где ν — любое неотрицательное число ($\nu \geqslant 0$). Формула (43) имеет место и при произвольном ν, так что

$$J_{-\nu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right). \tag{44}$$

§ 2. Краевые задачи для уравнения Бесселя

Простейшая краевая задача для уравнения Бесселя на отрезке $[0, r_0]$ связана с задачей о собственных колебаниях круглой мембраны

$$\Delta_2 v + \lambda v = 0, \quad \Delta_2 v = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}, \tag{1}$$

$$v(r, \varphi)\big|_{r=r_0} = 0, \quad |v(r, \varphi)| < \infty, \quad v(r, \varphi) \not\equiv 0. \tag{2}$$

Полагая $v(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ и разделяя переменные (см. Введение), получаем:

$$\Phi'' + \nu\Phi = 0, \tag{3}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \left(\lambda - \frac{\nu}{r^2}\right)R = 0, \quad R(r_0) = 0. \tag{4}$$

Условие периодичности для $\Phi(\varphi)$ дает $\nu = n^2$, где n — целое число. Таким образом, функция $R(r)$ должна определяться из уравнения Бесселя

$$\mathscr{L}[R] + \lambda r R = 0 \quad \left(\mathscr{L}[R] = \frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) - \frac{n^2}{r}R\right) \tag{5}$$

при граничном условии

$$R(r_0) = 0 \tag{6}$$

и естественном граничном условии ограниченности в точке $r = 0$

$$|R(0)| < \infty. \tag{7}$$

Полагая

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{\lambda}\, r, \\ y(x) &= R(r) = R\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

приходим к уравнению

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0, \quad y(x) \not\equiv 0 \tag{9}$$

при дополнительных условиях

$$y\left(\sqrt{\lambda}\, r_0\right) = 0, \tag{10}$$

$$|y(0)| < \infty. \tag{11}$$

Отсюда находим

$$y(x) = AJ_n(x). \tag{12}$$

В силу граничного условия $y(r_0\sqrt{\lambda})=0$ имеем:

$$J_n(\mu)=0 \quad (\mu=r_0\sqrt{\lambda}). \tag{13}$$

Это трансцендентное уравнение имеет бесчисленное множество вещественных корней $\mu_1^{(n)}, \mu_2^{(n)}, \ldots, \mu_m^{(n)}, \ldots$ [1]), т. е. уравнение (1) имеет бесчисленное множество собственных значений

$$\lambda_m^{(n)}=\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2 \quad (m=1, 2, \ldots), \tag{14}$$

которым соответствуют собственные функции

$$R(r)=AJ_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right) \tag{15}$$

краевой задачи (5) — (7).

Из способа построения собственных функций видно, что всякое нетривиальное решение рассматриваемой краевой задачи дается формулой (15).

Из общей теории уравнений вида $\mathscr{L}[y]+\lambda\rho y=0$, рассмотренных выше (см. Введение), следует ортогональность системы собственных функций

$$\left\{J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)\right\}$$

с весом r:

$$\int_0^{r_0} J_n\left(\frac{\mu_{m_1}^{(n)}}{r_0}r\right)J_n\left(\frac{\mu_{m_2}^{(n)}}{r_0}r\right)r\,dr=0 \quad \text{при} \quad m_1\neq m_2. \tag{16}$$

Вычислим норму собственных функций $R_1(r)=J_n(\alpha_1 r)$, где $\alpha_1=\mu_m^{(n)}/r_0$. Попутно будет получено условие ортогональности (16). Для этого рассмотрим функцию $R_2(r)=J_n(\alpha_2 r)$, где α_2 — произвольный параметр.

Функции $R_1(r)$ и $R_2(r)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_1}{dr}\right)+\left(\alpha_1^2 r-\frac{n^2}{r}\right)R_1=0,$$

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_2}{dr}\right)+\left(\alpha_2^2 r-\frac{n^2}{r}\right)R_2=0,$$

причем $R_1(r_0)=0$, а $R_2(r)$ уже не удовлетворяет этому граничному условию. Вычитая из первого уравнения второе, предварительно умножив их, соответственно, на $R_2(r)$ и $R_1(r)$, и

[1]) На стр. 725 дана таблица корней уравнения $J_0(\mu)=0$, в частности первый корень $\mu_1^{(0)}=2{,}4048$.

интегрируя затем по r в пределах от 0 до r_0, будем иметь:

$$(\alpha_1^2-\alpha_2^2)\int_0^{r_0} rR_1(r)\,R_2(r)\,dr+\left[r\left(R_2R_1'-R_1R_2'\right)\right]\Big|_0^{r_0}=0,$$

откуда находим:

$$\int_0^{r_0} R_1R_2r\,dr=-\frac{r_0J_n(\alpha_2r_0)\,\alpha_1J_n'(\alpha_1r_0)-r_0J_n(\alpha_1r_0)\,\alpha_2J_n'(\alpha_2r_0)}{\alpha_1^2-\alpha_2^2}=$$
$$=-\frac{r_0J_n(\alpha_2r_0)\,\alpha_1J_n'(\alpha_1r_0)}{\alpha_1^2-\alpha_2^2}. \qquad (17)$$

Переходя к пределу при $\alpha_2\to\alpha_1$ и раскрывая неопределенность в правой части, получаем выражение для квадрата нормы:

$$\|R_1\|^2=\|J_n(\alpha_1r)\|^2=\int_0^{r_0} rR_1^2(r)\,dr=\frac{r_0^2}{2}\left[J_n'(\alpha_1r_0)\right]^2$$

или

$$\int_0^{r_0} J_n^2\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)r\,dr=\frac{r_0^2}{2}\left[J_n'\left(\mu_m^{(n)}\right)\right]^2. \qquad (18)$$

В частности, квадрат нормы функции $J_0\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0}r\right)$ равен

$$\int_0^{r_0} J_0^2\left(\frac{\mu_m^{(0)}}{r_0}\right)r\,dr=\frac{r_0^2}{2}J_1^2\left(\mu_m^{(0)}\right).$$

Если положить $\alpha_2=\frac{\mu_{m_2}^{(n)}}{r_0}\neq\alpha_1=\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}$, то из формулы (17) сразу следует условие (16) ортогональности функций Бесселя.

Отметим, что имеются таблицы нулей $\mu_m^{(0)}$ функции $J_0(\mu)$ и соответствующих им значений $J_1\left(\mu_m^{(0)}\right)$ (см. стр. 725). Приведем несколько первых значений $\mu_m^{(0)}$: $\mu_1^{(0)}=2{,}4048$, $\mu_2^{(0)}=5{,}5201$, $\mu_3^{(0)}=8{,}6531$, $\mu_4^{(0)}=11{,}7915$.

Из асимптотической формулы (42) § 2 следует, что с возрастанием номера m нуля $\mu_m^{(n)}$ разность $\mu_{m+1}^{(n)}-\mu_m^{(n)}$ должна стремиться к π. Это можно проследить даже для приведенных выше значений $\mu_m^{(0)}$ (например, $\mu_3^{(0)}-\mu_2^{(0)}=3{,}1330$, $\mu_4^{(0)}-\mu_3^{(0)}=$ $=3{,}1384$, $\mu_7^{(0)}-\mu_6^{(0)}=3{,}1405$ и т. д.).

В силу общих свойств собственных функций краевых задач (стр. 630) имеет место теорема разложимости:

всякая дважды дифференцируемая функция $f(r)$, ограниченная при $r=0$ и обращающаяся в нуль при $r=r_0$, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$f(r)=\sum_{m=1}^{\infty} A_m J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right),$$

где

$$A_m=\frac{\int\limits_0^{r_0} f(r)\,J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)r\,dr}{\|J_n\|^2},\qquad \|J_n\|^2=\frac{r_0^2}{2}\left[J_n'(\mu_m^{(n)})\right]^2.$$

Вторая краевая задача для уравнения Бесселя:

$$\mathscr{L}(R)+\lambda rR=0,\quad R(r)\not\equiv 0,$$

$$R'(r_0)=0,\qquad |R(0)|<\infty$$

решается аналогично. Собственные функции и собственные значения также будут выражаться формулами (15) и (14), где под $\mu_m^{(n)}$ следует понимать корень номера m уравнения

$$J_n'(\mu)=0.$$

Собственные функции задачи ортогональны между собой с весом r (см. (16)) и имеют квадрат нормы, равный

$$\int\limits_0^{r_0} J_n^2\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{r_0}\right)r\,dr=\frac{r_0^2}{2}\left[1-\frac{n^2}{(\mu_m^{(n)})^2}\right]J_n^2(\mu_m^{(n)}).$$

Аналогично решается и третья краевая задача. В этом случае для определения $\mu_m^{(n)}$ получается уравнение вида

$$J_n'(\mu)=\mu h J_n(\mu).$$

§ 3. Различные типы цилиндрических функций

1. Функции Ханкеля. Наряду с функциями Бесселя первого рода $J_\nu(x)$ большое значение для приложений имеют другие специальные виды решений уравнения Бесселя. К их числу относятся прежде всего ф у н к ц и и Х а н к е л я п е р в о г о и в т о р о г о р о д а $H_\nu^{(1)}(x)$ и $H_\nu^{(2)}(x)$, являющиеся комплексно-сопряженными решениями уравнения Бесселя. С точки зрения физических приложений основной характеристикой функций Ханкеля является асимптотическое поведение при больших значениях аргумента. Поэтому мы определим функции Ханкеля как