где c — скорость температурной волны. Эта функция является решением задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa_0 u^\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad x>0, \quad t>0,$$

$$u(x,\,0)=0, \quad u(0,\,t)=u_0 t^{1/\sigma}, \quad \text{где} \quad u_0=\left(\frac{\sigma c^2}{\varkappa_0}\right)^{1/\sigma}.$$

Для этого примера по схеме (119) были проведены расчеты с параметрами $\sigma=2$, $\varkappa_0=0{,}5$, $c=5$, $h=0{,}2$ (число точек $N=50$) и шагом $\tau=2\cdot 10^{-4}$. Точное решение и результаты расчета нанесены на рис. 87. Всюду, кроме нескольких ближайших к фронту узлов, отклонение сосчитанного решения от точного не превосходит 0,02. Число итераций $\nu\leqslant 3$ $(\varepsilon=10^{-3})$. Сплошная линия на рис. 87 — точное решение, кружки — расчетные точки[1]).

Отметим, что схема (122) немонотонна и поэтому при расчете температурной волны дает худшие результаты по сравнению с монотонной схемой (119).

§ 3. Метод конечных разностей для решения задачи Дирихле

1. Разностная аппроксимация оператора Лапласа. Пусть на плоскости $(x_1,\,x_2)$ задана область G, ограниченная замкнутой кривой Γ. Рассмотрим задачу Дирихле (см. гл. IV)

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}=-f(x) \quad \text{в} \quad G, \quad u|_\Gamma=\mu(x_1,\,x_2). \tag{1}$$

Для решения задачи (1) методом конечных разностей надо в области $G+\Gamma$ ввести сетку и аппроксимировать на этой сетке уравнение и краевое условие.

Начнем с аппроксимации оператора Лапласа. Заменим каждую из вторых производных $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ разностными выражениями:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\sim\frac{u(x_1+h_1,\,x_2)-2u(x_1,\,x_2)+u(x_1-h_1,\,x_2)}{h_1^2}=u_{\bar{x}_1 x_1}=\Lambda_1 u,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\sim\frac{u(x_1,\,x_2+h_2)-2u(x_1,\,x_2)+u(x_1,\,x_2-h_2)}{h_2^2}=u_{\bar{x}_2 x_2}=\Lambda_2 u,$$

где h_α — шаг по x_α, $\alpha=1,\,2$.

---

[1]) См. А. А. Самарский, И. М. Соболь, Примеры численного расчета температурных волн, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 3, № 4, 702—719 (1963).

Оператор Лапласа Δu заменим разностным оператором

$$\Lambda u = u_{\bar{x}_1 x_1} + u_{\bar{x}_2 x_2}, \tag{2}$$

который определен на пятиточечном шаблоне («крест»), состоящем из точек (x_1, x_2), $(x_1 - h_1, x_2)$, $(x_1 + h_1, x_2)$, $(x_1, x_2 - h_2)$, $(x_1, x_2 + h_2)$. Он изображен на рис. 88, *а*. Вычислим погрешность аппроксимации для оператора Λ. Так как (см. п. 2 § 1)

$$u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} + \frac{h_\alpha^2}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x_\alpha^4} + O(h_\alpha^4),$$

$$\alpha = 1,\ 2,$$

$$\Lambda u - \Delta u = \frac{h_1^2}{12} L_1^2 u + \frac{h_2^2}{12} L_2^2 u + O(h_1^4 + h_2^4), \quad L_\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}$$

и, следовательно,

$$\Lambda v - \Delta v = O(|h|^2),$$

$$|h|^2 = h_1^2 + h_2^2,$$

где v — любая функция, имеющая не менее четырех производных по x_1 и x_2 ($v \in C^{(m)}$, $m \geqslant 4$). Таким образом, оператор Λ аппроксимирует оператор Лапласа со 2-м порядком.

Нетрудно убедиться в том, что оператор

$$\Lambda' v = \Lambda v + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} \Lambda_1 \Lambda_2 v, \tag{3}$$

определенный на девятиточечном шаблоне («ящик») (рис. 88, *б*), имеет на решении $u = u(x)$ уравнения $\Delta u = 0$ 4-й порядок аппроксимации ($\Lambda' u - \Delta u = O(|h|^4)$ при $u \in C^{(m)}$, $m \geqslant 6$) и 6-й порядок ($\Lambda' u - \Delta u = O(h^6)$ при $u \in C^{(m)}$, $m \geqslant 8$) на квадратной сетке, т. е. при $h_1 = h_2 = h$.

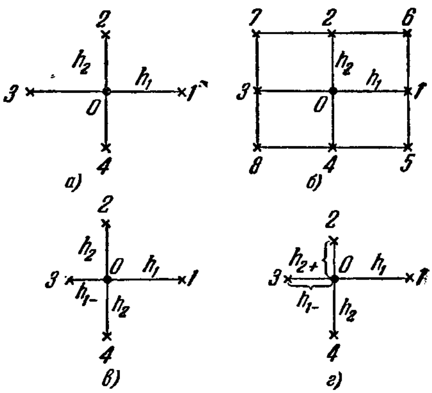


Рис. 88.

Напишем подробнее выражение для Λ в случае $h_1 = h_2 = h$ (на квадратной сетке)

$$\Lambda y = y_{\bar{x}_1 x_1} + y_{\bar{x}_2 x_2} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 4y_0}{h^2}.$$

Разрешая уравнение $\Delta y = 0$ относительно y_0, получим

$$y_0 = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4).$$

Значение y в центре шаблона есть среднее арифметическое значений в остальных узлах шаблона. Эта формула является разностным аналогом формулы среднего значения для гармонической функции.

Уравнение Пуассона $\Delta u = -f(x_1, x_2)$ заменяется схемой

$$\Lambda y = -\varphi(x), \quad \varphi(x) = \varphi(x_1, x_2) = f(x_1, x_2). \tag{4}$$

Перейдем теперь к построению разностного аналога задачи Дирихле (1) в области $G+\Gamma$. Проведем два семейства параллельных прямых $x_1 = i_1 h_1$, $x_2 = i_2 h_2$, $i_1, i_2 = 0, \pm 1, \ldots$ (будем считать, что начало координат (0, 0) лежит внутри G). Точки $(i_1 h_1, i_2 h_2)$ назовем узлами. Узлы $x = (i_1 h_1, i_2 h_2)$ и $x' = (i_1' h_1, i_2' h_2)$ назовем соседними, если они лежат на прямой, параллельной либо оси x_1, либо оси x_2 и отстоят друг от друга на расстоянии шага (h_1 или h_2), так что $|i_1' - i_1| + |i_2' - i_2| = 1$. Узел $x = (i_1 h_1, i_2 h_2)$ называется регулярным, если его соседние узлы $((i_1 \pm 1) h_1, i_2 h_2)$, $(i_1 h_1, (i_2 \pm 1) h_2)$, образующие пятиточечный шаблон «крест», находятся либо внутри области G, либо на ее границе. Если хотя бы один из этих четырех соседних узлов не принадлежит $G+\Gamma$, то узел $x = x^*$ назовем нерегулярным. Обозначим $\mathring{\omega}_h$ множество всех регулярных узлов, ω_h^* — множество всех нерегулярных узлов. Точки пересечения прямых $x_1 = i_1 h_1$, $x_2 = i_2 h_2$ с границей Γ назовем граничными узлами. Множество всех граничных узлов назовем границей сетки и обозначим γ_h. Таким образом, области $G+\Gamma$ ставится в соответствие сетка $\bar{\omega}_h(G+\Gamma)$, т. е. множество точек $x \in \bar{\omega}_h$, где $\bar{\omega}_h = \mathring{\omega}_h + \omega_h^* + \gamma_h$ (рис. 89).

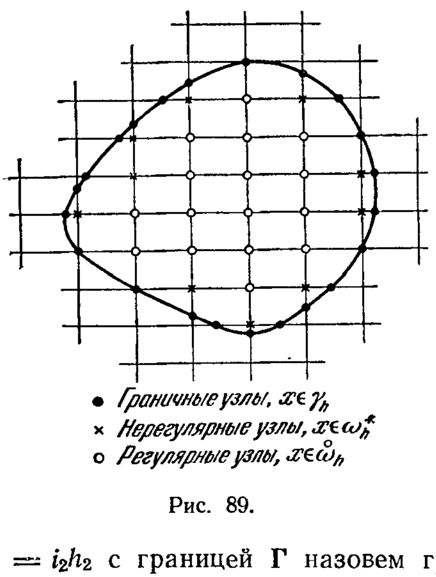


Рис. 89.

Будем предполагать, что сетка обладает свойством связности, т. е. любые два внутренних узла можно соединить ломаной, целиком лежащей внутри G и состоящей из звеньев, соединяющих узлы сетки и параллельных либо Ox_1, либо Ox_2.

В регулярных узлах пишем разностное уравнение (4), используя пятиточечный шаблон «крест» с шагами h_1 и h_2.

В граничных узлах $x \in \gamma_h$ задаем значение искомой функции

$$y = \mu(x), \quad x \in \gamma_h. \tag{5}$$

В нерегулярных узлах могут быть написаны различные условия.

1) Интерполяция нулевого порядка. Значение $y(x)|_{\omega_h^*}$ полагается равным $\mu(\bar{x})$ в ближайшем узле $\bar{x}$ границы γ_h:

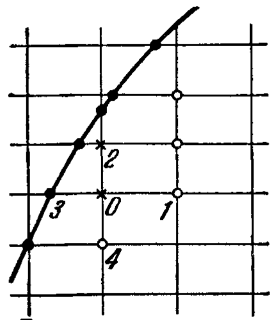
$$y(x) = \mu(\bar{x}) \quad \text{при} \quad x \in \omega_h^*. \tag{6}$$

2) Интерполяция первого порядка. Значение $y(x)|_{\omega_h^*}$ определяется при помощи линейной интерполяции. Например, для случая, изображенного на рис. 90, значение y_0 в узле O определяется по формуле

$$\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_{1-}}\right) y_0 = \frac{1}{h_1} y_1 + \frac{1}{h_{1-}} y_3, \tag{7}$$

которую можно записать в виде

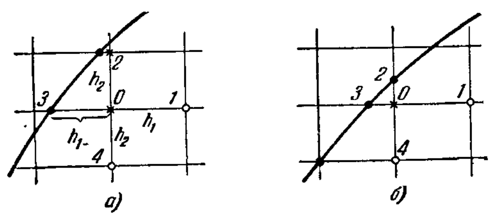
$$\Lambda_1 y = 0, \quad \text{где} \quad \Lambda_1 y = y_{\bar{x}_1 \hat{x}_1},$$



● Граничные узлы, $x \in \gamma_h$
× Нерегулярные узлы, $x \in \omega_h^*$
○ Регулярные узлы, $x \in \mathring{\omega}_h$

Рис. 90.

$\Lambda_1 u$ — аппроксимация оператора $L_1 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$ на неравномерной сетке (см. § 1, п. 2).



$$\Lambda_1 y_0 = \frac{1}{\hbar_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{y_0 - y_3}{h_{1-}}\right), \Lambda_2 y_0 = \frac{1}{\hbar_2}\left(\frac{y_2 - y_0}{h_{2+}} - \frac{y_0 - y_4}{h_2}\right), \Lambda y = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y$$

$$\hbar_1 = 0{,}5(h_{1-} + h_1), \quad \hbar_2 = 0{,}5(h_{2+} + h_2), \quad h_{1-} = \overline{03}, \quad h_{2+} = \overline{02}$$

Рис. 91.

3) Интерполяция второго порядка. В узле $x \in \omega_h^*$ пишется пятиточечная схема на нерегулярном шаблоне (на неравномерной сетке)

$$\Lambda^* y = y_{\bar{x}_1 \hat{x}_1} + y_{\bar{x}_2 \hat{x}_2} = -\varphi. \tag{8}$$

Нерегулярный шаблон изображен на рис. 91, *а* и 88, *в*. Узел *3* является граничным, *1*, *2*, *4* — внутренние. Пусть h_{1-} — расстояние между узлами *3* и *0*. Тогда $\Lambda_1 y = \frac{1}{\hbar_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{y_0 - y_3}{h_{1-}}\right) = y_{\bar{x}_1\hat{x}_1}$, $\hbar_1 = \frac{h_1 + h_{1-}}{2}$ (см. § 1, п. 2) $\Lambda_2 y = \frac{1}{h_2^2}(y_2 - 2y_0 + y_4) = y_{\bar{x}_2 x_2}$, $\Lambda y = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y$. Второй случай изображен на рис. 91, *б* и 88, *г*. Узлы *2* и *3* находятся на границе, h_{2+} — расстояние между узлами *2* и *0*. В этом случае

$$\Lambda_1 y = \frac{1}{\hbar_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \frac{y_0 - y_3}{h_{1-}}\right) = y_{\bar{x}_1\hat{x}_1},$$

$$\Lambda_2 y = \frac{1}{\hbar_2}\left(\frac{y_2 - y_0}{h_{2+}} - \frac{y_0 - y_4}{h_2}\right) = y_{\bar{x}_2\hat{x}_2},$$

где $\hbar_2 = 0{,}5(h_2 + h_{2+})$. Мы будем рассматривать 3-й способ задания условий на ω_h^*. Как будет показано ниже, он является наиболее точным.

Сформулируем теперь разностную краевую задачу, соответствующую задаче (1):

$$\Lambda y + \varphi = 0, \qquad x \in \mathring{\omega}_h, \tag{9}$$

$$\Lambda^* y + \varphi = 0, \qquad x \in \omega_h^*, \tag{10}$$

$$y = \mu, \qquad x \in \gamma_h. \tag{11}$$

Возникают два вопроса: 1) о разрешимости задачи, т. е. о существовании решения системы алгебраических уравнений (9) — (11); 2) о сходимости и точности схемы (9) — (11). Ответы на эти вопросы мы получим ниже при помощи принципа максимума.

Чтобы оценить погрешность, с которой мы определяем решение задачи (1) из уравнений (9) — (11), нужно оценить разность $y(x) - u(x) = z(x)$, где $y(x)$ — решение задачи (9) — (11), $u(x)$ — решение задачи (1), взятое в узлах сетки $\bar{\omega}_h$. Подставляя $y = z + u$ в (9) — (11), получим

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda z = -\psi, && \psi = \Lambda u + \varphi, && x \in \mathring{\omega}_h, \\ &\Lambda^* z = -\psi^*, && \psi^* = \Lambda^* u + \varphi, && x \in \omega_h^*, \\ &z = 0, && && x \in \gamma_h. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Из предыдущего следует, что $\psi = \Lambda u + \varphi = O(|h|^2)$, если $\varphi = f(x)$, $\psi^* = O(|h|)$ для условия (8), $\psi^* = O(1)$ для условия (7). Чтобы оценить решение задачи (9) — (11) через правую часть, нам понадобится принцип максимума.

2. Принцип максимума. Рассмотрим задачу (9) — (11). Разрешим уравнение (9) относительно y_0 (см. рис. 88, *а*):

$$2\left(\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}\right)y_0=\frac{1}{h_1^2}(y_1+y_3)+\frac{1}{h_2^2}(y_2+y_4)+\varphi_0, \quad x\in\omega_h. \tag{13}$$

Пусть *0* — нерегулярный узел (см. рис. 88, *в*). Тогда из уравнения $\Lambda^*y+\varphi=0$ следует

$$\frac{1}{\hbar_1}\left(\frac{y_1-y_0}{h_1}-\frac{y_0-y_3}{h_{1-}}\right)+\frac{1}{h_2}\left(\frac{y_2-y_0}{h_2}-\frac{y_0-y_4}{h_2}\right)=-\varphi_0,$$

$$2\left(\frac{1}{h_1h_{1-}}+\frac{1}{h_2^2}\right)y_0=\frac{1}{\hbar_1h_1}y_1+\frac{1}{h_2^2}(y_2+y_4)+\tilde{\varphi}_0, \tag{14}$$

где $\tilde{\varphi}_0=\varphi_0+\frac{1}{\hbar_1h_{-1}}\mu(3)$, h_{1-} — расстояние между узлом *0* и граничным узлом *3*, $\hbar_1=0{,}5(h_{1-}+h_1)$. Из (13) и (14) видно, что обе формулы могут быть записаны в виде $A(x)\,y(x)=\sum_{\xi\in Ш'(x)}B(x,\xi)\,y(\xi)+F(x)$ для всех $x\in\omega_h=\overset{\circ}{\omega}_h+\omega_h^*$, где суммирование проводится по всем узлам шаблона с центром в узле x, исключая сам узел x. Коэффициенты $A(x)$ и $B(x,\xi)$ удовлетворяют условиям $A(x)>0$, $B(x,\xi)>0$,

$$\sum_{\xi\in Ш'(x)}B(x,\xi)=A(x) \quad \text{при} \quad x\in\overset{\circ}{\omega}_h.$$

Если $y|_{\gamma_h}=0$, то по крайней мере один из коэффициентов $B(x,\xi)$ в пограничной зоне ω_h^* можно формально положить равным нулю, так что $\sum_\xi B(x,\xi)=A(x)-D(x)$, $D(x)>0$. Если, например, узел *3* (см. рис. 91, *а*) находится на γ_h, то $D(x)=D(0)=\frac{1}{\hbar_1h_{1-}}\geqslant\frac{1}{h_1^2}$, так как $\hbar_1=0{,}5(h_{1-}+h_1)\leqslant h_1$. Если же два узла *2* и *3* (см. рис. 91, *б*) являются граничными, то $D(x)=D(0)\geqslant\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}$, $B(0,2)=B(0,3)=0$. Таким образом, при $y|_{\gamma_h}=0$ в ω_h^* всегда выполнено условие

$$D(x)\geqslant\frac{1}{h^2}, \quad \text{где} \quad h=\max(h_1,h_2). \tag{15}$$

Итак, рассмотрим задачу: требуется найти функцию $y(x)$, определенную на $\bar{\omega}_h=\omega_h+\gamma_h$ и удовлетворяющую в ω_h уравнению

$$\left.\begin{aligned}&A(x)\,y(x)=\sum_{\xi\in Ш'(x)}B(x,\xi)\,y(\xi)+F(x), \quad x\in\omega_h,\\&A(x)>0, \quad B(x,\xi)>0, \quad \sum_{\xi\in Ш'(x)}B(x,\xi)\leqslant A(x).\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Справедлива следующая теорема (п р и н ц и п м а к с и м у м а):

Если $F(x) \leqslant 0$ всюду в ω_h, то решение задачи (16) (*не равное постоянной*) *не может принимать наибольшего положительного значения во внутренних узлах сетки ω_h. Если же $y(x) \not\equiv \not\equiv \mathrm{const}$ и $F(x) \geqslant 0$ в ω_h, то $y(x)$ не может принимать внутри ω_h наименьшего отрицательного значения.*

Доказательство. Пусть $F(x) \leqslant 0$ во всех внутренних узлах. Допустим, что $y(x)$ принимает положительное максимальное значение в некотором внутреннем узле. Так как $y(x) \not\equiv \mathrm{const}$, то существует такая точка $\bar{x} \in \omega_h$, в которой $y(\bar{x}) = \max y(x) = M_0 > 0$, а в соседнем узле $\bar{\xi} \in Ш'(\bar{x})$, имеем $y(\bar{\xi}) < M_0$. Уравнение (16) в узле $\bar{x}$ перепишем в виде

$$\left[A(\bar{x}) - \sum_{\xi} B(\bar{x}, \xi)\right] y(\bar{x}) + \sum_{\xi} B(\bar{x}, \xi)(y(\bar{x}) - y(\xi)) = F(\bar{x}). \tag{17}$$

Так как $\sum_{\xi} B(\bar{x}, \xi)(y(\bar{x}) - y(\xi)) \geqslant B(\bar{x}, \bar{\xi})(y(\bar{x}) - y(\bar{\xi})) > 0$, то из (17) и (16) следует $F(\bar{x}) > 0$, что противоречит условию $F(x) \leqslant 0$. Первая часть теоремы доказана.

Вторая часть доказывается аналогично.

Следствие 1. Если $F(x) \geqslant 0$, $x \in \omega_h$ и $y|_{\gamma_h} \geqslant 0$, то решение задачи (16) неотрицательно: $y(x) \geqslant 0$ всюду в $\bar{\omega}_h$. В самом деле, пусть хотя бы в одном узле $\bar{x} \in \omega_h$ функция $y(x)$ отрицательна; тогда она должна принимать отрицательное наименьшее значение во внутреннем узле. Это невозможно, в силу принципа максимума (если только $y(x) \not\equiv \mathrm{const}$).

Следствие 2. Если $F(x) \leqslant 0$, $x \in \omega_h$ и $y|_{\gamma_h} \leqslant 0$, то $y(x) \leqslant 0$, для всех $x \in \bar{\omega}_h$.

Следствие 3. Однородное уравнение

$$A(x) y(x) = \sum_{\xi \in Ш'(x)} B(x, \xi) y(\xi) \tag{18}$$

при однородном граничном условии $y|_{\gamma_h} = 0$ имеет только тривиальное решение.

В самом деле при $F \equiv 0$ следствия 1 и 2 дают соответственно $y(x) \geqslant 0$, $y(x) \leqslant 0$, т. е. $y(x) \equiv 0$.

Таким образом, разностная задача (16) имеет единственное решение.

Следствие 4. Для решения однородного уравнения (18) верна оценка

$$\| y \|_0 \leqslant \| y \|_{0,\gamma}, \tag{19}$$

где $\| y \|_0 = \max_{x \in \bar{\omega}_h} | y(x) |$, $\| y \|_{0,\gamma} = \max_{x \in \gamma_h} | y(x) |$ (решение уравнения (18) принимает наибольшее и наименьшее значение на границе γ_h).

Имеет место следующая теорема сравнения:

Пусть $y(x)$ — *решение уравнения* (16), *а* $\bar{y}(x)$ — *решение того же уравнения с правой частью* $\bar{F}(x) \geqslant 0$ *и граничным значением* $\bar{y}|_{\gamma_h} \geqslant 0$. *Если выполнены условия* $|F(x)| \leqslant \bar{F}(x)$ *при* $x \in \omega_h$, $|y(x)| \leqslant \bar{y}(x)$ *при* $x \in \gamma_h$, *то* $|y(x)| \leqslant \bar{y}(x)$ *для всех* $x \in \bar{\omega}_h$.

Следствие 1 сразу дает $\bar{y}(x) \geqslant 0$ всюду в $\bar{\omega}_h$. Функции $u = \bar{y} + y$, $v = \bar{y} - y$ удовлетворяют уравнению (16) с правыми частями $F_u = \bar{F} + F$, $F_v = \bar{F} - F$ и граничными значениями $u = \bar{y} + y|_\gamma$, $v = \bar{y} - y|_\gamma$. Так как по условию $F_u \geqslant 0$, $u|_\gamma \geqslant 0$ и $F_v \geqslant 0$, $v|_\gamma \geqslant 0$, то, в силу следствия 1, $u \geqslant 0$ или $y \geqslant -\bar{y}$, $v \geqslant 0$ или $y \leqslant \bar{y}$, т. е. $|y| \leqslant \bar{y}$ при $x \in \omega_h$.

3. Оценка решения неоднородного уравнения. Рассмотрим неоднородное уравнение

$$A(x)\,y(x) = \sum_{\xi} B(x, \xi)\,y(\xi) + F(x), \quad x \in \omega_h, \tag{20}$$

с однородным граничным условием

$$y|_\gamma = 0.$$

Пусть выполнены условия

$$B(x, \xi) > 0, \quad \sum_{\xi} B(x, \xi) = A(x) - D(x), \quad D(x) \geqslant \delta > 0 \tag{21}$$

$$\text{для всех } x \in \omega_h.$$

Тогда для решения задачи (20), (21) верна оценка

$$\|y\|_0 \leqslant \frac{\|F\|_0}{\delta}. \tag{22}$$

В силу теоремы сравнения $|y| \leqslant \bar{y}$, где $\bar{y}$ — решение задачи (20) с правой частью $\bar{F} = |F|$. Пусть $\bar{y}(x)$ принимает наибольшее значение в узле $\bar{x}$. Так как $\bar{y}(\bar{x}) > 0$, то

$$A(\bar{x})\,\bar{y}(\bar{x}) = \sum_{\xi} B(\bar{x}, \xi)\,\bar{y}(\xi) + |F(\bar{x})| \leqslant (A(\bar{x}) - D(\bar{x}))\,\bar{y}(\bar{x}) + |F(\bar{x})|,$$

$$\bar{y}(\bar{x}) \leqslant \frac{|F(\bar{x})|}{D(\bar{x})} \leqslant \left\| \frac{F}{D} \right\|_0 \qquad (\|\psi\|_0 = \max_{\bar{\omega}_h} |\psi|).$$

Учитывая, что $\|y\|_0 \leqslant \bar{y}(\bar{x})$ и $D \geqslant \delta$, получаем (22). Заметим, что фактически нами получена оценка

$$\|y\|_0 \leqslant \left\| \frac{F(x)}{D(x)} \right\|_0.$$

Предположим, что

$$D(x) \geqslant \delta > 0 \quad \text{при} \quad x \in \omega_h^* \quad \text{и} \quad D(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathring{\omega}_h, \tag{23}$$

$$F(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathring{\omega}_h, \qquad F(x) = F^* \quad \text{при} \quad x \in \omega_h^*. \tag{24}$$

Тогда для решения задачи (20), (23), (24) верна оценка

$$\|y\|_0 \leqslant \frac{1}{\delta}\|F^*\|_0. \tag{25}$$

В самом деле, $\bar{y}(x) \geqslant 0$ в силу принципа максимума и не может иметь наибольшего значения в узлах $x \in \overset{\circ}{\omega}_h$, в которых $F(x) = 0$. Предполагая, что $\bar{x} \in \omega_h^*$ есть точка, в которой достигается максимум, получим оценку (25).

Наибольшие трудности при оценке решения задачи (21) возникают в случае $D(x) \equiv 0$ при $x \in \omega_h$. В этом случае строится мажорантная функция $\bar{y}(x) \geqslant \|y\|_0$, удовлетворяющая уравнению (20) с правой частью $\bar{F}(x) \geqslant |F(x)|$.

Итак, если выполнено условие $D(x) \geqslant \delta > 0$, $x \in \omega_h$, то для решения задачи (20)—(21) верна оценка

$$\|y\|_0 \leqslant \|y\|_{0,\gamma} + \frac{\|F\|_0}{\delta}, \tag{26}$$

выражающая непрерывную зависимость решения от граничных данных и от правой части.

4. Сходимость решения разностной задачи Дирихле. Чтобы установить сходимость и порядок точности схемы (9) — (11), мы должны оценить решение задачи (12).

Погрешность аппроксимации в регулярных узлах $\psi = (\Lambda u + \varphi) - (Lu + f) = O(|h|^2)$, если $u \in C^{(4)}$, и в нерегулярных узлах $\psi = \psi^* = O(|h|)$.

Так как $\|\psi^*\|_0 = O(|h|)$, то для оценки z следует рассмотреть отдельно вклад в z за счет погрешности аппроксимации в нерегулярных узлах. Представим z в виде суммы $z = \overset{\circ}{z} + z^*$, где $\overset{\circ}{z}$ и z^* — решение задачи

$$\Lambda\overset{\circ}{z} = -\overset{\circ}{\psi}, \quad x \in \omega_h, \quad \overset{\circ}{z}\big|_{\gamma_h} = 0, \quad \overset{\circ}{\psi} = \begin{cases} \psi, & x \in \overset{\circ}{\omega}_h, \\ 0, & x \in \omega_h^*; \end{cases} \tag{27}$$

$$\Lambda z^* = -\psi^*, \quad x \in \omega_h, \quad z^*\big|_{\gamma_h} = 0, \quad \psi^* = \begin{cases} 0, & x \in \overset{\circ}{\omega}_h, \\ \psi, & x \in \omega_h^*. \end{cases} \tag{28}$$

Так как $z\big|_{\gamma_h} = 0$, то $D(x) \geqslant \frac{1}{h^2} = \delta > 0$ при $x \in \omega_h^*$ и $D(x) \geqslant 0$ при $x \in \overset{\circ}{\omega}_h$.

Пользуясь (25), получаем

$$\|z^*\|_0 \leqslant h^2\|\psi^*\|_0. \tag{29}$$

Для оценки $\overset{\circ}{z}$ воспользуемся теоремой сравнения. Построим мажорантную функцию

$$U(x) = K(R^2 - r^2), \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2,$$

где R — радиус круга с центром в точке $(0, 0) \in G$, содержащего область G, $K = \text{const} > 0$. Вычислим разностные производные

$$\Lambda_1 r^2 = (r^2)_{\bar{x}_1 x_1} = (x_1^2)_{\bar{x}_1 x_1} = \frac{(x_1 + h_1)^2 - 2x_1^2 + (x_1 - h_1)^2}{h_1^2} = 2,$$

$\Lambda_2 r^2 = 2$ при $x \in \overset{\circ}{\omega}_h$. В нерегулярных узлах также имеем $\Lambda_1 r^2 = 2$. Таким образом,

$$\Lambda U = -K\Lambda r^2 = -4K \quad \text{при} \quad x \in \omega_h = \overset{\circ}{\omega}_h + \omega_h^*.$$

Выберем K так, чтобы $\|\overset{\circ}{\psi}\|_0 \leqslant 4K$. Для этого достаточно положить $K = \frac{1}{4}\|\overset{\circ}{\psi}\|_0$. Учитывая, что $U \geqslant 0$ при $x \in \gamma_h$, $U \leqslant KR^2 = \frac{1}{4} R^2 \|\overset{\circ}{\psi}\|_0$ и пользуясь теоремой сравнения, находим

$$\|\overset{\circ}{z}\|_0 \leqslant \|U\|_0 \leqslant \frac{1}{4} R^2 \|\overset{\circ}{\psi}\|. \tag{30}$$

Объединяя неравенства (29) и (30) и учитывая, что $\|z\|_0 \leqslant \|\overset{\circ}{z}\|_0 + \|z^*\|_0$, получаем

$$\|z\|_0 \leqslant h^2 \|\psi^*\|_0 + \frac{1}{4} R^2 \|\overset{\circ}{\psi}\|_0. \tag{31}$$

Тем самым доказана теорема:

Для решения задачи (12) *имеет место оценка* (31).

Из (31) видно, что если $u \in C^{(2)}(\bar{G})$, т. е. решение задачи имеет непрерывные в замкнутой области $\bar{G} = G + \Gamma$ вторые производные, так что $\|\overset{\circ}{\psi}\|_0 = \rho(|h|)$, $\|\psi^*\|_0 = \rho(|h|)$, где $\rho(|h|) \to 0$ при $|h| \to 0$, то схема (9) — (11) сходится:

$$\|z\|_0 = \|y - u\|_0 = \rho(|h|). \tag{32}$$

Если $u \in C^{(4)}(G)$, то справедливы оценки

$$\|\overset{\circ}{\psi}\|_0 \leqslant \frac{M_4}{12}|h|^2, \quad \|\psi^*\|_0 \leqslant \frac{2}{3} M_3 h, \quad \text{где} \quad M_s = \max_{\alpha, \bar{G}} \left| \frac{\partial^s u}{\partial x_\alpha^s} \right|, \tag{33}$$

$(\alpha = 1, 2,\ s = 3, 4)$. Применяя неравенство (31), видим, что для решения задачи (12) верна оценка

$$\|z\|_0 = \|y - u\|_0 \leqslant \frac{2}{3} M_3 h^3 + \frac{M_4 R^2}{48} |h|^2,$$

т. е. схема (9) — (11) равномерно сходится со скоростью $O(|h|^2)$ (имеет 2-й порядок точности).

Заметим, что если y на ω_h^* задавать при помощи линейной интерполяции (см. (7)), то $\psi^* = O(1)$ и оценка (31) дает

$$\|y - u\|_0 = O(|h|^2), \tag{34}$$

т. е. и в этом случае схема (9) имеет 2-й порядок точности.

5. Решение разностных уравнений методом простой итерации. Для определения решения разностной задачи Дирихле (9) — (11) мы получаем систему линейных алгебраических уравнений большого порядка, равного числу внутренних узлов сетки. При точном решении этой системы известными методами линейной алгебры требуется большое число арифметических действий и большой объем оперативной памяти машины. Поэтому систему уравнений решают итерационными методами, учитывающими специальный вид матрицы системы.

В этом пункте мы рассмотрим метод простой итерации (метод Якоби). Пусть $h_1 = h_2 = h$. Запишем уравнение (9) на шаблоне (рис. 88, *а*). В регулярном узле имеем:

$$\overset{s+1}{v_0} = \frac{\overset{s}{v_1} + \overset{s}{v_2} + \overset{s}{v_3} + \overset{s}{v_4} + h^2\varphi_0}{4}, \tag{35}$$

где $s = 0, 1, 2, \ldots$ — номер итерации. В нерегулярном узле (см. рис. 91, *а*) в случае, когда узел $3 \in \gamma_h$:

$$\overset{s+1}{v_0} = \frac{1}{4}\left[\frac{hh_-}{\hbar^2}\overset{s}{v_1} + \frac{h_-}{\hbar}(\overset{s}{v_2} + \overset{s}{v_4})\right] + \frac{h^2h_-}{4\hbar}\varphi_0 + \frac{h^2}{4\hbar^2}\mu_3, \tag{36}$$

где $\mu_3 = \mu(3)$ — значение $y|_{\gamma_h} = \mu$ в узле 3.

При $s = 0$ выбирается начальное приближение $\overset{\circ}{v} = u_0$. Пусть y — точное решение задачи (9)—(11), $\overset{s}{v}$ — s-я итерация. Итерационный процесс сходится, если разность $\overset{s}{v} - y = \overset{s}{z}$ стремится (по некоторой норме) к нулю при $s \to \infty$. Подставляя $\overset{s}{v} = y + \overset{s}{z}$ в (35) и учитывая, что $y_0 = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + h^2\varphi_0)$, получим для $\overset{s}{z}$ однородное уравнение

$$\overset{s+1}{z_0} = \frac{\overset{s}{z_1} + \overset{s}{z_2} + \overset{s}{z_3} + \overset{s}{z_4}}{4}, \quad x \in \overset{\circ}{\omega}_h, \tag{37}$$

$$\overset{s+1}{z_0} = \frac{1}{4}\left[\frac{hh_-}{\hbar^2}\overset{s}{z_1} + \frac{h_-}{\hbar}(\overset{s}{z_2} + \overset{s}{z_4})\right], \quad x \in \omega_h^*, \tag{38}$$

с условиями $z|_{\gamma_h} = 0$ и начальным условием $\overset{\circ}{z} = y - u_0$, где $\overset{\circ}{z}$ есть погрешность, допускаемая при выборе начального приближения.

Чтобы оценить $\overset{s}{z}$, надо выбрать норму $\|\cdot\|$, например:

$$\|z\|_{0,\bar{\omega}} = \max_{x \in \bar{\omega}_h} |z|, \quad \|z\|_2 = \left(\sum_{\omega_h} z^2(i_1h_1, i_2h_2)\,h_1h_2\right)^{1/2}.$$

Будем говорить, что метод итераций (35) сходится, если $\|y-\overset{s}{v}\|\to 0$ при $s\to\infty$. Обычно задают точность $\varepsilon>0$, с которой надо найти приближенное решение; при этом ставится требование

$$\|\overset{s}{v}-y\|\leqslant\varepsilon\|u_0-y\|. \tag{39}$$

Если итерации сходятся со скоростью геометрической прогрессии, т. е. $\|\overset{s}{v}-y\|\leqslant\rho\|\overset{s-1}{v}-y\|\leqslant\rho^s\|u_0-y\|$, $0<\rho<1$, то условие (39) будет выполнено, если $\rho^s<\varepsilon$. Отсюда следует, что для уменьшения начальной невязки $\|u_0-y\|$ в $\frac{1}{\varepsilon}$ раз достаточно сделать $s_0\geqslant\ln\frac{1}{\varepsilon}\Big/\ln\frac{1}{\rho}$ итераций.

Метод простой итерации сходится со скоростью геометрической прогрессии по норме $\|\cdot\|_2$ (в среднем) в случае, когда $\overline{G}=(0\leqslant x_\alpha\leqslant 1,\ \alpha=1,\ 2)$ — квадрат и $h_1=h_2=h$, знаменатель $\rho=1-2\sin^2\frac{\pi h}{2}<1$ $\left(\text{при } h<\frac{1}{2}\right)$ зависит от шага h сетки. При малых h $\ln\frac{1}{\rho}\approx\frac{\pi^2h^2}{2}$ и, следовательно, $s_0\approx\frac{2}{\pi^2h^2}\ln\frac{1}{\varepsilon}$, т. е. число итераций пропорционально числу узлов $N=\frac{1}{h^2}$ сетки. Так как на вычисление одной итерации по формулам (35), (36) затрачивается $O\left(\frac{1}{h^2}\right)$ действий, то, чтобы получить решение задачи (9) — (11) с точностью ε, надо затратить $O\left(\frac{1}{h^4}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)$ арифметических действий. Заметим, что погрешность в определении решения исходной задачи есть сумма погрешности $O(h^2)$ самой разностной схемы (9) и погрешности $O(\varepsilon)$ метода итераций для решения (9). Чтобы обе эти погрешности были одного порядка, естественно выбирать $\varepsilon=O(h^2)$. Таким образом, для метода простой итерации

$$s_0=O\left(\frac{1}{h^2}\ln\frac{1}{h}\right).$$

В настоящее время имеются методы, которые обеспечивают точность ε:

а) для прямоугольника с числом итераций $s_0\approx\ln\frac{1}{h}\ln\frac{1}{\varepsilon}$ и общим объемом работы $O\left(\frac{1}{h^2}\ln\frac{1}{h}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)$;

б) для непрямоугольных областей с $s_0\approx\frac{1}{h}\ln\frac{1}{\varepsilon}$ и общим объемом работы $O\left(\frac{1}{h^3}\ln\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Это — методы переменных направлений, которые мы рассмотрим в § 4, п. 3.

Сравнение с ними показывает, что метод простой итерации является слишком трудоемким. Поэтому, несмотря на свою простоту, он в настоящее время почти не используется при решении разностных задач для эллиптических уравнений.

§ 4. Разностные методы решения задач с несколькими пространственными переменными

1. Многомерные схемы. В § 2 мы рассматривали разностные схемы для решения задачи Дирихле в случае двух измерений (x_1, x_2). При написании разностных схем для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f \tag{1}$$

первым шагом является аппроксимация оператора Лапласа. Пусть

$$\Lambda y = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y, \quad \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \tag{2}$$

— пятиточечный оператор на ω_h с шагами h_1 и h_2.

По аналогии с § 2, п. 2 двухслойные схемы для (1) возьмем в виде

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \Lambda(\sigma y^{j+1} + (1-\sigma) y^j) + \varphi, \tag{3}$$

$$y^{j+1} = y^{j+1}_{i_1, i_2} = y(i_1 h_1, i_2 h_2, t_{j+1}).$$

Пусть $\bar{G}$ — область на плоскости (x_1, x_2), ограниченная кривой Γ. Введем в $\bar{G} = G + \Gamma$ сетку $\bar{\omega}_h$, описанную в § 3. Будем рассматривать задачу

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(x, t), \quad x \in G, \quad 0 < t \leqslant T, \\ &u(x, 0) = u_0(x), \quad u|_\Gamma = \mu(x, t). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Ей поставим в соответствие разностную схему (3) с краевыми условиями

$$y|_{\gamma_h} = \mu, \quad y(x, 0) = u_0(x). \tag{5}$$

По аналогии с § 2 устанавливается, что схема (3) устойчива при

$$\sigma \geqslant \frac{1}{2} - \frac{h^2}{8\tau} \text{ (если } h_1 = h_2 = h).$$

Отсюда следует, что явная схема $(\sigma = 0)$

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \Lambda y^j + \varphi^{j+1} \quad \text{или} \quad y^{j+1} = y^j + \tau(\Lambda y^j + \varphi^{j+1}) \tag{6}$$