

Это — методы переменных направлений, которые мы рассмотрим в § 4, п. 3.

Сравнение с ними показывает, что метод простой итерации является слишком трудоемким. Поэтому, несмотря на свою простоту, он в настоящее время почти не используется при решении разностных задач для эллиптических уравнений.

§ 4. Разностные методы решения задач с несколькими пространственными переменными

1. Многомерные схемы. В § 2 мы рассматривали разностные схемы для решения задачи Дирихле в случае двух измерений (x_1, x_2) . При написании разностных схем для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f \quad (1)$$

первым шагом является аппроксимация оператора Лапласа. Пусть

$$\Delta y = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y, \quad \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (2)$$

— пятиточечный оператор на ω_h с шагами h_1 и h_2 .

По аналогии с § 2, п. 2 двухслойные схемы для (1) возьмем в виде

$$\begin{aligned} \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} &= \Lambda(\sigma y^{j+1} + (1 - \sigma)y^j) + \varphi, \\ y^{j+1} &= y_{i_1, i_2}^{j+1} = y(i_1 h_1, i_2 h_2, t_{j+1}). \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть \bar{G} — область на плоскости (x_1, x_2) , ограниченная кривой Γ . Введем в $\bar{G} = G + \Gamma$ сетку $\bar{\omega}_h$, описанную в § 3. Будем рассматривать задачу

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u + f(x, t), \quad x \in G, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u|_\Gamma = \mu(x, t). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Ей поставим в соответствие разностную схему (3) с краевыми условиями

$$y|_{\Gamma_h} = \mu, \quad y(x, 0) = u_0(x). \quad (5)$$

По аналогии с § 2 устанавливается, что схема (3) устойчива при

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{8\tau} \quad (\text{если } h_1 = h_2 = h).$$

Отсюда следует, что явная схема ($\sigma = 0$)

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \Lambda y^j + \varphi^{j+1} \quad \text{или} \quad y^{j+1} = y^j + \tau(\Lambda y^j + \varphi^{j+1}) \quad (6)$$

условно устойчива при $\tau \leq \frac{h^2}{4}$ (в одномерном случае при $\tau \leq h^2/2$, см. § 2). Неявные схемы безусловно устойчивы при $\sigma \geq 1/2$. В случае трех измерений, когда $x = (x_1, x_2, x_3)$, в (3) нужно подставить

$$\Lambda y = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y + \Lambda_3 y, \quad \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Условие устойчивости имеет вид

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau} \text{ (при } h_1 = h_2 = h_3 = h).$$

Явная схема ($\sigma = 0$) устойчива при $\tau \leq h^2/6$. Порядок аппроксимации $\psi = (\Lambda u + \varphi - u_{\bar{t}}) - \left(Lu + f - \frac{\partial u}{\partial t} \right)^{t+1/2}$ зависит от σ : $\psi = O(|h|^2 + \tau^2)$ при $\sigma = 0,5$, $\psi = O(|h|^2 + \tau)$ при $\sigma \neq 0,5$ ($|h|^2 = \sum_{\alpha=1}^p h_\alpha^2$, $p = 2, 3$) при любом числе измерений.

Краевые условия на γ_h ставятся так же, как и в § 3 для задачи Дирихле. В нерегулярных узлах ω_h^* оператор Λ ($\Lambda \sim \Delta$) пишется на неравномерной сетке. Для схемы с опережением ($\sigma = 1$) справедлив принцип максимума. Она равномерно сходится со скоростью $O(|h|^2 + \tau)$.

Не представляет труда написание (по аналогии с § 2 и 3) схем повышенного порядка $O(|h|^4 + \tau^2)$ аппроксимации; например, при $p = 2$ ($x = (x_1, x_2)$) схема $O(|h|^4 + \tau^2)$ имеет вид

$$y_{\bar{t}} = \Lambda_1(\sigma_1 y + (1 - \sigma_1) \hat{y}) + \Lambda_2(\sigma_2 y + (1 - \sigma_2) \hat{y}) \quad (f = 0),$$

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{2} - \frac{h_\alpha^2}{12\tau}, \quad \alpha = 1, 2 \text{ (} G \text{ — прямоугольник)}.$$

В случае уравнений с переменными коэффициентами для получения схем можно воспользоваться методом баланса на сетке ω_h . Пусть, например, дано уравнение теплопроводности

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Lu + f(x, t), \quad x = (x_1, \dots, x_p), \quad L = L_1 + L_2 + \dots + L_p, \\ L_\alpha u &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right), \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Пусть $p = 2$. Возьмем объем $\left(\left(i_1 - \frac{1}{2} \right) h_1 \leq x_1 \leq \left(i_1 + \frac{1}{2} \right) h_1, \right. \\ \left. \left(i_2 - \frac{1}{2} \right) h_2 \leq x_2 \leq \left(i_2 + \frac{1}{2} \right) h_2, \quad t_j \leq t \leq t_{j+1} \right)$ и напомним для него

уравнение баланса тепла

$$\int_g \int (u^{j+1} - u^j) dx_1 dx_2 = \\ = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_C (W_1 dx_2 + W_2 dx_1) + \int_g \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(x, t) dx_1 dx_2,$$

где $g = \left(\left(i_1 - \frac{1}{2} \right) h_1 \leq x_1 \leq \left(i_1 + \frac{1}{2} \right) h_1, \quad \left(i_2 - \frac{1}{2} \right) h_2 \leq x_2 \leq \left(i_2 + \frac{1}{2} \right) h_2 \right)$ — прямоугольник, C — его граница, $W_\alpha = -k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}$ — тепловой поток по направлению оси Ox_α . Заменяя интегралы и потоки разностными выражениями по аналогии с п. 8 § 2, приходим к схеме вида:

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \Lambda(t^{j+1/2})(\sigma y^{j+1} + (1 - \sigma)y^j) + \varphi^{j+1} \quad (8)$$

или

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\tau} = \sigma(\Lambda y)^{j+1} + (1 - \sigma)(\Lambda y)^j + \varphi^{j+1}, \quad (9)$$

где

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad \Lambda_\alpha y = (a_\alpha y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}, \quad (10)$$

т. е. Λ_α есть аналог разностного оператора $\Lambda y = (ay_{\bar{x}})_x$, аппроксимирующего $Lu = (ku')'$ (см. § 2, п. 7). Коэффициент a_α определяется из выражений вида (61) § 2, например:

$$a_1 = (a_1)_{i_1, i_2} = k_1 \left(\left(i_1 - \frac{1}{2} \right) h_1, i_2 h_2, t \right),$$

$$a_2 = (a_2)_{i_1, i_2} = k_2 \left(i_1 h_1, \left(i_2 - \frac{1}{2} \right) h_2, t \right) \text{ и т. д.}$$

Для $\varphi = \varphi^{j+1}$ можно взять формулу $\varphi^{j+1} = f(i_1 h_1, i_2 h_2, t_{j+1/2})$. Если коэффициенты k_α имеют разрывы при $x_\alpha = \text{const}$, $\alpha = 1, 2$, то простейшее выражение для a_α имеет вид

$$a_1 = \frac{1}{4} [k_1(i_1 h_1 - 0, i_2 h_2 - 0, t) + k_1(i_1 h_1 - 0, i_2 h_2 + 0, t) + \\ + k_1(i_1 h_1 + 0, i_2 h_2 + 0, t) + k_1(i_1 h_1 + 0, i_2 h_2 - 0, t)]$$

и аналогично для a_2 .

Для полученных схем (8) справедливы результаты § 2, п. 8.

2. Экономичные схемы. При решении методом сеток многомерных уравнений большое значение имеет объем вычислительной работы, т. е. число арифметических действий для решения задачи с требуемой точностью. Посмотрим с этой точки зрения на схемы, полученные в предыдущем пункте.

Пусть G — квадрат ($0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 1$), $\omega_h = \{(i_1 h, i_2 h)$, $i_1, i_2 = 0, 1, \dots, N\}$ — сетка с шагом h . Она имеет $(N-1)^2 = O\left(\frac{1}{h^2}\right)$ внутренних узлов. Рассмотрим явную схему (6) и неявную схему (3) при $\sigma = 1$. Обе схемы имеют один и тот же порядок точности. Число Q действий для определения y^{j+1} во всех узлах ω_h на новом слое $t = t_{j+1}$ пропорционально числу $(N-1)^2$ узлов сетки ω_h , т. е.

$$Q_{\text{яв}} = O\left(\frac{1}{h^2}\right).$$

В случае неявной схемы (3) при $\sigma = 1$ для определения y^{j+1} нужно решить систему $(N-1)^2$ уравнений. Это требует не менее чем $Q_{\text{неяв}} = O\left(\frac{1}{h^4}\right)$ действий, т. е. значительно больше, чем для явной схемы.

С другой стороны, неявная схема ($\sigma = 1$) устойчива при любых τ и h , а явная схема устойчива лишь при $\tau \leq \frac{1}{4} h^2$.

Возникает вопрос: нельзя ли найти такие схемы, которые сочетали бы лучшие качества явной (объем работы $Q = O\left(\frac{1}{h^2}\right)$) и неявной (безусловная устойчивость) схем?

Такие схемы называют экономичными.

В последние годы предложено много экономичных схем для различных задач математической физики¹⁾. Экономичные схемы позволили найти численное решение ряда сложнейших задач физики и техники, в отношении которых еще несколько лет назад были сомнения в возможности их приближенного решения даже с использованием самых совершенных быстродействующих вычислительных машин.

В случае одного пространственного переменного, как мы видели в § 2, неявные схемы приводят к системе уравнений (105), которые решаются методом прогонки. При этом для нахождения y^{j+1} требуется $O\left(\frac{1}{h}\right)$ операций. Рассмотрим сетку $\bar{\omega}_h$ с шагом $h = 1/N$ в квадрате G ($0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 1$). Сетку можно представить как совокупность узлов, расположенных на «строках» $i_2 = 0, 1, 2, \dots, N$, или как совокупность узлов, рас-

¹⁾ D. W. Peaceman, H. H. Rachford, The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. J. Industr. Math. Soc. 3, № 1, 28—41 (1955); J. Douglas, On numerical integration of $u_{xx} + u_{yy} = u_t$ implicit methods. J. Industr. Math. Soc. 3, 42—65 (1955); Н. Н. Яненко, Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности, Докл. АН СССР 125, № 6, 1207—1210 (1959); Е. Г. Дьяконов, Разностные схемы с расщепляющимся оператором для многомерных нестационарных задач, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2, № 4 (1962); А. А. Самарский, Об одном экономичном разностном методе решения многомерного параболического уравнения в произвольной области, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2, № 5 (1962).

положенных на «столбцах» $i_1 = 0, 1, 2, \dots, N$. Всего имеется $N + 1$ строка и $N + 1$ столбец. Число узлов в каждой строке (столбце) равно $N + 1$.

Если на каждой строке (столбце) решать задачу вида (105) из § 2 методом прогонки при фиксированном $i_2(i_1)$, то для нахождения решения на всех строках (столбцах), т. е. во всех узлах сетки, потребуется число действий $O\left(\frac{1}{h^2}\right)$, пропорциональное числу узлов $\bar{\omega}_h$. Основная идея экономичных методов и состоит в последовательном решении одномерных задач вида (105) из § 2 вдоль строк и вдоль столбцов.

Наиболее четко выражает эту идею продольно-поперечная схема (неявный метод переменных направлений):

$$\frac{y^{j+1/2} - y^j}{0,5\tau} = \Lambda_1 y^{j+1/2} + \Lambda_2 y^j + f^{j+1/2}, \quad (11)$$

$$\frac{y^{j+1} - y^{j+1/2}}{0,5\tau} = \Lambda_2 y^{j+1} + \Lambda_1 y^{j+1/2} + f^{j+1/2}. \quad (12)$$

Переход от слоя j к слою $j + 1$ совершается в два этапа с шагами $0,5\tau$: сначала решается уравнение (11), неявное по направлению x_1 и явное по x_2 , затем уравнение (12), явное по x_1 и неявное по x_2 . Значение $y^{j+1/2}$ является промежуточным.

Формулируем краевые и начальные условия для схемы (11) — (12) в случае, когда $G = \{0 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$ — квадрат, $\bar{\omega}_h = \{(i_1 h_1, i_2 h_2)\}$ — сетка с шагами h_1, h_2 . Если краевые условия в (4) не зависят от t , т. е. $\mu = \mu(x)$, то полагаем $y^{j+1/2}|_{v_h} = y^{j+1}|_{v_h} = \mu(x)|_{v_h}$. Если же $\mu = \mu(x, t)$ зависит от t , то для промежуточного значения $y^{j+1/2}$ краевые условия при $i_1 = 0, N_1$ задаются по формуле

$$y^{j+1/2} = \frac{1}{2}(\mu^{j+1} + \mu^j) - \frac{1}{4}\tau\Lambda_2(\mu^{j+1} - \mu^j) = \bar{\mu} \text{ при } i_1 = 0, N_1, \quad (13)$$

для y^{j+1} ставятся обычные условия

$$y^{j+1} = \mu^{j+1} \text{ при } i_2 = 0, N_2. \quad (14)$$

Присоединяя сюда начальное условие

$$y^0 = u_0(x) \text{ при } j = 0, \quad (15)$$

получаем разностную задачу (11) — (15), соответствующую задаче (4).

Продольно-поперечная схема (11) — (12) безусловно устойчива (при любых τ и h) и имеет точность $O(\tau^2 + h^2)$.

Подставим в (11), (12) вместо $\Lambda_1 y$ и $\Lambda_2 y$ их выражения

$$\Lambda_1 y = (\Lambda_1 y)_{i_1, i_2} = \frac{1}{h_1^2} (y_{i_1-1} - 2y_{i_1} + y_{i_1+1}),$$

$$\Lambda_2 y = (\Lambda_2 y)_{i_1, i_2} = \frac{1}{h_2^2} (y_{i_2-1} - 2y_{i_2} + y_{i_2+1})$$

(пишем только тот индекс (i_1 или i_2), который меняется). Тогда для $y^{j+1/2} = \bar{y}$ и $y^{j+1} = y$ получим краевые задачи

$$\left. \begin{aligned} 0,5\gamma_1 y_{i_1-1}^{j+1/2} - (1 + \gamma_1) y_{i_1}^{j+1/2} + 0,5\gamma_1 y_{i_1+1}^{j+1/2} &= -F_{i_1}^{j+1/2}, \\ i_1 &= 1, 2, \dots, N_1 - 1 \quad (0 < i_2 < N_2), \\ y_{0, i_2}^{j+1/2} = \bar{\mu} |_{x_1=0}, \quad y_{N_1, i_2}^{j+1/2} = \bar{\mu} |_{x_1=1}, \quad \gamma_1 &= \frac{\tau}{h_1^2}, \\ F_{i_1}^{j+1/2} &= 0,5\gamma_2 (y_{i_2-1}^j + y_{i_2+1}^j) + (1 - \gamma_2) y_{i_2}^j + 0,5\tau f^{j+1/2}; \end{aligned} \right\} (16)$$

и

$$\left. \begin{aligned} 0,5\gamma_2 y_{i_2-1}^{j+1} - (1 + \gamma_2) y_{i_2}^{j+1} + 0,5\gamma_2 y_{i_2+1}^{j+1} &= -F_{i_2}^{j+1}, \\ i_2 &= 1, 2, \dots, N_2 - 1 \quad (0 < i_1 < N_1), \\ y_{i_1, 0}^{j+1} = \mu^{j+1} |_{x_2=0}, \quad y_{i_1, N_2}^{j+1} = \mu^{j+1} |_{x_2=1}, \quad \gamma_2 &= \tau/h_2^2, \\ F_{i_2}^{j+1} &= 0,5\gamma_1 (y_{i_1-1}^{j+1/2} + y_{i_1+1}^{j+1/2}) + (1 - \gamma_1) y_{i_1}^{j+1/2} + 0,5\tau f^{j+1/2}. \end{aligned} \right\} (17)$$

Здесь $\bar{\mu}$ определяется по формуле (13). Пусть y^j и, следовательно, $F^{j+1/2}$ известны. Фиксируем $i_2 = 1$ и на этой строке по формулам прогонки решаем краевую задачу (16). Полагая затем $i_2 = 2, \dots, N_2 - 1$, последовательно найдем $y^{j+1/2}$ во всех узлах ω_h . После этого вычисляем $F^{j+1/2}$ и вдоль столбцов $i_1 = 1, 2, \dots, N_1 - 1$ решаем краевые задачи (17). В результате получаем значение y^{j+1} на новом слое. При переходе от слоя $j+1$ к слою $j+2$ процедура счета повторяется.

Из сказанного выше ясно, что при переходе от слоя j к слою $j+1$ затрачивается $O\left(\frac{1}{h^2}\right)$ арифметических действий. Чтобы найти y^0 при $t_0 = j_0\tau$ по начальным данным, требуется, очевидно, $O\left(\frac{1}{h^2}\right)j_0 = O\left(\frac{1}{h^2\tau}\right)$ операций, т. е. число операций пропорционально числу использованных узлов пространственно-временной сетки $\omega_{h\tau} = \{(i_1 h_1, i_2 h_2, j\tau)\}$.

В случае уравнения (7) с переменными коэффициентами в (11) — (12) следует подставить, согласно (67) § 2, выражения $\Lambda_\alpha y = (a_\alpha(x, t_{j+0,5}) y_{\bar{x}_\alpha})_{x_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$, $L_{\alpha i} u - \Lambda_{\alpha i} u = O(h_\alpha^2)$.

Операторы Λ_1 и Λ_2 действуют только вдоль строк и столбцов соответственно. Поэтому схемой (11) — (12) можно пользоваться и для произвольной области, полагая, например, $\bar{\mu} = 0,5(\mu^j + \mu^{j+1})$. Если $G = G_1$ область, составленная из прямоугольников, то при

$$\bar{\mu} = 0,5(\mu^j + \mu^{j+1}) - 0,25\tau L_2(\mu^{j+1} - \mu^j)$$

продольно-поперечная схема имеет точность $O(\tau^2 + |h|^2)$.

Схему (11) — (12) нельзя формально обобщить на случай трех пространственных переменных x_1, x_2, x_3 . Так построенная схема неустойчива.

Универсальным методом, пригодным для решения уравнения теплопроводности с переменными и даже разрывными коэффициентами в произвольной области G любого числа измерений, является локально-одномерный метод. В основе его лежит понятие суммарной аппроксимации схемы. Пусть дано уравнение (7). Будем искать его приближенное решение v^{j+1} при $t = t_{j+1}$, последовательно (при $\alpha = 1, 2, \dots, p$) решая одномерные уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} = L_{\alpha} v_{(\alpha)} + f_{\alpha}, \quad t_j \leq t \leq t_{j+1}, \quad \sum_{\alpha=1}^p f_{\alpha} = f, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \quad (18)$$

с условиями $v_{(\alpha)}^j = v_{(\alpha-1)}^{j+1}$, $\alpha = 2, \dots, p$, $v_{(1)}^j = v^j$ и естественными краевыми условиями. Решением этой задачи, которую мы условно запишем в виде $L_1 \rightarrow L_2 \rightarrow \dots \rightarrow L_p$, является $v^{j+1} = v_{(p)}^{j+1}$. Зная $v^0 = u_0(x)$, находим v^{j+1} .

Каждое из уравнений номера α заменим двухслойной шести-точечной схемой с весом σ_{α} (при этом $\frac{\partial v_{(\alpha)}}{\partial t} \approx \frac{v_{(\alpha)}^{j+1} - v_{(\alpha)}^j}{\tau}$, $L_{\alpha} \sim \Lambda_{\alpha}$, $f_{\alpha} \sim \Phi_{\alpha}$) вида

$$\frac{v_{(\alpha)}^{j+1} - v_{(\alpha)}^j}{\tau} = \Lambda_{\alpha} [\sigma_{\alpha} v_{(\alpha)}^{j+1} + (1 - \sigma_{\alpha}) v_{(\alpha)}^j] + \Phi_{\alpha}.$$

Учитывая, что $v_{(\alpha)}^j = v_{(\alpha-1)}^{j+1}$, заменяя v на y и опуская индекс $j+1$, получим последовательность схем для одномерных уравнений теплопроводности (одномерных схем), которую мы назовем локально-одномерной схемой и условно запишем в виде $\Lambda_1^{(\sigma_1)} \rightarrow \Lambda_2^{(\sigma_2)} \rightarrow \dots \rightarrow \Lambda_p^{(\sigma_p)}$. Напишем локально-одномерную схему для случая $\sigma_{\alpha} = 1$ ($\Lambda_1^{(1)} \rightarrow \Lambda_2^{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow \Lambda_p^{(1)}$):

$$\frac{y_{(\alpha)} - y_{(\alpha-1)}}{\tau} = \Lambda_{\alpha} y_{(\alpha)} + \Phi_{\alpha}, \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}, \quad (19)$$

$$\alpha = 1, 2, \dots, p, \quad y_{(0)} = y^j, \quad y_{(p)} = y^{j+1}.$$

Здесь $\Lambda_{\alpha} y = (a_{\alpha}(x, t^*) y_{\bar{x}_{\alpha}})_{x_{\alpha}}$, $\Phi_{\alpha} = \Phi_{\alpha}(x, t^*)$, где t^* — любое значение t на отрезке $t_j \leq t \leq t_{j+1}$, например $t^* = t_{j+1}$. Правые части Φ_{α} выбираются так, что $\Phi_1 + \Phi_2 + \dots + \Phi_p = f(x, t^*) + O(|h|^2 + \tau)$, например $\Phi_1 = \Phi_2 = \dots = \Phi_{p-1} = 0$, $\Phi_p = f$.

Формулируем краевые условия для $y_{(\alpha)}$. Пусть G — p -мерная область в пространстве $x = (x_1, \dots, x_p)$, Γ — ее граница.

Построим по аналогии с § 3, п. 2 в $G + \Gamma$ сетку $\bar{\omega}_h$. Возьмем любую точку $x \in \bar{\omega}_h$ и проведем через нее прямую C_α , параллельную оси Ox_α . Рассмотрим тот простейший случай, когда C_α пересекает Γ в двух точках P_α^- и P_α^+ . Множество всех точек P_α^- и P_α^+ обозначим γ_h^α , $\alpha = 1, 2, \dots, p$. Если $G = G_0 = \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ — прямоугольник, то γ_h^α состоит из узлов $(i_1 h_1; i_2 h_2)$, лежащих на сторонах $x_\alpha = 0$ ($i_\alpha = 0$) и $x_\alpha = l_\alpha$ ($i_\alpha = N_\alpha$), $\alpha = 1, 2$. Краевые условия для $y_{(\alpha)}$, очевидно, задаются только на $\gamma_h^{(\alpha)}$:

$$y_{(\alpha)} = \mu(x, t^*) \quad \text{при } x \in \gamma_h^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p. \quad (20)$$

В начальный момент $t = 0$ задано условие

$$y(x, 0) = u_0(x). \quad (21)$$

Условия (19) — (21) однозначно определяют y^j при всех $j = 1, 2, \dots$ и $x \in \bar{\omega}_h$. Для нахождения $y_{(\alpha)}$ мы получаем уравнение $y_{(\alpha)} - \tau \Lambda_\alpha y_{(\alpha)} = F_\alpha = y_{(\alpha-1)} + \tau \Phi_\alpha$ с краевыми условиями (20). Эта разностная задача решается методом прогонки вдоль строк или столбцов.

Схема (19) аппроксимирует уравнение (7) в суммарном смысле: погрешность аппроксимации ψ для локально-одномерной схемы есть сумма погрешностей аппроксимации ψ_α на решении $u = u(x, t)$ для одномерных схем (19) номера α :

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^p \psi_\alpha = O(|h|^2 + \tau), \quad \text{хотя все } \psi_\alpha = O(1). \quad (22)$$

Схема (19) безусловно устойчива и равномерно сходится:

$$\max_{\bar{\omega}_h} |y^j - u^j| = O(|h|^2 + \tau). \quad (23)$$

В случае двух измерений ($p = 2$) схема (19) имеет вид

$$\frac{1}{\tau}(y_{(1)} - y^j) = \Lambda_1 y_{(1)} + \Phi_1, \quad \frac{1}{\tau}(y^{j+1} - y_{(1)}) = \Lambda_2 y^{j+1} + \Phi_2,$$

так как $y_{(0)} = y^j$, $y_{(2)} = y^{j+1}$.

В схеме (19) не все направления равноправны. Симметризованная локально-одномерная схема

$$0,5\Lambda_1^{(1)} \rightarrow 0,5\Lambda_2^{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow 0,5\Lambda_p^{(1)} \rightarrow 0,5\Lambda_p^{(1)} \rightarrow \dots \rightarrow 0,5\Lambda_2^{(1)} \rightarrow 0,5\Lambda_1^{(1)},$$

как показывают численные эксперименты, обладает большей точностью по сравнению со схемой (19) с шагом $0,5\tau$.

Можно построить ряд симметричных схем, имеющих второй порядок точности по τ . Оказывается, что схема (11) — (12)

также является симметричной локально-одномерной схемой вида

$$0,5\Lambda_2^{(0)} \rightarrow 0,5\Lambda_1^{(1)} \rightarrow 0,5\Lambda_1^{(0)} \rightarrow 0,5\Lambda_2^{(1)}$$

с

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0,5\bar{f}, \quad \varphi_3 = 0,5\bar{f}, \quad \varphi_4 = 0.$$

В этом можно убедиться, если исключить $y_{(1)}$ и $y_{(3)}$ (сложив 1-е и 2-е, 3-е и 4-е уравнения) и обозначить $y_{(2)} = y^{j+1/2}$.

Напишем одну из симметричных локально-одномерных схем с $\psi = O(|h|^2 + \tau^2)$ для трех измерений ($p = 3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$):

$$0,5\Lambda_1^{(0)} \rightarrow 0,5\Lambda_2^{(0,5)} \rightarrow \Lambda_3^{(0,5)} \rightarrow 0,5\Lambda_2^{(0,5)} \rightarrow 0,5\Lambda_1^{(1)}. \quad (24)$$

Эта схема, изученная И. В. Фрязиновым, является обобщением схемы (11) — (12) на трехмерный случай.

Нетрудно написать локально-одномерную схему для квазилинейного уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(u) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + f(u). \quad (25)$$

Достаточно заменить каждую из одномерных схем (19) любой из схем, рассмотренных в § 2, п. 12, для одномерных уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(u) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + f_\alpha(u), \quad \sum_{\alpha=1}^p f_\alpha(u) = f(u). \quad (26)$$

Так, например, для двумерного случая $p = 2$ достаточно в (19) заменить $\Lambda_1 y_{(1)}$ и $\Lambda_2 y^{j+1}$ выражениями ($y^{j+1} = y_{(2)}$ при $p = 2$)

$$\Lambda_1 y_{(1)} = (a_1(y_{(1)}) y_{(1)} \bar{x}_1)_{\bar{x}_1}, \quad \Lambda_2 y^{j+1} = (a_2(y^{j+1}) y_{\bar{x}_2}^{j+1})_{\bar{x}_2}, \quad (27)$$

$$a_1(y) = k_1 \left(\frac{y_{i_{1-1}} + y}{2} \right), \quad a_2(y) = k_2 \left(\frac{y_{i_{2-1}} + y}{2} \right)$$

и положить $\varphi_1 = 0$; $\varphi_2 = f(y_{(1)})$.

На равномерной сетке $\Lambda_\alpha y$, очевидно, имеет вид ($\alpha = 1, 2$)

$$\Lambda_\alpha y = \frac{1}{h_\alpha^2} \left[(a_\alpha(y))_{i_{\alpha+1}} (y_{i_{\alpha+1}} - y) - a_\alpha(y) (y - y_{i_{\alpha-1}}) \right]. \quad (28)$$

Для определения $y_{(1)}$ и y^{j+1} получаем нелинейные трехточечные задачи, которые решаются по аналогии с п. 12, § 2 методом итераций с использованием формул прогонки для каждой итерации. Если в (27) положить $a_1 = a_1(y^j)$ и $a_2 = a_2(y_{(1)})$, то получим для определения $y_{(1)}$ и y^{j+1} линейные краевые задачи, которые решаются сразу путем прогонки по строкам и по столбцам соответственно.

Приведем два примера.

Пример 1. Расчет двумерной температурной волны. Рассмотрим двумерное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(k_1(u) \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(k_2(u) \frac{\partial u}{\partial x_2} \right), \quad k_\alpha(u) = \kappa_\alpha u^{\sigma_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \quad (29)$$

с параметрами $\sigma_1 = 4$, $\kappa_1 = 4$, $\sigma_2 = 2$, $\kappa_2 = 0,25$ и для расчета используем точное решение

$$u(x_1, x_2, t) = \begin{cases} 0,5 \sqrt{-1 + \sqrt{1 + 16(t - x_1 - 2x_2)}} & \text{при } t \geq x_1 + 2x_2, \\ 0 & \text{при } t \leq x_1 + 2x_2. \end{cases} \quad (30)$$

Сетка грубая: $h_1 = h_2 = 1$; число узлов $N_1 \cdot N_2 = 30 \cdot 20 = 600$. Из решения взяты начальные значения, т. е. $u(x_1, x_2, 0) \equiv 0$, и краевые условия на прямых $x_1 = 0$, $x_1 = 30$, $x_2 = 0$ и $x_2 = 20$.

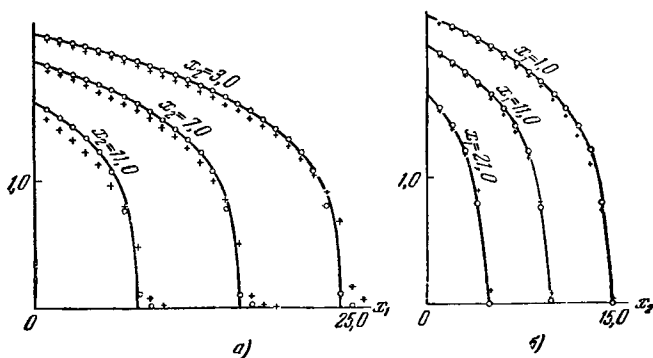


Рис. 92.

Расчеты проводились по локально-одномерной схеме (19) с операторами Λ_1 и Λ_2 , определяемыми формулами (27): а) шагом $\tau = 0,2$; б) шагом $\tau = 1,0$; в) шагом $\tau = 2,0$. Некоторые результаты при $t = 30$ нанесены на рис. 92, где крестиками обозначены результаты варианта в), точками — варианта а), сплошные линии — это аналитическое решение¹⁾.

Пример 2. Расчет задачи о фазовом переходе (задачи Стефана). Предположим, что имеется две фазы 1, 2 с коэффициентами теплоемкости $c_1(u)$, $c_2(u)$ и теплопроводности $k_1(u)$, $k_2(u)$. В каждой из фаз температура $u(x, t)$ удовлетворяет

¹⁾ См. ссылку на стр. 596.

уравнению теплопроводности

$$c_s(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_s(u) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + f(x, t), \quad s=1, 2, \quad (31)$$

$$x = (x_1, \dots, x_p), \quad p=1, 2, 3,$$

где $f(x, t)$ — плотность тепловых источников. На границе раздела фаз температура $u(x, t) = u^*$ постоянна и равна температуре u^* их фазового перехода, тепловые потоки разрывны и их разность равна λv , где λ — теплота фазового перехода, v — скорость фронта границы фаз. В одномерном случае условия на границе $x = \xi(t)$ раздела фаз имеют вид

$$u(\xi + 0, t) = u(\xi - 0, t) = u^*, \quad k_1 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\xi+0} - k_2 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\xi-0} = \lambda \frac{d\xi}{dt}, \quad (32)$$

если в фазе 1 $u < u^*$, а в фазе 2 $u > u^*$.

Вводя δ -функцию Дирака, запишем уравнение (31) в виде

$$(c(u) + \lambda \delta(u - u^*)) \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k(u) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + f, \quad (33)$$

$$c = \begin{cases} c_1, & u < u^*, \\ c_2, & u > u^*, \end{cases} \quad k = \begin{cases} k_1, & u < u^* \\ k_2, & u > u^*. \end{cases}$$

Условия на границе фаз (в частности, условия (32) при $p=1$) следуют из уравнения (33).

Для решения задачи Стефана применяется метод сглаживания: δ -функция приближенно заменяется δ -образной функцией $\delta(u - u^*, \Delta)$, отличной от нуля только на интервале $(u^* - \Delta, u^* + \Delta)$ и удовлетворяющей условию нормировки

$$\int_{u^* - \Delta}^{u^* + \Delta} \delta(u - u^*, \Delta) du = 1.$$

Вводя эффективную теплоемкость

$$\bar{c}(u) = c(u) + \lambda \delta(u - u^*, \Delta)$$

и эффективный коэффициент $\bar{k}(u)$, совпадающий с $k_1(u)$ при $u < u^* - \Delta$ и с $k_2(u)$ при $u > u^* + \Delta$, мы получаем для определения u квазилинейное уравнение теплопроводности

$$\bar{c}(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\bar{k}(u) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + f \quad (34)$$

с соответствующими краевыми условиями на границе Γ области G , в которой ищется решение.

Так как «размазывание» проводится по температуре, то оно применимо для любого числа измерений и любого числа фаз.

Для решения уравнения (34) применяется локально-одномерная схема (19), (27).

Отметим, что $\delta(u - u^*, \Delta)$ выбирается таким образом, чтобы $\tilde{c}(u)$ вблизи $u = u^*$ имело наиболее простой вид: «ступеньки», параболы и т. д.

Были получены численные решения следующих задач, имеющих точные аналитические решения¹⁾:

1) задачи с косым плоским фронтом (рис. 93);

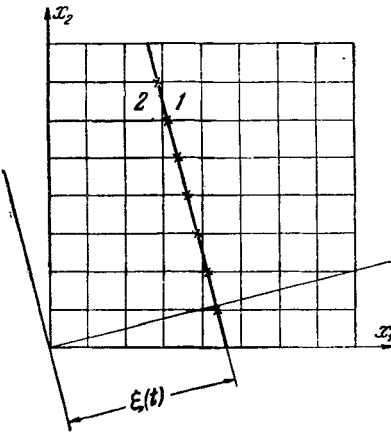


Рис. 93.

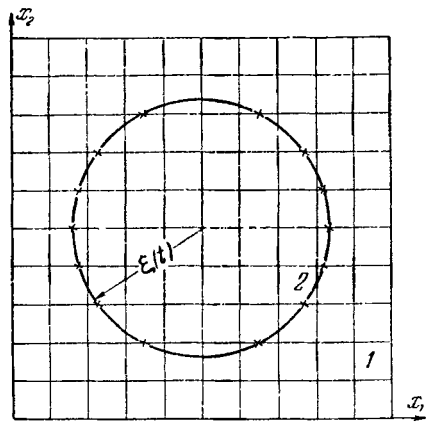


Рис. 94.

2) осесимметрической задачи, в которой граница фаз есть окружность (рис. 94).

Решение этих задач проводилось в прямоугольной системе координат. Результаты расчета показаны на рис. 93 и 94. Сплошные линии — границы раздела фаз, крестики — расчетные точки, в которых $u = u^*$.

3. Итерационные методы переменных направлений для решения разностной задачи Дирихле. Решение уравнения теплопроводности $\frac{du}{dt} = \Delta u$ с однородными краевыми условиями стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ (см. гл. III и VI) и, следовательно,

¹⁾ А. А. Самарский, Б. Д. Моисеевко, Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 5, № 5 (1965); см. также Б. М. Будаков, Е. Н. Соловьева, А. Б. Успенский, Разностный метод со сглаживанием коэффициентов для решения задачи Стефана, там же.

решение задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(x), \quad x \in G, \quad t > 0, \quad u|_{\Gamma} = \mu(x), \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

с правой частью и краевыми значениями, не зависящими от t (со стационарными неоднородностями), при $t \rightarrow \infty$ стремится к решению задачи Дирихле

$$\Delta u = -f(x), \quad x \in G, \quad u|_{\Gamma} = \mu(x). \quad (35)$$

Этим же свойством обладают и решения разностных задач (33), соответствующих уравнению теплопроводности. Поэтому разностные схемы для уравнения теплопроводности используются в качестве итерационных методов для приближенного решения разностной задачи Дирихле

$$\Delta v = -\varphi(x), \quad x \in \omega_h, \quad v|_{\nu_h} = \mu(x), \quad (36)$$

рассмотренной в § 3.

Метод простой итерации § 3, п. 5 есть явная схема (6) для уравнения теплопроводности (1) (при $f = f(x)$) с фиксированным шагом $\tau = \frac{1}{4}h^2$ (в случае, когда $G = G_0$ — прямоугольник и $h_1 = h_2 = h$). При этом y^j — итерация номера j , $y(x, 0) = u_0(x)$ — начальное приближение. Число итераций для явной схемы $s_0 = s_0(\epsilon) = O\left(\frac{1}{h^2} \ln \frac{1}{\epsilon}\right)$. Значительно меньшего числа итераций требует продольно-поперечная схема (неявная схема переменных направлений):

$$y^{s+1/2} - \tau_{s+1/2} \Lambda_1 y^{s+1/2} = y^s + \tau_{s+1/2} \Lambda_2 y^s + \tau_{s+1/2} f, \quad y^{s+1/2}|_{\nu_h} = \mu(x), \quad (37)$$

$$y^{s+1} - \tau_{s+1} \Lambda_2 y^{s+1} = y^{s+1/2} + \tau_{s+1} \Lambda_1 y^{s+1/2} + \tau_{s+1} f, \quad y^{s+1}|_{\nu_h} = \mu(x), \quad y^0 = y_0(x). \quad (38)$$

Здесь s — номер итерации ($s = 0, 1, \dots, s_0 - 1$), $y^{s+1/2}$ — промежуточное значение (подитерация), $\Lambda_1 y = y_{\bar{x}_1 x_1}$, $\Lambda_2 y = y_{\bar{x}_2 x_2}$, $\tau_{s+1/2}$ и τ_{s+1} — итерационные параметры, зависящие от номера итерации. Для нахождения $y^{s+1/2}$ применяется прогонка по строкам, для y^{s+1} — по столбцам. Параметры $\tau_{s+1/2}$ и τ_{s+1} выбираются так, чтобы число итераций $s_0 = s_0(\epsilon)$ было минимальным. В случае, когда $G = G_0 = (0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2)$ — прямоугольник, задача о выборе оптимального набора параметров $\{\tau_{s+1/2}\}$ и $\{\tau_{s+1}\}$ решена.

Пусть

$$\delta_\alpha = \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha} \quad \text{и} \quad \Delta_\alpha = \frac{4}{h_\alpha^2} \cos^2 \frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha}$$

— наименьшее и наибольшее собственные значения оператора Λ_α ($\alpha = 1, 2$). Проведем замену

$$\tau_{s+1/2} = \frac{m\omega_{s+1} + r}{1 + p\omega_{s+1}}, \quad \tau_{s+1} = \frac{m\omega_{s+1} - r}{1 - p\omega_{s+1}}, \quad (39)$$

где p и r определяются по формулам

$$p = \frac{\kappa - \xi}{\kappa + \xi}, \quad \kappa = \frac{\Delta_1 - \delta_1}{\Delta_2 + \delta_1} \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad \xi = \sqrt{\frac{(\Delta_1 - \delta_1)(\Delta_2 - \delta_2)}{(\Delta_2 + \delta_1)(\Delta_1 + \delta_2)}}, \quad (40)$$

$$r = \frac{1}{2\Delta_1\Delta_2} (\Delta_1 - \Delta_2 + (\Delta_1 + \Delta_2)p), \quad m = r + \frac{1-p}{\Delta_1}.$$

Оценим число итераций $s_0(\epsilon)$ по формуле

$$s_0(\epsilon) \approx \frac{1}{\pi^2} \ln \frac{4}{\epsilon} \ln \frac{4}{\eta}, \quad \text{где } \eta = \frac{1-\xi}{1+\xi}. \quad (41)$$

Зная s_0 , вычисляем параметры

$$\omega_j = \frac{(1+2\theta)(1+\theta^{\sigma_j})}{2\theta^{0,5\sigma_j}(1+\theta^{1-\sigma_j}+\theta^{1+\sigma_j})}, \quad j = 1, 2, \dots, s_0, \quad (42)$$

где

$$\theta = \frac{1}{16} \eta^2 \left(1 + \frac{1}{2} \eta^2\right), \quad \sigma_j = \frac{2j-1}{2s_0}, \quad j = 1, 2, \dots, s_0,$$

после чего по формулам (39) находим $\tau_{s+1/2}$ и τ_{s+1} («набор параметров по Жордану»).

Применяется и другой, более грубый, способ выбора параметра ω_j — циклический набор параметров с n_0 параметров в цикле и k_0 циклов, так что $\omega_{j+k n_0} = \omega_j$, $j = 1, 2, \dots, n_0$. Параметры $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n_0}$ образуют геометрическую прогрессию $\omega_{j+1} = q\omega_j$, знаменатель которой $q = 0,16$,

$$n_0 = \left[\ln \frac{1}{\eta} / \ln \frac{1}{q} \right] + 1, \quad k_0 = \left[\ln \frac{1}{\epsilon} / \ln \frac{1}{\bar{\rho}} \right] + 1,$$

где $[a]$ — целая часть числа $a > 0$, $\bar{\rho} = 0,186$.

При выборе параметров обоими способами для $s_0(\epsilon)$ верна оценка $s_0 = O\left(\ln \frac{1}{h} \ln \frac{1}{\epsilon}\right)$, где $h = \min(h_1, h_2)$, но циклический набор приводит к несколько большему числу итераций. Зато такого типа наборы можно строить в случае трех измерений.

Для схемы $O(|h|^4)$ при $p = 2, 3$ также можно указать наборы параметров, при которых $s_0 = O\left(\ln \frac{1}{h} \ln \frac{1}{\epsilon}\right)$.

В случае областей более сложной формы пользуются схемой (37) — (38) с постоянными параметрами $\tau^{(1)} = \tau_{s+1/2}$ и $\tau^{(2)} = \tau_{s+1}$.

Пусть, например, $G = G_1$ — ступенчатая область, составленная из прямоугольников со сторонами, параллельными осям

координат, l_α — диаметр области G_1 по направлению x_α ($\alpha = 1, 2$) и можно ввести сетку $\bar{\omega}_h$ — равномерную по x_1 и x_2 с шагами h_1 и h_2 . Собственные значения оператора $\Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}$ лежат на интервале $(\delta_\alpha, \Delta_\alpha)$,

$$\delta_\alpha = \frac{4}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha}, \quad \Delta_\alpha = \frac{4}{h_\alpha^2} \cos^2 \frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha}.$$

Полагая $\delta_1 + c_0 = \delta'_1$, $\Delta_1 + c_0 = \Delta'_1$, $\delta_2 - c_0 = \delta'_2$, $\Delta_2 - c_0 = \Delta'_2$ и определяя $\omega = (\delta_2 \Delta_2 - \delta_1 \Delta_1) / (\delta_1 + \delta_2 + \Delta_1 + \Delta_2)$ из условия $\delta'_1 \Delta'_1 = \delta'_2 \Delta'_2$, получим для $\tau^{(1)}$ и $\tau^{(2)}$ формулы

$$\tau^{(1)} = \frac{\omega}{1 + \omega c_0}, \quad \tau^{(2)} = \frac{\omega}{1 - \omega c_0}, \quad \text{где} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\delta'_1 \Delta'_1}} = \frac{1}{\sqrt{\delta'_2 \Delta'_2}}. \quad (43)$$

Число итераций $s_0 = \left[\ln \frac{1}{\varepsilon} / \ln \frac{1}{\rho} \right] + 1$, где

$$\rho = (1 + \sqrt{\eta'_1})^{-1} (1 - \sqrt{\eta'_1}) \cdot (1 - \sqrt{\eta'_2}) (1 + \sqrt{\eta'_2})^{-1},$$

$$\eta'_\alpha = \delta'_\alpha / \Delta'_\alpha, \quad \alpha = 1, 2,$$

т. е. $s_0(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{h} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Метод переменных направлений (37) — (38) с постоянными параметрами $\tau^{(1)} = \tau_{s+1/2}$ и $\tau^{(2)} = \tau_{s+1}$ пригоден и в случае областей более сложной формы, а также для эллиптических уравнений с переменными коэффициентами. В формулах (43) изменяются лишь выражения для δ_α и Δ_α .

Однако продольно-поперечная схема (37) — (38) применима лишь для двух измерений. По числу итераций ей эквивалентна двухпараметрическая попеременно-треугольная схема («схема бегущего счета» или «явный метод переменных направлений»), пригодная для любого числа измерений и для области сложной формы и для уравнений с переменными коэффициентами. Эта схема может быть записана в виде

$$y^{s+1/2} + \omega R_1 y^{s+1/2} = y^s + \omega R_2 y^s + \omega^2 R_1 R_2 y^s + \tau (\Lambda y^s + \varphi) = F^s, \quad (44)$$

$$y^{s+1} + \omega R_2 y^{s+1} = y^{s+1/2} =$$

$$= F^{s+1/2}, \quad s = 0, 1, \dots, \quad y^{s+1/2}|_{V_h} = y^{s+1}|_{V_h} = \mu(x), \quad (45)$$

где

$$R_1 \hat{y} = \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha} y_{\bar{x}_\alpha}, \quad R_2 y = - \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha} y_{x_\alpha},$$

p — число измерений. Для простоты изложения предполагаем, что $G = G_0 = \{0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, \dots, p\}$ — p -мерный

параллелепипед, сетка $\bar{\omega}_h$ равномерна по каждому x_α ,

$$\Delta y = \sum_{\alpha=1}^p \Lambda_\alpha y, \quad \Lambda_\alpha y = y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}.$$

Параметры ω и τ находятся по формулам

$$\omega = \frac{2}{\sqrt{\delta \Delta}}, \quad \tau = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}, \quad \text{где } \gamma_1 = \frac{\delta}{2(1 + \sqrt{\eta})}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2\omega}, \quad \eta = \frac{\delta}{\Delta}, \quad (46)$$

а δ и Δ — границы спектра оператора Λ , равные

$$\delta = 4 \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha^2} \sin^2 \frac{\pi h_\alpha}{2l_\alpha}, \quad \Delta_\alpha = 4 \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{h_\alpha^2}.$$

Поясним алгоритм нахождения $y^{s+1/2}$ и y^{s+1} из (44)—(45) для $p=2$. Из (44)—(45) при $p=2$ находим

$$y^{s+1/2} = K \left(\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\omega}{h_\alpha^2} y_{i_\alpha-1}^{s+1/2} + F^s \right), \quad y^{s+1/2}|_{V_h} = \mu(x), \quad K = \left(\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\omega}{h_\alpha^2} + 1 \right)^{-1}, \quad (47)$$

$$y^{s+1} = K \left(\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\omega}{h_\alpha^2} y_{i_\alpha+1}^{s+1} + F^{s+1/2} \right), \quad y^{s+1}|_{V_h} = \mu(x). \quad (48)$$

Пусть $G = G_0 = (0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2)$. Счет $y^{s+1/2}$ начинается из левого нижнего угла $(0, 0)$ и идет либо по строкам, либо по столбцам. Счет y^{s+1} начинается из верхнего правого угла (l_1, l_2) и ведется либо по строкам, либо по столбцам. В самом деле, значение в узле (h_1, h_2) сразу находится по формуле (47), так как $y^{s+1/2}(h_1, 0) = \mu(h_1, 0)$ и $y^{s+1/2}(0, h_2) = \mu(0, h_2)$ известны. Зная $y^{s+1/2}(h_1, h_2)$, можно найти $y^{s+1/2}(h_1, 2h_2)$ или $y^{s+1/2}(2h_1, h_2)$, и т. д. Таким образом, $y^{s+1/2}$ и y^{s+1} находятся во всех узлах $x \in \omega_h$ по рекуррентным формулам (47)—(48) с затратой числа действий, пропорционального числу узлов. Число итераций есть величина $O\left(\frac{1}{4\sqrt{\eta}} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right) = O\left(\frac{1}{h} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right)^1$.

¹⁾ Более подробно см. А. А. Самарский, Введение в теорию разностных схем, глава VIII, «Наука», 1971. Там же дан список литературы.