times \times \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$ — тепловой поток, $k(x, t)$ — коэффициент теплопроводности. Если существуют непрерывные производные $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, то из уравнения баланса следует дифференциальное уравнение теплопроводности

$$c\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x, t)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x, t).$$

Естественно при написании разностных уравнений, приближенно описывающих тот или иной процесс, исходить из уравнения баланса. Пусть дана сетка $(x_i = ih,\ t_j = j\tau)$. Для каждой элементарной ячейки (прямоугольника) этой сетки пишется уравнение баланса, которое содержит интегралы от функции и ее производных (потоки в случае уравнения баланса тепла) вдоль границы ячейки. Для их вычисления необходимы предположения о профиле функций. В зависимости от выбора локальной интерполяции как по x, так и по t мы получим различные схемы. Вопрос о выборе интерполяций подчинен требованиям устойчивости, точности и простоты реализации (в частности, требованию минимума арифметических операций, которые надо произвести для получения решения).

Проиллюстрируем метод баланса (интегро-интерполяционный метод) на примерах.

Сначала рассмотрим стационарное уравнение теплопроводности

$$\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)\,u = -f(x), \quad 0 < x < 1, \quad k > 0, \quad q \geqslant 0; \qquad (54)$$

здесь $q(x)u$ — мощность стоков тепла (при $q \leqslant 0$ — источников), пропорциональная температуре $u(x)$.

Выберем на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$ сетку $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = 0, 1, \ldots, N\}$ с шагом h. Напишем уравнение баланса тепла на отрезке $x_{i-1/2} \leqslant x \leqslant x_{i+1/2}$, $x_{i-1/2} = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i) = x_{i-1} + \frac{h}{2}$:

$$W_{i-1/2} - W_{i+1/2} - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\,u(x)\,dx + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)\,dx = 0, \quad (55)$$

где $W(x) = -k(x)\frac{du}{dx}$ — поток тепла. Чтобы получить схему, заменим первый интеграл и W разностными выражениями. Возьмем простейшую аппроксимацию ($u = \mathrm{const} = u_i$ при $x_{i-1/2} \leqslant x \leqslant x_{i+1/2}$):

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\,u(x)\,dx \approx hd_iu_i, \qquad d_i = \frac{1}{h}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\,dx. \quad (56)$$

Проинтегрируем равенство $\frac{du}{dx} = -\frac{W}{k}$ на отрезке $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$:

$$u_{i-1} - u_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{W}{k}\,dx.$$

Так как W входит в (55) в полуцелых точках $x_{i\pm 1/2}$, то, полагая $W = \mathrm{const} = W_{i-1/2}$ при $x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i$, будем иметь

$$u_{i-1} - u_i = W_{i-1/2}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}$$

или

$$W_{i-1/2} = -a_i\frac{u_i - u_{i-1}}{h} = -a_iu_{\bar{x},\,i}, \quad (57)$$

$$a_i = \frac{1}{\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}}. \quad (57')$$

Отметим, что $\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)}$ есть тепловое сопротивление отрезка $[x_{i-1}, x_i]$. Заменяя интеграл (57′) по одной из формул

$$\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \approx \frac{1}{k_{i-1/2}}, \qquad \frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{dx}{k(x)} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_{i-1}} + \frac{1}{k_i}\right),$$

получим $a_i = k_{i-1/2}$, $a_i = \frac{2k_{i-1}k_i}{k_{i-1}+k_i}$ и т. д. Все эти коэффициенты отличаются друг от друга на величину $O(h^2)$. Подставляя в (55) выражения (56) и (57) и обозначая искомую функцию y_i, получим разностную схему, выражающую закон сохранения тепла на сетке (консервативную схему):

$$\frac{1}{h}\left[\frac{a_{i+1}(y_{i+1}-y_i)}{h} - \frac{a_i(y_i - y_{i-1})}{h}\right] - d_i y_i = -\varphi_i, \tag{58}$$

которую можно написать в виде

$$(a y_{\bar{x}})_x - dy = -\varphi, \tag{58′}$$

где

$$d_i = \frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x)\,dx, \qquad \varphi_i = \frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x)\,dx. \tag{59}$$

Метод баланса, таким образом, позволяет получать схемы, коэффициенты которых во всех узлах сетки вычисляются по одним и тем же формулам как средние значения коэффициентов дифференциального уравнения в окрестности узла сетки.

Сами схемы (58) пишутся одинаково во всех узлах сетки и для любых $k(x)$, $q(x)$, $f(x)$. Такие схемы называются *однородными*. Для практических целей целесообразно находить коэффициенты схемы a, d, φ по более простым формулам, используя значения k, q, f в отдельных точках. При этом a, d, φ определяются как средние значения k, q, f в одной или нескольких точках

$$a(x) = \sum_{j=n_1}^{n_2} c_j k(x + s_j h), \quad -1 \leqslant s_j \leqslant 0, \quad \sum_{j=n_1}^{n_2} c_j = 1, \ c_j \geqslant 0, \tag{60}$$

и аналогично для d, φ. Совокупность точек $\{s_j\}$ называется коэффициентным шаблоном.

Обычно используют шаблоны из одной или из двух точек, полагая, например,

$$a_i = k_{i-1/2}, \quad d_i = q_i, \quad \varphi_i = f_i, \tag{61}$$

если k, q, f непрерывны. Если k, q, f разрывны, то в этих формулах следует брать полусумму предельных значений слева и справа[1]).

Схема (58) имеет второй порядок аппроксимации, если

$$\frac{a_i+a_{i+1}}{2}=k_i+O(h^2),\qquad \frac{a_{i+1}-a_i}{h}=k_i'+O(h^2),$$

$$d_i=q_i+O(h^2),\quad \varphi_i=f_i+O(h^2). \tag{62}$$

В самом деле, погрешность аппроксимации для схемы (58) на решении $u=u(x)$ уравнения (54) равна

$$\psi_i=(\Lambda u-du+\varphi)_i=\frac{1}{h^2}\left[a_{i+1}(u_{i+1}-u_i)-a_i(u_i-u_{i-1})\right]-d_iu_i+\varphi_i.$$

Подставляя сюда

$$u_{i\pm1}=u_i\pm hu_i'+\frac{h^2}{2}u_i''\pm\frac{h^3}{6}u_i'''+O(h^4)$$

и учитывая, что $((ku')'-qu+f)_i=0$, получим

$$\psi_i=\left(\frac{a_{i+1}+a_i}{2}-k_i\right)u_i''+\left(\frac{a_{i+1}-a_i}{h}-k_i'\right)u_i'-(d_i-q_i)u_i+(\varphi_i-f_i).$$

Отсюда видно, что $\psi=O(h^2)$, если выполнены условия (62). Нетрудно убедиться в том, что коэффициенты a, d, φ, написанные выше, удовлетворяют этим условиям.

Таким образом, метод баланса приводит к однородным схемам 2-го порядка аппроксимации. Эти схемы сходятся в классе кусочно-непрерывных коэффициентов и имеют по крайней мере 1-й порядок точности (схема (58) с коэффициентами (57′), (59) — 2-й порядок).

Разностные схемы для уравнения (54) можно писать, исходя из требования 2-го порядка аппроксимации. Однако при этом может оказаться, что схема $O(h^2)$ расходится в классе разрывных коэффициентов. Примером может служить схема

$$\Lambda y_i=k_i\frac{y_{i-1}-2y_i+y_{i+1}}{h^2}+\frac{k_{i+1}-k_{i-1}}{2h}\cdot\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}-q_iy_i=-f_i, \tag{63}$$

соответствующая уравнению $(ku')'-qu=ku''+k'u'-qu=-f$. Имеется пример[1]) (при $q=0$, $f=0$, $u(0)=1$, $u(1)=0$), показывающий, что решение уравнения (63) при $h\to0$ имеет пределом функцию $\bar u(x)$, не являющуюся решением исходной задачи.

[1]) См. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Об однородных разностных схемах, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1, № 1 (1961).

Если вопрос о сходимости схемы выяснить путем сгущения сеток (что часто делается на практике), то можно сделать ошибочный вывод о ее сходимости (она «сходится», но не к решению исходной задачи).

8. Двухслойные схемы для уравнения теплопроводности с переменными коэффициентами. Обратимся теперь к нестационарному уравнению теплопроводности (53). Для простоты положим $c=1$, $q=0$. Напишем уравнение баланса для прямоугольника $(x_{i-1/2}\leqslant x\leqslant x_{i+1/2},\ t_j\leqslant t\leqslant t_{j+1})$ (рис. 86):

$$\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}[u(x,t_{j+1})-u(x,t_j)]\,dx=$$

$$=\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}[M(x_{i-1/2},t)-W(x_{i+1/2},t)]\,dt+\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}f(x,t)\,dx\,dt, \tag{64}$$

где $W=-k\dfrac{\partial u}{\partial x}$. Возьмем простейшие формулы:

$$\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}[u(x,t_{j+1})-u(x,t_j)]\,dx\approx h[u(x_i,t_{j+1})-u(x_i,t_j)]. \tag{65}$$

$$\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}[W(x_{i+1/2},t)-W(x_{i-1/2},t)]\,dt\approx$$

$$\approx\tau\sigma\left[W_{i+1/2}^{j+1}-W_{i-1/2}^{j+1}\right]+\tau(1-\sigma)\left[W_{i+1/2}^{j}-W_{i-1/2}^{j}\right], \tag{66}$$

где σ — произвольное число. Пользуясь для $W_{i-1/2}$ формулой (57) и подставляя (65), (66) в (64), получим двухслойную консервативную схему

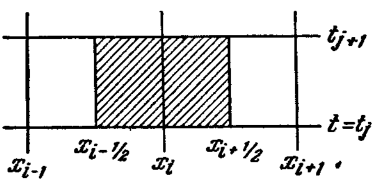

Рис. 86.

$$\frac{y^{j+1}-y^j}{\tau}=\sigma(\Lambda y)_i^{j+1}+$$
$$+(1-\sigma)(\Lambda y)_i^j+\varphi_i^{j+1}, \tag{67}$$

$$\Lambda y=(ay_{\bar x})_x,$$

$$\varphi_i^{j+1}=\frac{1}{h\tau}\int\limits_{t_j}^{t_{j+1}}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}f(x,t)\,dx\,dt, \tag{68}$$

где a вычисляется (при фиксированном t) по формулам предыдущего пункта, так что $\Lambda u=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(k\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)+O(h^2)$. Для φ можно пользоваться и другими формулами, эквивалентными (68) с точностью до $O(h^2+\tau^2)$. Если f — непрерывная функция, то полагаем $\varphi_i^{j+1}=f_i^{j+1/2}$.

По аналогии с п. 3 убеждаемся в том, что схема (67) имеет аппроксимацию $O(h^2+(\sigma-1/2)\tau+\tau^2)$. Если заменить $\sigma(\Lambda y)_i^{j+1}+(1-\sigma)(\Lambda y)_i^j$ выражением

$$\Lambda^{j+1/2}(\sigma y^{j+1}+(1-\sigma)y^j)=(a^{j+1/2}(\sigma y_{\bar{x}}^{j+1}+(1-\sigma)y_{\bar{x}}^j)_x,$$

то получим схему того же порядка точности:

$$\frac{y^{j+1}-y^j}{\tau}=\Lambda^{j+1/2}(\sigma y^{j+1}+(1-\sigma)y^j)+\varphi^{j+1}$$

или

$$y_{\bar{t}}=\Lambda(\sigma y+(1-\sigma)\check{y})+\varphi. \tag{69}$$

Так как уравнение баланса может быть написано для любой области G на плоскости (x, t), ограниченной кривой Γ:

$$\int\limits_{\Gamma}(cu\,dx+W\,dt)=\int\limits_{G}\int f(x, t)\,dx\,dt,$$

то его можно использовать для получения консервативных разностных схем в случае тепловых задач с подвижными внутренними и внешними границами на произвольных неравномерных сетках.

Аналогично можно получить консервативные схемы для уравнений газодинамики, упругости и т. д. Во всех случаях необходимо у полученных разностных схем проверять порядок аппроксимации, устойчивость, сходимость и другие свойства, так как эти качества схемы не следуют из ее консервативности.

Метод баланса, или интегро-интерполяционный метод (см. ссылку на стр. 581), широко применяется на практике[1]). Получающиеся при этом схемы сквозного счета сходятся в классе разрывных коэффициентов.

Рассмотрим теперь первую краевую задачу для уравнения теплопроводности в области $(0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant t\leqslant T)$

$$\left.\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}=Lu+f(x, t),\quad 0<x<1,\quad t>0,\quad Lu=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right),\\ u(0, t)=\mu_1(t),\quad u(1, t)=\mu_2(t),\quad u(x, 0)=u_0(x),\\ 0<c_1\leqslant k(x, t)\leqslant c_2,\end{gathered}\right\} \tag{70}$$

где c_1, $c_2=\mathrm{const}$.

---

[1]) См., например, Г. И. Марчук, Численные методы расчета ядерных реакторов, Атомиздат, 1958.

Для ее решения на сетке $\bar{\omega}_{h\tau}$ (см. п. 1 § 1) воспользуемся двухслойной схемой (69), полученной методом баланса:

$$\left.\begin{array}{l} y_{\bar{t}} = \Lambda(\sigma y + (1-\sigma)\check{y}) + \varphi, \quad 0 < x = ih < 1, \quad t = j\tau > 0, \\ \qquad y(0, t) = \mu_1(t), \quad y(1, t) = \mu_2(t), \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \\ \qquad\qquad y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \end{array}\right\} \quad (71)$$

где $\Lambda y = \left(a\left(x, t_{j+1/2}\right) y_{\bar{x}}\right)_x$ есть схема 2-го порядка аппроксимации по h.

Для определения $y = y_i^{j+1}$ из (71) получаем краевую задачу:

$$\left.\begin{array}{l} A_{i+1} y_{i+1} - C_i y_i + A_i y_{i-1} = -F_i, \quad 0 < i < N, \\ \qquad y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2, \end{array}\right\} \quad (72)$$

где $A_i = \sigma \frac{\tau}{h^2} a_i$, $C_i = A_i + A_{i+1} + 1$, а F_i выражается через y^j.

Оценим погрешность аппроксимации схемы (71). Пусть $y(x, t)$ — решение задачи (71), а $u = u(x, t)$ — решение исходной задачи (70). Подставляя в (71) $y^j = z^j + u^j$, получим для разности $z = y - u$ условия

$$\begin{array}{ll} z_{\bar{t}} = \Lambda(\sigma z + (1-\sigma)\check{z}) + \psi, & z_0 = z_N = 0, \\ & z(x, 0) = 0, \end{array} \quad (73)$$

где $\psi = \Lambda(\sigma u + (1-\sigma)\check{u}) + \varphi - u_{\bar{t}}$ — погрешность аппроксимации для схемы (71) на решении $u = u(x, t)$ уравнения (70). Учитывая, что $\Lambda u = Lu + O(h^2)$, $\varphi = f^{j+1/2}$, $u_{\bar{t}} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{j+1/2} + O(\tau^2)$, $\sigma u + (1-\sigma)\check{u} = (u + (\sigma - 0{,}5)\tau\dot{u})^{j+1/2} + O(\tau^2)$, получаем $\psi = (\sigma - 1/2)\tau(L\dot{u})^{j+1/2} + O(\tau^2 + h^2)$, если $u(x, t)$ и $k(x, t)$ — достаточно гладкие функции $\left(u \in C_3^{(4)},\ k \in C_0^{(3)}\right)$.

Отсюда видно, что симметричная схема $(\sigma = 0{,}5)$ имеет 2-й порядок аппроксимации по h и τ.

Перейдем к исследованию устойчивости схемы (71) по начальным данным и по правой части. Так как $\sigma z + (1-\sigma)\check{z} = 0{,}5(z + \check{z}) + (\sigma - 0{,}5)\tau z_{\bar{t}}$, то (73) можно записать в виде:

$$z_{\bar{t}} - (\sigma - 0{,}5)\tau\Lambda z_{\bar{t}} - 0{,}5\Lambda(z + \check{z}) = \psi, \quad z_0 = z_N = 0. \quad (74)$$

Будем предполагать, что

$$z(x, 0) = z_0(x), \quad (75)$$

$$0 < c_1 \leqslant a \leqslant c_2, \quad |a_{\bar{t}}| \leqslant c_3 \quad \text{или} \quad |a - \check{a}| \leqslant \tau c_3. \quad (76)$$

Действуя так же, как в п. 3, напишем энергетическое тождество для задачи (74) — (76), аналогичное тождеству (33):

$$2\tau\|z_{\bar t}\|^2-2\tau^2(\sigma-0{,}5)\left(\Lambda z_{\bar t},\ z_{\bar t}\right)-\left(\Lambda(z+\check z),\ z-\check z\right)=2\tau\left(\psi,\ z_{\bar t}\right). \tag{77}$$

В силу формулы Грина (19) имеем $-(\Lambda v,\ v)=\left(a,\ v_{\bar x}^2\right]$, $-\left(\Lambda(z+\check z),\ z-\check z\right)=\left(a\left(z_{\bar x}+\check z_{\bar x}\right),\ z_{\bar x}-\check z_{\bar x}\right]=\left(a,\ z_{\bar x}^2\right]-\left(a,\ \check z_{\bar x}^2\right]$. Представляя затем a в виде $a=\check a+(a-\check a)=\check a+\tau a_{\bar t}$ и пользуясь условием $|a_{\bar t}|\leqslant c_3$, будем иметь $a\leqslant(1+\tau c_4)\check a$, $c_4=c_3/c_1$, $\left(a,\ \check z_{\bar x}^2\right]\leqslant(1+c_4\tau)\left(\check a,\ \check z_{\bar x}^2\right]$. Подставим эту оценку в (77):

$$2\tau\left[\|z_{\bar t}\|^2+(\sigma-{}^1/_2)\,\tau\left(a,\ z_{\bar x\bar t}^2\right]\right]+\left(a,\ z_{\bar x}^2\right]\leqslant(1+c_4\tau)\left(\check a,\ \check z_{\bar x}^2\right]+2\tau\left(\psi,\ z_{\bar t}\right). \tag{78}$$

Исследуем сначала устойчивость схемы (74) по начальным данным. Для этого положим в (78) $\psi=0$. Покажем, что выражение в квадратных скобках $\geqslant 0$ при $\sigma\geqslant 0{,}5-\dfrac{h^2}{4c_2\tau}$. При $\sigma\geqslant 0{,}5$ это очевидно. Пусть $\sigma<0{,}5$. По аналогии с п. 4 находим $\|v\|^2-(0{,}5-\sigma)\,\tau\left(a,\ v_{\bar x}^2\right]\geqslant\|v\|^2-(0{,}5-\sigma)\,c_2\tau\|v_{\bar x}\|^2\geqslant$ $\geqslant\left(1-(0{,}5-\sigma)\dfrac{4c_2\tau}{h^2}\right)\|v\|^2\geqslant 0$ при $1-(0{,}5-\sigma)\,4c_2\tau h^{-2}\geqslant 0$ (здесь $v=z_{\bar t}$). Поэтому из (78) следует

$$\|z\|_{(1)}^2\leqslant(1+c_4\tau)\|\check z\|_{(1)}^2\leqslant\left(1+\frac{c_4\tau}{2}\right)^2\|\check z\|_{(1)}^2,\quad\text{где}\quad \|z\|_{(1)}^2=\left(a,\ z_{\bar x}^2\right], \tag{79}$$

$$\|z^j\|_{(1)}\leqslant(1+0{,}5c_4\tau)\|z^{j-1}\|_{(1)}\leqslant\left(1+\frac{c_4\tau}{2}\right)^j\|z^0\|_{(1)}\leqslant e^{0{,}5c_4t_j}\|z_0\|_{(1)}. \tag{80}$$

Таким образом доказана теорема:

Разностная схема (74) (*или* (71)) *устойчива по начальным данным в норме* $\|z\|_{(1)}=\sqrt{\left(a,\ z_{\bar x}^2\right]}$ *при*

$$\sigma\geqslant\frac{1}{2}-\frac{h^2}{4c_2\tau}. \tag{81}$$

В этом случае для решения задачи (74) — (76) *при* $\psi=0$ *справедлива оценка*

$$\|z^j\|_{(1)}\leqslant M_1\|z_0\|_{(1)},\quad\text{где}\quad M_1=e^{0{,}5c_4T}. \tag{82}$$

Из (81) следует, что явная схема ($\sigma=0$) $z_{\bar t}=\Lambda\check z$ устойчива при $\tau\leqslant h^2/2c_2$, т. е. шаг по времени для устойчивости явной схемы должен быть тем меньше, чем больше максимум коэффициента теплопроводности. Поэтому явные схемы нецелесообразно использовать для уравнений с переменными коэффициентами.

Докажем теорему:

Для решения разностной задачи (74)—(76) *при* $\sigma \geqslant 0{,}5$ *справедлива оценка*

$$\max_{\bar{\omega}_\tau} \| z \|_{(1)} \leqslant M_1 \| z_0 \|_{(1)} + M_2 \max_{\bar{\omega}_\tau} \| \psi \|, \tag{83}$$

где

$$\| z \|_{(1)} = \sqrt{(a,\ z_{\bar{x}}^2]}. \tag{84}$$

Обратимся к неравенству (78):

$$2\tau \| z_{\bar{t}} \|^2 + (a,\ z_{\bar{x}}^2] \leqslant (1 + c_4\tau)(\check{a},\ \check{z}_{\bar{x}}^2] + 2\tau(\psi,\ z_{\bar{t}}) \quad \text{при} \quad \sigma \geqslant 1/2. \tag{85}$$

Подставляя сюда оценку (46), получим (при $c_0 = 2$)

$$(a,\ z_{\bar{x}}^2] \leqslant (1 + c_4\tau)(\check{a},\ \check{z}_{\bar{x}}^2] + \frac{\tau}{2} \| \psi \|^2.$$

Решив это неравенство (по аналогии с п. 4)

$$\| z^j \|_{(1)}^2 \leqslant M_1' \left[\| z_0 \|_{(1)}^2 + \frac{\tau}{2} \sum_{j'=1}^{j} \| \psi^{j'} \|^2 \right], \qquad M_1' = e^{c_4 T},$$

приходим к оценке (83).

Если учесть, что $(a,\ z_{\bar{x}}^2] \geqslant c_1 \| z_{\bar{x}} \|^2 \geqslant 4c_1 \| z \|_c^2$, то из (83) для решения задачи (73) получим

$$\max_{\bar{\omega}_\tau} \| z \|_c \leqslant M \max_{\bar{\omega}_\tau} \| \psi \|, \tag{86}$$

где

$$M = \sqrt{\frac{M_1'}{8c_1}}, \qquad \| z \|_c = \max_{\omega_h} | z |.$$

Тем самым доказана теорема: *если схема* (71) *устойчива* (*при* $\sigma \geqslant 0{,}5$) *и аппроксимирует уравнение* (70), *то она сходится, причем порядок ее точности совпадает с порядком аппроксимации.*

Пусть сетка $\bar{\omega}_h$ неравномерна, $\bar{\omega}_h^* = (x_i,\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ N)$, ее шаг $h_i = x_i - x_{i-1}$ зависит от i. Тогда в (71) вместо Λy следует подставить выражение (ср. п. 2 § 1, (15))

$$\Lambda y_i = (a y_{\bar{x}})_{\hat{x},\, i} = \frac{1}{\hbar_i} \left[a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right], \quad \hbar_i = \frac{1}{2}(h_i + h_{i+1}). \tag{87}$$

Погрешность аппроксимации для Λ может быть представлена в виде

$$\psi_i = \Lambda u_i - Lu_i = \frac{1}{\hbar_i}(\eta_{i+1} - \eta_i) + O\left(h_i^2 + h_{i+1}^2\right),$$

где $\eta = O\left(h_i^2\right)$, т. е. $\|\psi\|_0 = O(h_0)$, $\|\psi\|_2 = O(h)$. Однако, как было показано в п. 2, для $\|\psi\|_3$ верна оценка

$$\|\psi\|_3 = \left[\sum_{i=1}^{N-1} h_i \left(\sum_{k=1}^{i} \hbar_k \psi_k\right)^2\right]^{1/2} = O\left(h_0^2\right), \quad \text{где} \quad h_0 = \max h_i.$$

Схема может быть получена методом баланса.

Если коэффициент $k(x, t)$ имеет разрыв 1-го рода на линии $x = \text{const}$ (неподвижный разрыв) или $x = \xi(t)$ (движущийся разрыв), то схема (71) попрежнему сходится, однако порядок ее точности, вообще говоря, понижается. В случае неподвижного разрыва (при $x = \text{const}$) целесообразно выбирать сетку так, чтобы точка разрыва $x = \text{const}$ была узлом сетки ω_h. Это приводит к неравномерным сеткам. Однако порядок точности (второй по h) схемы (71) на такой сетке сохраняется и в случае разрывного k.

Оценка порядка точности в случае разрывных коэффициентов и неравномерной сетки значительно усложняется. При этом справедлива оценка вида (86), однако в правой части (86) вместо $\|\psi\|$ стоит норма специального вида $\|\psi\|_3$, указанная выше.

До сих пор мы рассматривали краевые условия 1-го рода. Они удовлетворяются на сетке $\bar{\omega}_h$ точно, и поэтому точность разностной схемы определяется порядком аппроксимации уравнения. Краевые условия 3-го рода аппроксимируются приближенно. Естественно требовать, чтобы порядок их аппроксимации совпадал с порядком аппроксимации дифференциального уравнения.

Приведем разностные краевые условия 3-го рода без вывода[1]).

Рассмотрим сначала краевую задачу

$$\begin{gathered}(ku')' - qu = -f(x), \quad 0 < x < 1; \quad k(x) > 0, \ q(x) \geqslant 0; \\ k(0)\,u'(0) = \beta_1 u(0) - \mu_1; \quad -k(1)\,u'(1) = \beta_2 u(1) - \mu_2, \end{gathered} \tag{88}$$

где $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$. Уравнение заменяется схемой (58), а условия при $x = 0$, $x = 1$ — разностными краевыми условиями 3-го рода:

$$a_1 y_{x,0} = \tilde{\beta}_1 y_0 - \tilde{\mu}_1, \qquad -a_N y_{\bar{x},N} = \tilde{\beta}_2 y_N - \tilde{\mu}_2, \tag{89}$$

где $a_1 = a(h)$, $a_N = a(x_N) = a(1)$, $\tilde{\beta}_1 = \beta_1 + 0{,}5\,hq(0)$, $\tilde{\beta}_2 = \beta_2 + 0{,}5hq(1)$, $\tilde{\mu}_1 = \mu_1 + 0{,}5hf(0)$, $\tilde{\mu}_2 = \mu_2 + 0{,}5hf(1)$. Эти условия аппроксимируют условия (88) на решении $u = u(x)$ задачи (88) с порядком $O(h^2)$.

---

[1]) См. А. А. Самарский, Однородные разностные схемы для нелинейных уравнений параболического типа, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2, № 1 (1962). Условия (89) и (92) могут быть получены методом баланса.

Разрешая (89) относительно y_0 и y_N, получим удобную для вычислений запись краевых условий 3-го рода:

$$y_0 = \varkappa_1 y_1 + \nu_1, \qquad y_N = \varkappa_2 y_{N-1} + \nu_2, \tag{90}$$

где $\varkappa_1 = a_1/(a_1 + h\bar{\beta}_1)$, $\varkappa_2 = a_N/(a_N + h\bar{\beta}_2)$, $\nu_1 = h\bar{\mu}_1/(a_1 + h\bar{\beta}_1)$, $\nu_2 = h\bar{\mu}_2/(a_N + h\bar{\beta}_2)$.

Обратимся теперь к третьей краевой задаче для уравнения теплопроводности (70). Пусть при $x = 0$, $x = 1$ заданы условия:

$$\left.\begin{aligned} k\frac{\partial u}{\partial x} &= \beta_1(t)\,u - \mu_1(t) \quad \text{при} \quad x = 0, \\ -k\frac{\partial u}{\partial x} &= \beta_2(t)\,u - \mu_2(t) \quad \text{при} \quad x = 1. \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

Разностные краевые условия 3-го рода в этом случае имеют вид

$$\left.\begin{aligned} a_1\left(\sigma y_{x,0} + (1-\sigma)\check{y}_{x,0}\right) &= 0{,}5hy_{\bar{t},0} + \beta_1\left(\sigma y_0 + (1-\sigma)\check{y}_0\right) - \tilde{\mu}_1, \\ \tilde{\mu}_1 &= \mu_1 + 0{,}5hf(0,\,t), \\ -a_N\left(\sigma y_{\bar{x},N} + (1-\sigma)\check{y}_{\bar{x},N}\right) &= 0{,}5hy_{\bar{t},N} + \beta_2\left(\sigma y_N + (1-\sigma)\check{y}_N\right) - \tilde{\mu}_2, \\ \tilde{\mu}_2 &= \mu_2 + 0{,}5hf(1,\,t), \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

где a_1, a_N, β_1, β_2, $\tilde{\mu}_1$, $\tilde{\mu}_2$ берутся в момент $t = t_{j+0,5}$, σ — параметр, входящий в уравнение (71). Они имеют тот же порядок аппроксимации $O(h^2 + (\sigma - 0{,}5)\tau + \tau^2)$ на решении $u = u(x, t)$ (уравнения (70) с условиями 91)), что и схема (71). Учитывая, что $\check{y} = y^j$ известны для всех $i = 0, 1, \ldots, N$, нетрудно привести (92) к счетному виду (90). Выражения для $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, ν_1 и ν_2 не выписываем.

В результате для определения $y = y^{j+1}$ получим разностное уравнение (72) с краевыми условиями (90).

9. Трехслойные схемы. Помимо двухслойных схем, рассмотренных в п. 8, для численного решения уравнения теплопроводности (70) используются трехслойные схемы, связывающие значения искомой функции y для трех моментов времени $t = t_{j+1}$, t_j, t_{j-1} (на трех слоях) [1]).

Часто применяются трехслойные симметричные схемы)

$$\frac{y^{j+1} - y^{j-1}}{2\tau} = \Lambda\left(\sigma y^{j+1} + (1-2\sigma)\,y^j + \sigma y^{j-1}\right) + \varphi^j \qquad (\varphi^j = f^j), \tag{93}$$

где $\Lambda y = (a(x, t_j)\,y_{\bar{x}})_x$. Они имеют погрешность аппроксимации $O(h^2 + \tau^2)$ при любом σ.

---

[1]) См. Р. Д. Рихтмайер, Разностные методы решения краевых задач, ИЛ, 1960.

Для трехслойной схемы (93) помимо $y(x, 0)$ необходимо задавать значение $y(x, \tau)$ при $t=\tau$. Это можно сделать двумя способами: 1) используя формулу $u(x, \tau)=u(x, 0)+\tau \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)+O(\tau^2)$ и уравнение (70), получаем $y(x, \tau)=u_0(x)+\tau[Lu+f]_{t=0}=u_0(x)+\tau[(k(x, 0)u_0')'+f(x, 0)]$; 2) использовать для определения $y(x, \tau)$ двухслойную схему 2-го порядка точности: $y_{\bar t}=0{,}5\Lambda(y+\check y)+\varphi$ при $t=\tau$. Итак, пусть заданы начальные условия

$$y(x, 0)=u_0(x), \qquad y(x, \tau)=\bar u_0(x), \qquad x\in\bar\omega_h. \tag{94}$$

При $x=0$, $x=1$ ставятся краевые условия, например, 1-го рода.

Покажем, что схема (93) устойчива по начальным условиям и по правой части при

$$\sigma\geqslant {}^1/_4. \tag{95}$$

Для этого рассмотрим однородные граничные условия $y_0=0$, $y_N=0$. Введем обозначения $y=y^{j+1}$, $\check y=y^j$, $\check{\check y}=y^{j-1}$ и перепишем схему (93) в виде

$$\frac{y-\check{\check y}}{2\tau}=\Lambda y^{(\sigma)}+\varphi, \qquad y^{(\sigma)}=\sigma y+(1-2\sigma)\check y+\sigma\check{\check y}. \tag{96}$$

Умножим уравнение (96) на $2\tau y_i^{(\sigma)}h$, просуммируем по $i=1, 2, \ldots, N-1$ и учтем тождества

$$(y-\check{\check y})\,y^{(\sigma)}=$$
$$=\left[\frac12(y^2+\check y^2)+\left(\sigma-\frac12\right)(y-\check y)^2\right]-\left[\frac12(\check y^2+\check{\check y}^2)+\left(\sigma-\frac12\right)(\check y-\check{\check y})^2\right],$$
$$\frac12(y^2+\check y^2)=\frac14(y+\check y)^2+\frac14(y-\check y)^2.$$

В результате будем иметь

$$\|y\|_{(1)}^2+2\tau\left(a, \left(y_{\bar x}^{(\sigma)}\right)^2\right]=\|\check y\|_{(1)}^2+2\tau\left(\varphi, y^{(\sigma)}\right), \tag{97}$$

где

$$\|y\|_{(1)}^2=\frac14\|y+\check y\|^2+(\sigma-{}^1/_4)\|y-\check y\|^2, \tag{98}$$

$$\|y\|_{(1)}^2\geqslant\frac14\|y-\check y\|^2 \quad \text{при} \quad \sigma\geqslant{}^1/_4.$$

Пользуясь затем неравенствами

$$2\tau\left(\varphi, y^{(\sigma)}\right)\leqslant\tau c_0\|y^{(\sigma)}\|^2+\frac{\tau}{c_0}\|\varphi\|^2, \qquad \left(a, \left(y_{\bar x}^{(\sigma)}\right)^2\right]\geqslant 4c_1\|y^{(\sigma)}\|^2$$

и выбирая $c_0=8c_1$, получаем

$$\|y\|_{(1)}^2\leqslant\|\check y\|_{(1)}^2+\frac{\tau}{8c_1}\|\varphi\|^2. \tag{99}$$

Отсюда следует оценка

$$\|y^j\|_{(1)}\leqslant\|y(\tau)\|_{(1)}+\frac{1}{\sqrt{8c_1}}\left(\sum_{j'=1}^{j}\tau\|\varphi^{j'}\|^2\right)^{1/2} \quad \text{при} \quad \sigma\geqslant{}^1/_4. \tag{100}$$

Эта оценка позволяет доказать сходимость схемы (93), (94) со скоростью $O(h^2+\tau^2)$ при $\sigma \geqslant {}^1/_4$.

Укажем еще одну трехслойную схему

$$\left.\begin{aligned} \frac{3}{2\tau}(y^{j+1}-y^j)-\frac{1}{2\tau}(y^j-y^{j-1}) = \Lambda y^{j+1}+\varphi^{j+1}, \quad \varphi^{j+1}=f^{j+1}, \\ \Lambda y = (a(x, t_{j+1})\, y_{\bar{x}})_x. \end{aligned}\right\} \qquad (101)$$

Она безусловно устойчива и имеет точность $O(h^2+\tau^2)$. Для определения y^{j+1} из (101) получаем задачу (72) с

$$A_i = \frac{1}{h^2}a_i, \quad C_i = A_i + A_{i+1} + \frac{3}{2\tau}, \quad F_i = \varphi_i + \frac{4y_i^j - y_i^{j-1}}{\tau},$$

которая решается методом прогонки (см. п. 10).

Для уравнения гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f, \quad Lu = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x, t)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad (102)$$

$$u(0, t) = u_1(t), \quad u(1, t) = u_2(t), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \bar{u}_0(x) \qquad (103)$$

разностные схемы должны содержать не менее трех слоев. Симметричные схемы

$$\frac{y^{j+1}-2y^j+y^{j-1}}{\tau^2} = \Lambda^j\left(\sigma y^{j+1} + (1-2\sigma)y^j + \sigma y^{j-1}\right) + f^j \qquad (104)$$

имеют аппроксимацию $O(h^2+\tau^2)$ и устойчивы при

$$\sigma \geqslant \frac{1}{4} - \frac{h^2}{4\tau^2 c_2}.$$

В частности, явная схема ($\sigma=0$) условно устойчива при

$$\tau \leqslant \frac{h}{\sqrt{c_2}}.$$

Хотя все устойчивые схемы (104) имеют один и тот же порядок точности, но на реальных сетках, как показывают численные эксперименты, точность схемы увеличивается с уменьшением σ. Поэтому можно рекомендовать пользоваться безусловно устойчивыми схемами при $\sigma = {}^1/_4$.

10. Решение систем разностных уравнений. Метод прогонки. Неявные схемы для уравнения теплопроводности приводят к системе алгебраических уравнений для значения искомой функции y_i^{j+1} на новом слое $t = t_{j+1}$.

Эта система уравнений имеет вид

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \qquad 0 < i < N, \qquad (105)$$

где F_i — заданная функция.

Для уравнения с постоянными коэффициентами

$$A_i = \sigma\gamma, \quad B_i = \sigma\gamma, \quad C_i = 1 + 2\sigma\gamma, \quad \gamma = \frac{\tau}{h^2}.$$

Для уравнения с переменными коэффициентами

$$A_i = \sigma\gamma a_i, \quad B_i = \sigma\gamma a_{i+1} = A_{i+1}, \quad C_i = A_i + A_{i+1} + 1.$$

В случае неравномерной сетки

$$A_i = \frac{\sigma a_i}{\hbar_i h_i}\tau, \quad B_i = \frac{\sigma a_{i+1}}{\hbar_i h_{i+1}}\tau, \quad C_i = A_i + B_i + 1.$$

Краевые условия 1-го и 3-го рода, рассмотренные нами в § 1 и § 2, можно записать в виде

$$y_0 = \varkappa_1 y_1 + \nu_1, \quad y_N = \varkappa_2 y_{N-1} + \nu_2. \tag{106}$$

При $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_2 = 0$ отсюда следуют условия 1-го рода $y_0 = \nu_1$, $y_N = \nu_2$.

Итак, рассмотрим уравнение (105) с краевыми условиями (106) и предположим, что

$$\left.\begin{aligned} A_i > 0,\ B_i > 0,\ C_i \geqslant A_i + B_i \text{ или } C_i = A_i + B_i + D_i,\ D_i \geqslant 0, \\ 0 \leqslant \varkappa_\alpha < 1, \quad \alpha = 1,\ 2. \end{aligned}\right\} \tag{107}$$

При этих условиях, как будет показано ниже, задача (105) — (106) разрешима. Для нахождения ее решения можно применять обычные методы линейной алгебры или методы итераций. Однако наиболее выгодным или экономичным по объему затрачиваемой работы является метод прогонки или метод факторизации[1]), учитывающей специальный вид матрицы системы уравнений (105) — ее трехдиагональность.

Будем искать решение задачи (105) — (106) в виде

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1, \tag{108}$$

где α_i и β_i — неизвестные пока функции. Подставляя $y_{i-1} = \alpha_i y_i + \beta_i$ в (105), исключим y_{i-1} и получим $(A_i\alpha_i - C_i) y_i + B_i y_{i+1} + (A_i\beta_i + F_i) = 0$, после чего при помощи (108) исключим y_i:

$$[(A_i\alpha_i - C_i)\alpha_{i+1} + B_i] y_{i+1} + [(A_i\alpha_i - C_i)\beta_{i+1} + (A_i\beta_i + F_i)] = 0.$$

Уравнение (105) будет удовлетворено, если выражения в квадратных скобках равны нулю. Из этих двух равенств находим рекуррентные формулы для определения α_{i+1} и β_{i+1}:

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i\alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i\beta_i + F_i}{C_i - A_i\alpha_i}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ N-1. \tag{109}$$

---

[1]) См. Г. И. Марчук, Численные методы расчета ядерных реакторов, Атомиздат, 1958; С. К. Годунов, В. С. Рябенький, Введение в теорию разностных схем, Физматгиз, 1962.

Сравнивая формулу $y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1$ с краевым условием (106) при $i = 0$, находим:

$$\alpha_1 = \varkappa_1, \quad \beta_1 = \nu_1. \tag{110}$$

Решая (109) с начальными условиями (110), найдем α_i, β_i, $i = 1, 2, \ldots, N$. Чтобы пользоваться формулой (108), надо знать y_N.

Определим y_N через α_N и β_N из краевого условия (106) при $i = N$. Исключая y_{N-1} из формул $y_N = \varkappa_2 y_{N-1} + \nu_2$, $y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N$, находим:

$$y_N = \frac{\nu_2 + \varkappa_2\beta_N}{1 - \varkappa_2\alpha_N} \tag{111}$$

при условии, что $1 - \varkappa_2\alpha_N \neq 0$.

Покажем, что из условий (107) следует $0 \leqslant \alpha_i < 1$ для всех $i = 1, 2, \ldots, N$. Из формулы $\alpha_{i+1} = B_i/[B_i + A_i(1 - \alpha_i) + D_i]$ видно, что $0 < \alpha_{i+1} < 1$, если $0 \leqslant \alpha_i < 1$ и, следовательно, $0 \leqslant \alpha_i < 1$ для $i = 1, 2, \ldots, N$, так как $\alpha_1 = \varkappa_1 < 1$. Таким образом, $1 - \varkappa_2\alpha_N > 0$ при $0 \leqslant \varkappa_2 < 1$ и формула (111) имеет смысл.

Решение задачи (105) — (106) состоит из двух этапов: 1) по начальным данным (110) и формулам (109) последовательно определяются α_i, затем β_i для $i = 1, 2, \ldots, N$ (счет идет слева направо — от i к $i+1$); 2) из (111) находится y_N и затем по формуле (108) последовательно (справа налево — от $i+1$ к i) определяются $y_{N-1}, y_{N-2}, \ldots, y_1, y_0$.

Счет по формулам (108) устойчив, так как $0 \leqslant \alpha_i < 1$.

Существует еще один вариант формул прогонки:

$$\xi_i = \frac{A_i}{C_i - B_i\xi_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad \xi_N = \varkappa_2; \tag{112}$$

$$\eta_i = \frac{B_i\eta_{i+1} + F_i}{C_i - B_i\xi_{i+1}}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad \eta_N = \nu_2; \tag{113}$$

$$y_{i+1} = \xi_{i+1}y_i + \eta_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad y_0 = \frac{\nu_1 + \varkappa_1\eta_1}{1 - \varkappa_1\xi_1}. \tag{114}$$

Порядок счета: 1) по формулам (112) и (113) последовательно от $i+1$ к i (справа налево) определяется сначала ξ_i, затем η_i для $i = N-1, N-2, \ldots, 1, 0$; 2) по формулам (114) последовательно от i к $i+1$ (слева направо) находятся $y_1, y_2, \ldots, y_N$.

Нетрудно убедиться в том, что число арифметических действий, производимых при решении задачи (105) — (106), пропорционально числу уравнений.

11. Разностные методы решения квазилинейных уравнений. При изучении высокотемпературных процессов необходимо учитывать зависимость коэффициентов теплоемкости и теплопроводности от температуры. Мощность тепловых источников может также зависеть от температуры, если, например, тепло выделяется в результате химической реакции. В результате мы получаем для описания процесса распространения тепла квазилинейное уравнение теплопроводности

$$c(u)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+f(u),\quad c(u)>0,\quad k(u)>0. \tag{115}$$

В общем случае $c=c(x,t,u)$, $k=k(x,t,u)$, $f=f(x,t,u)$.

В неоднородной среде k и c могут быть разрывными функциями аргументов x и u (для разных веществ зависимость k, c от температуры различна). Уравнение вида (115) встречается также при изучении проникновения магнитного поля в среду, коэффициент магнитной восприимчивости которой зависит от магнитного поля.

Уравнение (115) заменой искомой функции приводится к одному из видов

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{116}$$

$$\frac{\partial \varphi(u)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(u). \tag{117}$$

В самом деле, вводя, например, функцию $v=\int\limits_0^u c(u)\,du$, получим для нее уравнение (116).

В настоящее время метод конечных разностей является единственным методом, позволяющим эффективно найти решение квазилинейных уравнений.

Рассмотрим простейшие двухслойные схемы для уравнения (115). Они могут быть получены методом баланса по аналогии с п. 7, если учесть, что $W=-k(u)\frac{\partial u}{\partial x}$.

Для квазилинейных уравнений использование явных схем нецелесообразно, если $k(u)$ является быстроменяющейся (например, степенной) функцией, так как условие устойчивости

$$\tau\leqslant\frac{h^2}{2\max k(u)}$$

требует очень мелкого шага τ по времени. Поэтому применяются неявные схемы — линейные и нелинейные относительно y^{j+1}. В случае нелинейных схем применяются итерационные методы для нахождения y^{j+1}.

а) Неявные схемы с точностью $O(h^2+\tau)$:

$$\frac{y_i^{j+1}-y_i^j}{\tau}=\frac{1}{h^2}\left[a_{i+1}(y^j)\left(y_{i+1}^{j+1}-y_i^{j+1}\right)-\right.$$
$$\left.-a_i(y^j)\left(y_i^{j+1}-y_{i-1}^{j+1}\right)\right]+f(y_i^j), \quad (118)$$

$$\frac{y_i^{j+1}-y_i^j}{\tau}=\frac{1}{h^2}\left[a_{i+1}(y^{j+1})\left(y_{i+1}^{j+1}-y_i^{j+1}\right)-\right.$$
$$\left.-a_i(y^{j+1})\left(y_i^{j+1}-y_{i-1}^{j+1}\right)\right]+f(y_i^{j+1}), \quad (119)$$

где

$$a_i(y)=k\left(\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\right). \quad (120)$$

При $x=0$, $x=1$ ставятся краевые условия, например $y_0=u_1$, $y_N=u_2$.

Первая схема линейна относительно y_i^{j+1} — значения y на новом слое $t=t_{j+1}$. Решение разностной краевой задачи для y_i^{j+1} находится методом прогонки (см. п. 10).

Вторая схема (119) нелинейна относительно y_i^{j+1}. Для решения получающейся системы нелинейных уравнений применяются итерационные методы. Напишем уравнение для определения итераций $\overset{s+1}{y_i}$ в случае простейшего итерационного метода

$$\overset{s}{A_i}\overset{s+1}{y}_{i-1}-\overset{s}{C_i}\overset{s+1}{y_i}+\overset{s}{A}_{i+1}\overset{s+1}{y}_{i+1}=-\overset{s}{F_i}, \quad (121)$$

где

$$\overset{s}{A_i}=\frac{\tau}{h^2}a_i(\overset{s}{y}),\quad \overset{s}{C_i}=\overset{s}{A_i}+\overset{s}{A}_{i+1}+1,\quad \overset{s}{F_i}=y_i^j+\tau f(\overset{s}{y_i}),$$

$s=0, 1, 2, \ldots$ — номер итерации.

В качестве нулевого приближения обычно берут значение y_i^j с предыдущего слоя, полагая $\overset{0}{y_i}=y_i^j$; иногда применяют экстраполяцию с использованием y_i^{j-1} (если y_i^j как функция j монотонна). Решение уравнений (121) относительно $\overset{s+1}{y_i}$ с краевыми условиями при $i=0$, $i=N$ 1-го или 3-го рода находится методом прогонки (см. п. 10). Для окончания итераций используется условие $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N-1}|\overset{s+1}{y_i}-\overset{s}{y_i}|<\varepsilon$ или же задается определенное число итераций. Обычно уже две-три итерации заметно повышают точность. Итерационные схемы (119) позволяют для обеспечения заданной точности использовать более крупный шаг по времени по сравнению с безитерационными схемами (118), что зачастую приводит к значительному уменьшению объема вычислительной работы.

б) Симметричная шеститочечная схема $O(h^2+\tau^2)$:

$$\frac{y_i^{j+1}-y_i^j}{\tau}=\frac{1}{2}\left[(ay_{\bar{x}})_{x,i}^{j+1}+(ay_{\bar{x}})_{x,i}^{j}\right]+f\left(\frac{y_i^{j+1}+y_i^j}{2}\right), \qquad (122)$$

где $a_i=k\left(\frac{y_{i-1}+y_i}{2}\right)$. Это нелинейная схема, и для определения y_i^{j+1} нужны итерации.

В случае слабой квазилинейности, когда k не зависит от u, а правая часть $f(u)$ нелинейна, имеются безитерационные безусловно устойчивые схемы 2-го порядка точности.

Напишем такую схему (при $k=\text{const}=1$):

$$\frac{\bar{y}-y^j}{0{,}5\tau}=\Lambda\bar{y}+f(y^j), \quad \frac{y^{j+1}-y^j}{\tau}=0{,}5\Lambda(y^{j+1}+y^j)+f(\bar{y}), \qquad (123)$$
$$\Lambda y=y_{\bar{x}x},$$

где $\bar{y}$ — промежуточное значение. Сначала применяется с шагом 0,5 τ и правой частью $f(y^j)$ чисто неявная схема, затем с шагом τ и правой частью $f(\bar{y})$ — симметричная шеститочечная схема. В результате получается схема 2-го порядка точности по h и τ.

Иногда для решения квазилинейных уравнений используются симметричные трехслойные схемы (93); в этом случае $k(u)$ и $f(u)$ берутся на шаге j. Однако предпочтения заслуживает нелинейная схема, аналогичная схеме (101).

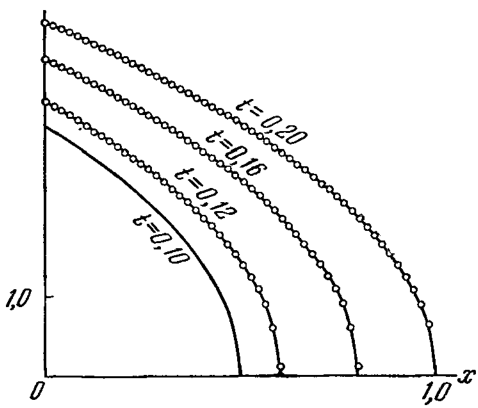

Рис. 87.

Пример. Приведем результаты численных расчетов по схеме (119) для случая $k(u)=\varkappa_0 u^\sigma$, $\varkappa_0>0$, $\sigma>0$, $f=0$. Уравнение $\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa_0 u^\sigma\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ имеет решения, производные которых в точках, где $u=0$ разрывны, а поток $\varkappa_0 u^\sigma\frac{\partial u}{\partial x}$ непрерывен, т. е. существует фронт температуры, который распространяется с конечной скоростью (рис. 87).

Примером такого решения является функция

$$u(x,t)=\begin{cases}\left[\sigma c\varkappa_0^{-1}(ct-x)\right]^{1/\sigma} & \text{при } x\leqslant ct,\\ 0 & \text{при } x\geqslant ct,\end{cases}$$

где c — скорость температурной волны. Эта функция является решением задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa_0 u^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x}\right),\quad x>0,\quad t>0,$$

$$u(x,\,0)=0,\quad u(0,\,t)=u_0 t^{1/\sigma},\quad \text{где}\quad u_0=\left(\frac{\sigma c^2}{\varkappa_0}\right)^{1/\sigma}.$$

Для этого примера по схеме (119) были проведены расчеты с параметрами $\sigma=2$, $\varkappa_0=0{,}5$, $c=5$, $h=0{,}2$ (число точек $N=50$) и шагом $\tau=2\cdot10^{-4}$. Точное решение и результаты расчета нанесены на рис. 87. Всюду, кроме нескольких ближайших к фронту узлов, отклонение сосчитанного решения от точного не превосходит 0,02. Число итераций $\nu\leqslant 3$ ($\varepsilon=10^{-3}$). Сплошная линия на рис. 87 — точное решение, кружки — расчетные точки[1]).

Отметим, что схема (122) немонотонна и поэтому при расчете температурной волны дает худшие результаты по сравнению с монотонной схемой (119).

§ 3. Метод конечных разностей для решения задачи Дирихле

1. Разностная аппроксимация оператора Лапласа. Пусть на плоскости $(x_1,\,x_2)$ задана область G, ограниченная замкнутой кривой Γ. Рассмотрим задачу Дирихле (см. гл. IV)

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=-f(x)\quad \text{в}\quad G,\quad u|_{\Gamma}=\mu(x_1,\,x_2). \tag{1}$$

Для решения задачи (1) методом конечных разностей надо в области $G+\Gamma$ ввести сетку и аппроксимировать на этой сетке уравнение и краевое условие.

Начнем с аппроксимации оператора Лапласа. Заменим каждую из вторых производных $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ разностными выражениями:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\sim\frac{u(x_1+h_1,\,x_2)-2u(x_1,\,x_2)+u(x_1-h_1,\,x_2)}{h_1^2}=u_{\bar{x}_1x_1}=\Lambda_1 u,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\sim\frac{u(x_1,\,x_2+h_2)-2u(x_1,\,x_2)+u(x_1,\,x_2-h_2)}{h_2^2}=u_{\bar{x}_2x_2}=\Lambda_2 u,$$

где h_α — шаг по x_α, $\alpha=1,\,2$.

---

[1]) См. А. А. Самарский, И. М. Соболь, Примеры численного расчета температурных волн, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 3, № 4, 702—719 (1963).