ДОПОЛНЕНИЕ II

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

1. Введение. Метод разделения переменных для уравнений с частными производными приводит к задаче Штурма — Лиувилля. Для уравнений с постоянными коэффициентами и граничными условиями первого рода, которые рассматриваются в гл. II, III, V, мы получаем задачу на собственные значения, или задачу Штурма — Лиувилля:

найти значения λ, *при которых однородное уравнение* $\Delta v + \lambda v = 0$ *в области* T *с однородным условием* $v|_{\Sigma} = 0$ *на границе* Σ *имеет нетривиальные решения* $v(P) \not\equiv 0$ (собственные функции).

Если T — отрезок $0 \leqslant x \leqslant l$, прямоугольник $(0 \leqslant x \leqslant l_1,$ $0 \leqslant y \leqslant l_2)$ или параллелепипед $(0 \leqslant x \leqslant l_1,\ 0 \leqslant y \leqslant l_2,\ 0 \leqslant z \leqslant l_3)$, то собственные функции $v_n(P)$ выражаются через тригонометрические функции.

Если T — круг, цилиндр или шар, то для нахождения собственных функций вводятся новые специальные функции — цилиндрические и сферические функции.

Рассмотрим отдельные случаи.

1. Круг $0 \leqslant r \leqslant r_0$. В полярных координатах (r, φ)

$$\Delta_2 v + \lambda v = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \lambda v = 0, \quad 0 < r < r_0,$$

$$v|_{r=r_0} = 0, \quad v \not\equiv 0. \tag{1}$$

Функцию v ищем в виде $v(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$. Подставим $v = R\Phi$ в уравнение и разделим переменные:

$$\frac{r(rR')' + \lambda r^2 R}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu, \quad \text{где} \quad \mu = \text{const}.$$

Отсюда следует, что

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0,$$

$$\frac{1}{r}(rR')' + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2}\right)R = 0, \quad R(r_0) = 0.$$

В силу однозначности решения $\Phi(\varphi)$ должна быть периодической функцией, т. е. $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$. Это условие дает $\mu = n^2$, где n — целое число. Полагая $x = \sqrt{\lambda}\, r$, приходим к уравнению цилиндрических функций или уравнению Бесселя

n-го порядка:

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0 \quad \text{или} \quad y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0, \qquad (2)$$

причем $R(r)=y(\sqrt{\lambda}\,r)$. При $n=0$ получаем уравнение Бесселя нулевого порядка

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+y=0 \quad \text{или} \quad y''+\frac{1}{x}y'+y=0,$$

которое соответствует случаю решений задачи (1), обладающих осевой симметрией.

Решения уравнения (2) называют цилиндрическими функциями. К уравнению (2) приводят также задачи для уравнения Лапласа и волнового уравнения в случае, когда область T есть круговой цилиндр.

2. Шар $0\leqslant r\leqslant r_0$. Рассмотрим задачу Штурма — Лиувилля

$$\Delta v+\lambda v=0, \quad 0<r<r_0, \quad v|_{r=r_0}=0. \qquad (3)$$

В сферических координатах

$$\Delta v=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}v, \quad \Delta_{\theta,\varphi}v=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}. \qquad (4)$$

Положим $v=R(r)w(\theta,\varphi)$ и проведем разделение переменных:

$$\frac{(r^2R')'+\lambda r^2R}{R}=-\frac{\Delta_{\theta,\varphi}w}{w}=\mu,$$

откуда следует

$$\Delta_{\theta,\varphi}w+\mu w=0, \qquad (5)$$

$$\frac{1}{r^2}(r^2R')'+\left(\lambda-\frac{\mu}{r^2}\right)R=0, \quad R(r_0)=0. \qquad (6)$$

Подстановка $x=\sqrt{\lambda}r$, $y=R/\sqrt{x}$ приводит (6) к уравнению Бесселя

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0, \quad \nu^2=\mu-\frac{1}{4}.$$

Для функции $w(\theta,\varphi)$, определенной на сфере, мы получили уравнение (5), которое имеет ограниченное решение (сферические функции) только при $\mu=n(n+1)$. Таким образом, при разделении переменных для оператора Лапласа в сферической системе координат мы приходим к сферическим функциям. В частном случае, когда $w=w(\theta)$ не зависит от φ, уравнение (5) принимает вид

$$\frac{d}{ds}\left((1-s^2)\frac{dw}{ds}\right)+\mu w=0, \quad \text{где} \quad s=\cos\theta, \quad -1\leqslant s\leqslant 1. \qquad (7)$$

Это уравнение Лежандра, имеющее только при $\mu = n(n+1)$ ограниченное решение (полиномы Лежандра). Сферические функции выражаются через производные полиномов Лежандра и тригонометрические функции.

В квантовой механике часто встречаются полиномы Чебышева — Эрмита и Чебышева — Лагерра.

2. Общее уравнение теории специальных функций. Уравнения для простейших специальных функций могут быть записаны в виде

$$Ly + \lambda\rho(x)\,y = 0, \quad a < x < b, \quad \rho(x) > 0, \tag{8}$$

$$Ly = \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)\,y, \quad k(x) \geqslant 0, \quad q(x) \geqslant 0.$$

Простейшая краевая задача $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y(l) = 0$, соответствующая $a = 0$, $b = l$, $q = 0$, $k = \rho = \mathrm{const}$, определяет тригонометрические функции. Рассмотрим уравнения для других специальных функций.

1) Уравнение Бесселя (2), или $(xy')' + \left(\lambda x - \frac{n^2}{x}\right)y = 0$, соответствует $k(x) = x$, $\rho(x) = x$, $q(x) = \frac{n^2}{x}$, $a = 0$, $b = r_0$.

2) При $k(x) = 1 - x^2$, $\rho = 1$, $q = 0$, $a = -1$, $b = 1$ получаем уравнение Лежандра

$$[(1 - x^2)\,y']' + \lambda y = 0. \tag{9}$$

3) Уравнение присоединенных функций Лежандра

$$[(1 - x^2)\,y']' - \frac{m^2}{1 - x^2}\,y + \lambda y = 0 \tag{10}$$

соответствует $k(x) = 1 - x^2$, $q(x) = \frac{m^2}{1 - x^2}$, $\rho = 1$, $a = -1$, $b = 1$.

4) Уравнение Чебышева — Эрмита

$$(e^{-x^2}y')' + \lambda e^{-x^2}y = 0 \quad \text{или} \quad y'' - 2xy' + \lambda y = 0 \tag{11}$$

соответствует $k(x) = e^{-x^2}$, $q(x) = 0$, $\rho(x) = e^{-x^2}$, $a = -\infty$, $b = \infty$.

5) Уравнение Чебышева — Лагерра

$$(xe^{-x}y')' + \lambda e^{-x}y = 0 \quad \text{или} \quad y'' + (1 - x)\,y' + \lambda y = 0 \tag{12}$$

соответствует $k(x) = xe^{-x}$, $q = 0$, $\rho = e^{-x}$, $a = 0$, $b = \infty$.

Характерной особенностью указанных уравнений является обращение в нуль коэффициента $k(x)$, по крайней мере, на одном из концов интервала (a, b). Это свойство $k(x)$, как будет показано ниже, играет важную роль для постановки краевых задач для уравнения (8).

Рассмотрим поведение решений уравнения (8) вблизи особой точки, в которой $k(x)$ обращается в нуль.

3. Поведение решений в окрестности $x=a$, если $k(a)=0$. Рассмотрим случай, когда a конечно.

Если в уравнении (8) $q(x)-\lambda\rho(x)$ заменить функцией $q(x)$, то все результаты, полученные ниже для уравнения

$$Ly=(k(x)y')'-q(x)y=0, \quad k(x)>0 \text{ при } a<x<b, \tag{8'}$$

будут справедливы и для уравнения (8).

Лемма 1. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два линейно-независимых решения уравнения (8′), коэффициент которого $k(x)$ имеет вид

$$k(x)=(x-a)\varphi(x), \quad \varphi(a)\neq 0, \tag{13}$$

где $\varphi(x)>0$ — непрерывная на (a,b) функция. Если $y_1(x)$ — ограниченное решение, представимое в виде

$$y_1(x)=(x-a)^n u(x), \quad n\geqslant 0, \tag{14}$$

где $u(x)$ — непрерывная на (a,b) функция и $u(a)\neq 0$, то второе решение $y_2(x)$ при $x\to a$ является неограниченным.

Заметим, что $y_2(x)$ можно представить в виде квадратуры через линейно-независимое решение $y_1(x)$. В самом деле, из $0=y_2Ly_1-y_1Ly_2=[k(y_2y_1'-y_1y_2')]'$ следует, что вронскиан функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ равен $y_1y_2'-y_2y_1'=C/k(x)$, где $C\neq 0$, так как $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно-независимы. После деления на y_1^2 получим $(y_2/y_1)'=C/ky_1^2$. Интегрируя это уравнение от x_0 до x, получим

$$y_2(x)=y_1(x)\left[\int_{x_0}^{x}\frac{C\,d\alpha}{k(\alpha)y_1^2(\alpha)}+C_1\right], \text{ где } C_1=\text{const}.$$

В силу линейной независимости $y_1(x)$ и $y_2(x)$ можно считать $C_1=0$. Кроме того, можно положить $C=1$, так как решение однородного уравнения определено с точностью до постоянного множителя. В результате будем иметь

$$\bar{y}_2(x)=y_1(x)\int_{x_0}^{x}\frac{d\alpha}{k(\alpha)y_1^2(\alpha)},$$

причем x_0 выберем так, чтобы $y_1(\alpha)$ не обращалось в нуль на интервале $a<\alpha<x_0$.

Подставляя вместо $k(x)$ и $y_1(x)$ их выражения и пользуясь теоремой о среднем, найдем (заменяя $\bar{y}_2$ на y_2):

$$y_2(x) = (x-a)^n u(x) \int\limits_{x_0}^{x} \frac{d\alpha}{(\alpha - a)^{2n+1} \varphi(\alpha) u^2(\alpha)} =$$

$$= \frac{(x-a)^n u(x)}{\psi(x^*)} \int\limits_{x_0}^{x} \frac{d\alpha}{(\alpha-a)^{2n+1}} =$$

$$= \frac{(x-a)^n u(x)}{\psi(x^*)} \begin{cases} \left.\dfrac{-1}{2n(\alpha-a)^{2n}}\right|_{x_0}^{x} & \text{при } n > 0, \\ \ln(\alpha - a)\Big|_{x_0}^{x} & \text{при } n = 0, \end{cases} \tag{15}$$

где $\psi = \varphi(x) u^2(x)$, $x^* \in (x, x_0)$. Представим $y_2(x)$ в виде

$$y_2(x) = f_1(x) + f_2(x, x_0),$$

где

$$f_1(x) = \frac{u(x)}{\psi(x^*)} \begin{cases} -\dfrac{1}{2n(x-a)^n} & \text{при} \quad n > 0, \\ \ln(x-a) & \text{при} \quad n = 0; \end{cases}$$

$$f_2(x, x_0) = \frac{u(x)(x-a)^n}{\psi(x^*)} \begin{cases} \dfrac{1}{2n(x_0-a)^{2n}} & \text{при} \quad n > 0, \\ -\ln(x_0 - a) & \text{при} \quad n = 0. \end{cases}$$

Отсюда видно, что $f_2(x, x_0)$ при $x \to a$ остается ограниченной, а $|f_1(x)| \to \infty$ при $x \to a$ либо как $\frac{1}{(x-a)^n}$, либо как $|\ln(x-a)|$. Фактически доказана следующая

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы 1. Если $y_1(a) \neq 0$, т. е. $n = 0$, то $y_2(x)$ имеет при $x = a$ логарифмическую особенность:

$$y_2(x) \sim \ln(x-a) \quad \text{при} \quad y_1(a) \neq 0 \quad (n = 0).$$

Если $y_1(x)$ имеет при $x = a$ нуль n-го порядка: $y_1(x) = (x - a)^n u(x)$, $n > 0$, то $y_2(x)$ имеет при $x = a$ полюс порядка n:

$$y_2(x) \sim (x-a)^{-n}, \text{ если } y_1(x) \sim (x-a)^n, \ n > 0.$$

Лемма 3. Пусть выполнены условия леммы 1 и коэффициент $q(x)$ либо ограничен, либо стремится к ∞ при $x \to a$, так что

$$q(x) = \frac{q_0(x)}{(x-a)^\sigma}, \quad \sigma \geqslant 0, \quad q_0(a) \neq 0,$$

$q_0(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция. Тогда для ограниченного решения $y_1(x)$ вида (14) выполняется условие

$$\lim_{x \to a} k(x) \frac{dy_1}{dx}(x) = 0, \tag{16}$$

если, кроме того, имеет место неравенство

$$n > \sigma - 1.$$

В самом деле, фиксируем некоторое значение x_1, $a < x_1 < b$, и проинтегрируем (8′) от x до x_1, $a < x < x_1$:

$$k(x) y_1'(x) = k(x_1) y_1'(x_1) - \int_x^{x_1} q(\alpha) y_1(\alpha) d\alpha = Q(x).$$

Подставляя сюда выражения для $y_1(x)$ и $q(x)$, найдем:

$$Q(x) = k(x_1) y_1'(x_1) - \int_x^{x_1} \frac{q_0(\alpha) u(\alpha)}{(\alpha - a)^{\sigma - n}} d\alpha, \quad n \geqslant 0.$$

Отсюда видно, что $Q(x)$ — непрерывная на отрезке $a \leqslant x \leqslant x_1$ функция, если $\sigma - n < 1$ или $n > \sigma - 1$. Переходя к пределу при $x \to a$, видим, что существует предел $\lim\limits_{x \to a} Q(x) = Q(a)$ и, следовательно,

$$\lim_{x \to a} k(x) y_1(x) = Q(a).$$

Покажем, что $Q(a) = 0$. Для этого выразим $y_1(x)$ через $Q(x)$:

$$y_1(x) = y_1(x_1) - \int_x^{x_1} \frac{Q(\alpha)}{k(\alpha)} d\alpha = y_1(x_1) - \int_x^{x_1} \frac{Q(\alpha)}{(\alpha - a)\varphi(\alpha)} d\alpha.$$

Отсюда видно, что $y_1(x)$ может быть ограничена в точке $x = a$ лишь при условии $Q(a) = 0$, откуда и следует (16).

4. Постановка краевых задач. Перейдем к постановке краевых задач для уравнения

$$Ly + \lambda \rho y = 0 \quad \text{и} \quad Ly = 0 \tag{17}$$

в промежутке (a, b), на одном или обоих концах которого $k(x)$ обращается в нуль. Если $k(a) = 0$ и выполнено условие (13), то при $x = a$ мы будем требовать ограниченности вида (14) решения уравнений (17). При этом не требуется, чтобы решение $y(x)$ при $x = a$ принимало заданное значение.

Общее решение уравнений (17) есть $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$, где y_1 и y_2 — любые линейно-независимые решения уравнения (17), A и B — произвольные постоянные. Если $y_1(x)$, удовлетворяет условию ограниченности (14) при $x = 0$, то $y_2(x)$ при $x \to a$ обращается в бесконечность (лемма 1). Поэтому из требования ограниченности (14), которое мы будем записывать формально в виде

$$|y(a)| < \infty \tag{18}$$

и называть естественным условием ограниченности (поскольку оно является следствием структуры оператора L), сразу следует $B = 0$.

В результате мы приходим к следующей краевой задаче:

Найти собственные значения и собственные функции $y(x) \not\equiv 0$ уравнения

$$(ky')' - qy + \lambda\rho y = 0, \quad k(x) > 0, \quad a < x < b, \tag{19}$$

где $k(x)$ имеет вид (13), при условии ограниченности (14) или (18) и обычном условии, например, первого рода:

$$y(b) = 0 \quad \text{при} \quad x = b.$$

Если $k(a) = 0$ и $k(b) = 0$ (например, для уравнения Лежандра), то на обоих концах интервала (a, b) ставится условие ограниченности, так что $y_1(x) = (x-a)^{n_1}(b-x)^{n_2}u(x)$, где $n_1 \geqslant 0$, $n_2 \geqslant 0$, $u(a) \neq 0$, $u(b) \neq 0$, $u(x)$ — непрерывная на (a, b) функция; это условие формально записываем в виде

$$|y(a)| < \infty, \quad |y(b)| < \infty.$$

Если интервал (a, b) бесконечен, как, например, $a = -\infty$, $b = \infty$ для уравнения Чебышева — Эрмита или $a = 0$, $b = \infty$ для уравнения Чебышева — Лагерра, то при $a = -\infty$ или при $b = \infty$ в этом случае условие ограниченности (18) заменяется более слабым требованием: решение на бесконечности не должно возрастать сильнее, чем конечная степень x.

Формулируем общие свойства собственных функций и собственных значений поставленной краевой задачи (18)—(20).

1. Существует бесчисленное множество собственных значений $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_n < \ldots$, которым соответствуют собственные функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x), \ldots$

2. При $q \geqslant 0$ все собственные значения не отрицательны:

$$\lambda_n \geqslant 0.$$

3. Собственные функции $y_n(x)$ и $y_m(x)$, соответствующие разным собственным значениям λ_n и λ_m, ортогональны между собой с весом $\rho(x)$:

$$(y_n, y_m) = \int_a^b y_n(x)\, y_m(x)\, \rho(x)\, dx = 0.$$

4. Имеет место теорема разложимости: функция $f(x)$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям $y_n(x)$ данной задачи

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x), \quad f_n = \frac{(f, y_n)}{(y_n, y_n)},$$

если: 1) $f(x)$ имеет при $a < x < b$ непрерывную первую и кусочно-непрерывную вторую производные;

2) $f(x)$ удовлетворяет граничным условиям задачи; при этом, если $k(a) = 0$, то

$$|f(a)| < \infty \quad \text{при} \quad 0 \leqslant q(a) < \infty,$$
$$f(a) = 0 \quad \text{при} \quad q(x) \xrightarrow[x \to a]{} \infty.$$

Свойства 2 и 3 доказываются так же, как и в гл. II, § 3, с помощью формул Грина. При этом используется ограниченность в точке $x = a$ функции $y_n(x)$, а также следующее из леммы 3 равенство $\lim\limits_{x \to a} k(x) y_n'(x) = 0$, в силу чего подстановки в формулах Грина при $x = a$ обращаются в нуль. Доказательство свойств 1 и 4 обычно проводится с помощью теории интегральных уравнений. Для того чтобы 1 и 4 имели место, достаточно, чтобы $k(x)$ была непрерывной, а $q(x)$ — либо непрерывной, либо имела вид $q_1(x)/(x-a)$, где $q_1(x)$ — непрерывная функция. Для изучаемых ниже классов специальных функций эти условия выполнены.

Краевая задача (19)—(20) эквивалентна интегральному уравнению

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi,$$

где $K(x, \xi) = G(x, \xi)\sqrt{\rho(x)\rho(\xi)}$, $\varphi(x) = \sqrt{\rho(x)}\, y(x)$, а $G(x, \xi)$ — функция Грина для оператора L. В случае $k(a) = 0$, $k(b) \neq 0$, $y(b) = 0$ функция Грина определяется так:

1. $G(x, \xi)$ — непрерывная функция x при фиксированном ξ, $a \leqslant \xi \leqslant b$.
2. Первая производная $\dfrac{dG}{dx}$ испытывает скачок при $x = \xi$:

$$k(x)\frac{dG}{dx}(x, \xi)\Big|_{x=\xi-0}^{x=\xi+0} = k(\xi)\,[G'(\xi+0, \xi) - G'(\xi-0, \xi)] = -1.$$

3. $L_x G(x, \xi) = 0$ во всех точках $a < x < b$, кроме $x = \xi$.
4. $G(x, \xi)$ удовлетворяет граничным условиям

$$|G(a, \xi)| < \infty, \quad G(b, \xi) = 0.$$

Из определения $G(x, \xi)$ следует $G(x, \xi) > 0$ при $x, \xi \in (a, b)$, $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ (симметрия).

Перейдем к изучению конкретных специальных функций: цилиндрических и сферических функций, а также полиномов Чебышева — Эрмита и Чебышева — Лагерра.

ЧАСТЬ I
ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Цилиндрические функции

При решении многих задач математической физики приходят к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0 \\ \text{или}\quad &\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

называемому **уравнением цилиндрических функций** n**-го порядка**. Это уравнение часто называют также **уравнением Бесселя** n**-го порядка**.

Характерными задачами (см. главы V, VI и VII), приводящими к цилиндрическим функциям, являются краевые задачи для уравнения

$$\Delta u+k^2u=0 \tag{2}$$

вне или внутри круга (вне или внутри цилиндра в случае трех независимых переменных). Вводя полярные координаты, преобразуем уравнение (2) к виду

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+k^2u=0. \tag{3}$$

Полагая $u=R\Phi$ и разделяя в (3) переменные, получаем:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\left(k^2-\frac{\lambda}{r^2}\right)R=0$$

и

$$\Phi''+\lambda\Phi=0.$$

Условие периодичности для $\Phi(\varphi)$ дает $\lambda=n^2$, где n — целое число. Полагая затем $x=kr$, приходим к уравнению цилиндрических функций

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0,\quad R(r)=y(kr)$$

или

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0.$$