Перейдем к изучению конкретных специальных функций: цилиндрических и сферических функций, а также полиномов Чебышева — Эрмита и Чебышева — Лагерра.

ЧАСТЬ I

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Цилиндрические функции

При решении многих задач математической физики приходят к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0 \\ \text{или}\quad &\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

называемому **уравнением цилиндрических функций** n**-го порядка**. Это уравнение часто называют также **уравнением Бесселя** n**-го порядка**.

Характерными задачами (см. главы V, VI и VII), приводящими к цилиндрическим функциям, являются краевые задачи для уравнения

$$\Delta u+k^2u=0 \tag{2}$$

вне или внутри круга (вне или внутри цилиндра в случае трех независимых переменных). Вводя полярные координаты, преобразуем уравнение (2) к виду

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}+k^2u=0. \tag{3}$$

Полагая $u=R\Phi$ и разделяя в (3) переменные, получаем:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\left(k^2-\frac{\lambda}{r^2}\right)R=0$$

и

$$\Phi''+\lambda\Phi=0.$$

Условие периодичности для $\Phi(\varphi)$ дает $\lambda=n^2$, где n — целое число. Полагая затем $x=kr$, приходим к уравнению цилиндрических функций

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0,\quad R(r)=y(kr)$$

или

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{n^2}{x^2}\right)y=0.$$

В случае решений волнового уравнения (2), обладающих радиальной (цилиндрической) симметрией, мы получим уравнение Бесселя нулевого порядка

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+y=0 \quad \text{или} \quad y''+\frac{1}{x}y'+y=0.$$

1. Степенные ряды. Уравнение Бесселя ν-го порядка

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0 \tag{1}$$

или

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0 \tag{1'}$$

(ν — произвольное действительное или комплексное число, действительную часть которого мы можем считать неотрицательной) имеет особую точку при $x=0$. Поэтому решение $y(x)$ следует искать в виде степенного ряда [1])

$$y(x)=x^\sigma(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_kx^k+\ldots), \tag{4}$$

начинающегося с x^σ, где σ — характеристический показатель, подлежащий определению. Подставляя ряд (4) в уравнение (1′) и приравнивая нулю коэффициенты при x^σ, $x^{\sigma+1}$, ..., $x^{\sigma+k}$, получим уравнение для определения σ и систему уравнений для определения коэффициентов a_k:

$$\left.\begin{array}{r} a_0(\sigma^2-\nu^2)=0,\\ a_1[(\sigma+1)^2-\nu^2]=0,\\ a_2[(\sigma+2)^2-\nu^2]+a_0=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_k[(\sigma+k)^2-\nu^2]+a_{k-2}=0\\ (k=2,3,\ldots). \end{array}\right\} \tag{5}$$

Так как мы можем предположить, что $a_0\neq 0$, то из первого уравнения (5) следует, что

$$\sigma^2-\nu^2=0 \quad \text{или} \quad \sigma=\pm\nu. \tag{6}$$

Перепишем k-е уравнение (5) $k>1$ в виде

$$(\sigma+k+\nu)(\sigma+k-\nu)a_k+a_{k-2}=0. \tag{7}$$

Оставим пока в стороне тот случай, когда $\sigma+\nu$ или $\sigma-\nu$ (и соответственно -2ν или 2ν) равно отрицательному целому числу.

---

[1]) См. В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, Физматгиз, 1959; Л. Э. Эльсгольц, Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, «Наука», 1965.

Тогда из второго уравнения (5), в силу (6), будем иметь

$$a_1 = 0. \tag{8}$$

Уравнение (7) дает рекуррентную формулу для определения a_k через a_{k-2}:

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{(\sigma+k+\nu)(\sigma+k-\nu)}. \tag{9}$$

Отсюда и из (8) заключаем, что все нечетные коэффициенты равны нулю. Если ν вещественно, то при $\sigma = -\nu$ решение обращается в бесконечность в точке $x = 0$.

Остановимся на случае $\sigma = \nu$. Из (9) следует, что каждый четный коэффициент может быть выражен через предыдущий:

$$a_{2m} = -a_{2m-2}\frac{1}{2^2 m(m+\nu)}. \tag{10}$$

Последовательное применение этой формулы позволяет найти выражение a_{2m} через a_0

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{a_0}{2^{2m} m!(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+m)}. \tag{11}$$

Воспользуемся свойством гамма-функции $\Gamma(s)$[1])

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) = \ldots = s(s-1)\ldots(s-n)\Gamma(s-n).$$

Если s — целое число, то

$$\Gamma(s+1) = s!$$

Коэффициент a_0 до сих пор оставался произвольным. Если $\nu \neq -n$, где $n > 0$ — целое число, то, полагая

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \tag{12}$$

и используя отмеченное выше свойство гамма-функций, получим:

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k+\nu}\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}. \tag{13}$$

Если же $\sigma = -\nu$, $\nu \neq n$, где $n > 0$ — целое число, то, полагая

$$a_0 = \frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}, \tag{12'}$$

получим:

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{1}{2^{2k-\nu}\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)}. \tag{14}$$

---

[1]) Б. М. Будак, С. В. Фомин, Кратные интегралы и ряды, «Наука», 1965.

Ряд (3), соответствующий $\sigma=\nu\geqslant 0$, с коэффициентами (12) и (13)

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \tag{15}$$

называется **функцией Бесселя первого рода ν-го порядка**. Ряд

$$J_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}, \tag{16}$$

соответствующий $\sigma=-\nu$, представляет второе решение уравнения (1), линейно независимое от $J_\nu(x)$. Ряды (15) и (16), очевидно, сходятся на всей плоскости x.

Рассмотрим теперь тот случай, когда ν равно половине целого числа. Пусть $\nu^2=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$, где $n\geqslant 0$ — целое число. Полагая в формулах (5) $\sigma=n+\frac{1}{2}$, получим:

$$2(n+1)a_1=0,$$

$$k(k+2n+1)a_k+a_{k-2}=0 \qquad (k>1),$$

так что

$$a_1=0,$$

$$a_k=-\frac{a_{k-2}}{k(k+2n+1)}.$$

Последовательно применяя эту формулу, найдем:

$$a_{2k}=\frac{(-1)^k a_0}{2\cdot 4\ldots(2k)(2n+3)(2n+5)\ldots(2n+2k+1)}.$$

Полагая здесь $\nu=n+\frac{1}{2}$, получаем формулу (11).

Положив, далее,

$$a_0=\frac{1}{2^{n+\frac{1}{2}}\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)},$$

получим формулу (13).

Пусть

$$\sigma=-n-\frac{1}{2},$$

тогда уравнения (5) для a_k принимают вид

$$a_1\cdot 1(-2n)=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$k(k-1-2n)a_k+a_{k-2}=0.$$

По-прежнему все коэффициенты a_1 $a_3, \ldots, a_{2n-1}$ равны нулю, но для a_{2n+1} получаем уравнение $0 \cdot a_{2n+1} + a_{2n-1} = 0$, которое удовлетворяется при любом значении a_{2n+1}. При $k > n$ коэффициент a_{2k+1} определяется равенством

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^{k-n} a_{2n+1}}{(2n+3)(2n+5)\ldots 2\cdot 4\ldots(2k-2n)}.$$

Полагая $a_{2n+1} = 0$, $a_0 = \dfrac{1}{2^{-n-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)}$, получаем формулу (14).

Таким образом, при $\nu = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)$ не требуется никакого изменения в определении функции $J_\nu(x)$. Формулы (15) и (16) остаются в силе.

Отметим, что формула (16) определяет $J_{-\nu}(x)$ лишь для нецелых значений ν, поскольку определение a_0 по формулам (12) при целых отрицательных $\nu = -n$ лишено смысла. Продолжим по непрерывности (16) на целые значения $\nu = n$. Поскольку $\Gamma(k - n + 1) = \pm\infty$ для $k \leqslant k_0 = n - 1$, суммирование (16) фактически начинается со значений $k = k_0 + 1 = n$. Изменяя в (16) индекс суммирования $k = n + k'$, получаем:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k'}}{\Gamma(k'+n+1)\Gamma(k'+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k'+n} = (-1)^n J_n(x),$$

так как суммирование начинается с $k' = 0$.

Выпишем в качестве примера ряды для функций Бесселя первого рода нулевого ($n = 0$) и первого ($n = 1$) порядков:

$$J_0(x) = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \ldots,$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!\,3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5 - \ldots$$

Функции $J_0(x)$ и $J_1(x)$ наиболее часто встречаются в приложениях и для них имеются подробные таблицы[1]). На стр. 726 приводятся графики $J_0(x)$ и $J_1(x)$.

Функции $J_n(x)$ и $J_{-n}(x)$ (n — целое число), как мы видели, линейно зависимы

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

Для нецелых значений ν функций $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$ линейно независимы. В самом деле, $J_\nu(x)$ имеет нуль а $J_{-\nu}(x)$ — полюс ν-го порядка в точке $x = 0$. Таким образом, если ν — нецелое

[1]) Во всех таблицах специальных функций всегда имеются таблицы для бесселевых функций первого рода (см., например, Е. Янке и Ф. Эмде, Ф. Лёш, Специальные функции, формулы, графики, таблицы, «Наука», 1964, где $J_0(x)$ и $J_1(x)$ даны с пятью знаками для значений x в интервале от 0 до 14,9).

число, то всякое решение $y_\nu(x)$ уравнения Бесселя (1) может быть представлено в виде линейной комбинации функций $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$

$$y_\nu(x)=C_1J_\nu(x)+C_2J_{-\nu}(x).$$

Если ищется ограниченное решение уравнения (1), то $C_2=0$ и

$$y_\nu(x)=C_1J_\nu(x) \quad \text{при} \quad \operatorname{Re}\nu>0.$$

2. Рекуррентные формулы. Установим следующие соотношения, существующие между функциями Бесселя первого рода различных порядков,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right)=-\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}, \tag{17}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^\nu J_\nu(x)\right)=x^\nu J_{\nu-1}(x). \tag{18}$$

Эти формулы проверяются непосредственным дифференцированием рядов для бесселевых функций. Покажем, например, справедливость соотношения (17)

$$x^\nu\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right)=x^\nu\frac{1}{2^\nu}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1}2k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{\Gamma(k)\,\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+(\nu-1)}.$$

В последней сумме k меняются от 1 до ∞. Введем новый индекс суммирования $l=k-1$, который будет меняться от 0 до ∞. Тогда будем иметь:

$$x^\nu\frac{d}{dx}\left(\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right)=$$

$$=-\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{1}{\Gamma(l+1)\,\Gamma[l+(\nu+1)+1]}\left(\frac{x}{2}\right)^{[2l+(\nu+1)]}=-J_{\nu+1}(x),$$

что и доказывает формулу (17). Справедливость формулы (18) доказывается аналогично.

Отметим два важных частных случая рекуррентных формул. При $\nu=0$ из (17) следует:

$$J_0'(x)=-J_1(x). \tag{19}$$

Для случая $\nu=1$ формула (18) дает:

$$[xJ_1(x)]'=xJ_0(x) \quad \text{или} \quad xJ_1(x)=\int_0^x \xi J_0(\xi)\,d\xi. \tag{20}$$

Установим рекуррентные формулы, связывающие $J_\nu(x)$, $J_{\nu+1}(x)$ и $J_{\nu-1}(x)$. Производя дифференцирование в (17) и (18), получаем:

$$\frac{\nu J_\nu(x)}{x} - J'_\nu(x) = J_{\nu+1}(x), \tag{17'}$$

$$\frac{\nu J_\nu(x)}{x} + J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x). \tag{18'}$$

Складывая и вычитая (17′) и (18′), находим рекуррентные формулы

$$\left.\begin{aligned} J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) &= \frac{2\nu}{x} J_\nu(x), \\ J_{\nu+1}(x) - J_{\nu-1}(x) &= -2J'_\nu(x). \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

С помощью формулы (21) можно вычислять $J_{\nu+1}(x)$, если известны $J_\nu(x)$ и $J_{\nu-1}(x)$:

$$J_{\nu+1}(x) = -J_{\nu-1}(x) + \frac{2\nu J_\nu(x)}{x}. \tag{21'}$$

3. Функции полуцелого порядка. Найдем выражения для функций $J_{1/2}(x)$ и $J_{-1/2}(x)$:

$$J_{1/2}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma\left(\frac{3}{2}+m\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{1/2+2m}, \tag{22}$$

$$J_{-1/2}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-1/2+2m}. \tag{23}$$

Пользуясь свойством гамма-функции, находим:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{3}{2}+m\right) &= \frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2m+1)}{2^{m+1}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right) &= \frac{1\cdot3\ldots(2m-1)}{2^{m}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

где

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Подставляя (24) в формулы (22) и (23), получаем:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}\, x^{2m+1}, \tag{25}$$

$$J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!}\, x^{2m}. \tag{26}$$

Нетрудно видеть, что сумма в (25) представляет собой разложение $\sin x$, а сумма в (26) — разложение $\cos x$ по степеням x. Таким образом, $J_{1/2}(x)$ и $J_{-1/2}(x)$ выражаются через элементарные функции

$$J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x, \tag{27}$$

$$J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x. \tag{28}$$

Рассмотрим функции $J_{n+1/2}(x)$, где n — целое число. Из (21′) следует:

$$J_{3/2}(x)=\frac{1}{x}J_{1/2}(x)-J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(-\cos x+\frac{\sin x}{x}\right)=$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{x}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right];$$

$$J_{5/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{-\sin x+\frac{3}{x}\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{x}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}=$$
$$=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\sin(x-\pi)\left(1-\frac{3}{x^2}\right)+\cos(x-\pi)\cdot\frac{3}{x}\right\}.$$

Применяя последовательно формулу (21′) найдем:

$$J_{n+1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)P_n\left(\frac{1}{x}\right)+\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}\right)Q_n\left(\frac{1}{x}\right)\right\}, \tag{29}$$

где $P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ — многочлен степени n относительно $\frac{1}{x}$, а $Q_n\left(\frac{1}{x}\right)$ — многочлен степени $n-1$. Отметим, что $P_n(0)=1$, $Q_n(0)=0$.

4. Асимптотический порядок цилиндрических функций. Решения уравнения Бесселя обычно называют цилиндрическими функциями. В п. 1 была определена одна из цилиндрических функций — функция Бесселя.

Основным свойством цилиндрических функций является их поведение при $x\to 0$ и $x\to\infty$ (асимптотическое поведение). Ниже будет показано, что *любая цилиндрическая функция однозначно определяется своей асимптотикой при $x\to\infty$, точнее, главным членом асимптотического разложения.*

Докажем, что любая вещественная цилиндрическая функция при больших x представима в виде

$$y_\nu(x)=\gamma_\infty\frac{\sin(x+\delta_\infty)}{\sqrt{x}}+O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \tag{30}$$

где $\gamma_\infty\neq 0$, δ_∞ — некоторые постоянные, $O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$ означает члены порядка не ниже $\frac{1}{x^{3/2}}$.

Полагая

$$y=\frac{v(x)}{\sqrt{x}}, \tag{31}$$

вычисляя производные $y'=-0{,}5x^{-3/2}v+x^{-1/2}v'$, $y''=x^{-1/2}v''-x^{-3/2}v'+0{,}75x^{-5/2}v$ и подставляя их в уравнение Бесселя, получим уравнение

$$v''+\left(1-\frac{\nu^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right)v=0, \tag{32}$$

являющееся частным случаем уравнения

$$v''+(1+\rho(x))\,v=0, \tag{33}$$

где

$$\rho(x)=O\left(\frac{1}{x^2}\right). \tag{34}$$

Положим

$$v=\gamma\sin(x+\delta),\quad v'=\gamma\cos(x+\delta), \tag{35}$$

где $\gamma(x)$ и $\delta(x)$ — некоторые функции x, причем $\gamma(x)\neq 0$ ни в одной точке, иначе v и v' одновременно обращались бы в нуль и $v(x)$ было бы тождественно равно нулю. Пользуясь (35) и (33), будем иметь:

$$v'=\gamma\cos(x+\delta)=\gamma'\sin(x+\delta)+\gamma(\delta'+1)\cos(x+\delta),$$

$$v''=\gamma'\cos(x+\delta)-\gamma(\delta'+1)\sin(x+\delta)=-(1+\rho)\gamma\sin(x+\delta).$$

Отсюда находим:

$$\delta'=\rho\sin^2(x+\delta)=O\left(\frac{1}{x^2}\right), \tag{36}$$

$$\frac{\gamma'}{\gamma}=-\frac{\delta'}{\operatorname{tg}(x+\delta)}=-\rho\sin(x+\delta)\cos(x+\delta)=O\left(\frac{1}{x^2}\right). \tag{37}$$

Покажем, что существуют предельные значения γ и δ при $x\to\infty$

В самом деле,

$$\delta(x)=\delta(a)-\int_x^a\delta'(s)\,ds,$$

откуда, в силу (36), следует, что существует предел $\lim\limits_{a\to\infty}\delta(a)=\delta_\infty$ и

$$\delta(x)=\delta_\infty+O\left(\frac{1}{x}\right). \tag{38}$$

Аналогично находим из (37)

$$\gamma(x)=\gamma_\infty\left(1+O\left(\frac{1}{x}\right)\right), \tag{39}$$

причем $\gamma_\infty\neq 0$.

Таким образом, всякое решение уравнения (33), и, следовательно, уравнения (32) при $x \to \infty$ имеет вид

$$v(x) = \gamma_\infty \sin(x + \delta_\infty) + O\left(\frac{1}{x}\right). \tag{40}$$

Тем самым установлена справедливость асимптотической формулы (30) для любой цилиндрической функции $y_\nu(x)$.

Покажем, что не может существовать двух различных цилиндрических функций с одинаковой асимптотикой. В самом деле, пусть $\bar{y}_\nu(x)$ и $\bar{\bar{y}}_\nu(x)$ — две различные цилиндрические функции, для которых

$$\bar{\gamma}_\infty = \bar{\bar{\gamma}}_\infty, \qquad \bar{\delta}_\infty = \bar{\bar{\delta}}_\infty. \tag{41}$$

Разность этих функций

$$\tilde{y}_\nu(x) = \bar{y}_\nu(x) - \bar{\bar{y}}_\nu(x) \not\equiv 0$$

также является цилиндрической функцией, имеющей, в силу (41), следующую асимптотику:

$$\tilde{y}_\nu(x) = O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

Однако это противоречит формуле (30) для любой цилиндрической функции $\tilde{y}_\nu(x)$.

Следовательно, $\tilde{y}_\nu(x) \equiv 0$ и $\bar{y}_\nu(x) \equiv \bar{\bar{y}}_\nu(x)$.

Решением уравнения Бесселя может быть и комплексная функция $Z_\nu(x) = \bar{Z}_\nu(x) + i\bar{\bar{Z}}_\nu(x)$, где $\bar{Z}_\nu(x)$ и $\bar{\bar{Z}}_\nu(x)$ — вещественные цилиндрические функции. Из предыдущего следует, что комплексная цилиндрическая функция также однозначно определяется своей асимптотикой при $x \to \infty$.

Значения постоянных γ_∞ и δ_∞ определяются с помощью дополнительных исследований, которые дают

$$\gamma_\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad \text{для всех } \nu.$$

В § 1, п. 3 для $\nu = n + 1/2$ была получена формула (29), из которой следует, что

$$J_{n+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right). \tag{42}$$

В § 4 будет дан вывод асимптотической формулы для функции $J_\nu(x)$:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \tag{43}$$

где ν — любое неотрицательное число ($\nu \geqslant 0$). Формула (43) имеет место и при произвольном ν, так что

$$J_{-\nu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right). \tag{44}$$

§ 2. Краевые задачи для уравнения Бесселя

Простейшая краевая задача для уравнения Бесселя на отрезке $[0, r_0]$ связана с задачей о собственных колебаниях круглой мембраны

$$\Delta_2 v + \lambda v = 0, \quad \Delta_2 v = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}, \tag{1}$$

$$v(r, \varphi)\big|_{r=r_0} = 0, \quad |v(r, \varphi)| < \infty, \quad v(r, \varphi) \not\equiv 0. \tag{2}$$

Полагая $v(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ и разделяя переменные (см. Введение), получаем:

$$\Phi'' + \nu\Phi = 0, \tag{3}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \left(\lambda - \frac{\nu}{r^2}\right)R = 0, \quad R(r_0) = 0. \tag{4}$$

Условие периодичности для $\Phi(\varphi)$ дает $\nu = n^2$, где n — целое число. Таким образом, функция $R(r)$ должна определяться из уравнения Бесселя

$$\mathscr{L}[R] + \lambda r R = 0 \quad \left(\mathscr{L}[R] = \frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - \frac{n^2}{r}R\right) \tag{5}$$

при граничном условии

$$R(r_0) = 0 \tag{6}$$

и естественном граничном условии ограниченности в точке $r = 0$

$$|R(0)| < \infty. \tag{7}$$

Полагая

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{\lambda}\, r, \\ y(x) &= R(r) = R\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

приходим к уравнению

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0, \quad y(x) \not\equiv 0 \tag{9}$$

при дополнительных условиях

$$y\left(\sqrt{\lambda}\, r_0\right) = 0, \tag{10}$$

$$|y(0)| < \infty. \tag{11}$$

Отсюда находим

$$y(x) = AJ_n(x). \tag{12}$$