всякая дважды дифференцируемая функция $f(r)$, ограниченная при $r=0$ и обращающаяся в нуль при $r=r_0$, может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$f(r)=\sum_{m=1}^{\infty} A_m J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right),$$

где

$$A_m=\frac{\int\limits_0^{r_0} f(r)\,J_n\left(\frac{\mu_m^{(n)}}{r_0}r\right)r\,dr}{\|J_n\|^2}, \qquad \|J_n\|^2=\frac{r_0^2}{2}\left[J_n'(\mu_m^{(n)})\right]^2.$$

Вторая краевая задача для уравнения Бесселя:

$$\mathscr{L}(R)+\lambda rR=0, \quad R(r)\not\equiv 0,$$
$$R'(r_0)=0, \quad |R(0)|<\infty$$

решается аналогично. Собственные функции и собственные значения также будут выражаться формулами (15) и (14), где под $\mu_m^{(n)}$ следует понимать корень номера m уравнения

$$J_n'(\mu)=0.$$

Собственные функции задачи ортогональны между собой с весом r (см. (16)) и имеют квадрат нормы, равный

$$\int\limits_0^{r_0} J_n^2\left(\frac{\mu_m^{(n)}r}{r_0}\right)r\,dr=\frac{r_0^2}{2}\left[1-\frac{n^2}{(\mu_m^{(n)})^2}\right]J_n^2(\mu_m^{(n)}).$$

Аналогично решается и третья краевая задача. В этом случае для определения $\mu_m^{(n)}$ получается уравнение вида

$$J_n'(\mu)=\mu hJ_n(\mu).$$

§ 3. Различные типы цилиндрических функций

1. Функции Ханкеля. Наряду с функциями Бесселя первого рода $J_\nu(x)$ большое значение для приложений имеют другие специальные виды решений уравнения Бесселя. К их числу относятся прежде всего функции Ханкеля первого и второго рода $H_\nu^{(1)}(x)$ и $H_\nu^{(2)}(x)$, являющиеся комплексно-сопряженными решениями уравнения Бесселя. С точки зрения физических приложений основной характеристикой функций Ханкеля является асимптотическое поведение при больших значениях аргумента. Поэтому мы определим функции Ханкеля как цилиндрические функции, обладающие следующей асимптотикой:

$$H_\nu^{(1)}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{i\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)}+\ldots, \tag{1}$$

$$H_\nu^{(2)}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{-i\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)}+\ldots, \tag{2}$$

где точками обозначены члены более высокого порядка малости относительно $1/x$. Условия (1), (2), в силу п. 4 § 1, определяют $H_\nu^{(1)}$ и $H_\nu^{(2)}$ однозначно. Разделяя действительную и мнимую части, представим функцию Ханкеля в виде

$$H_\nu^{(1)}(x)=J_\nu(x)+iN_\nu(x), \tag{3}$$

$$H_\nu^{(2)}(x)=J_\nu(x)-iN_\nu(x), \tag{4}$$

где функции

$$J_\nu(x)=\frac{1}{2}\left[H_\nu^{(1)}(x)+H_\nu^{(2)}(x)\right], \tag{3'}$$

$$N_\nu(x)=\frac{1}{2i}\left[H_\nu^{(1)}(x)-H_\nu^{(2)}(x)\right] \tag{4'}$$

имеют асимптотический характер

$$J_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)+\ldots, \tag{5}$$

$$N_\nu(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)+\ldots, \tag{6}$$

что следует из формул (1) и (2).

Как будет показано ниже (см. п. 4. § 4), введенная здесь функция $J_\nu(x)$ является функцией Бесселя первого рода, рассмотренной в § 1. Мнимая часть $N_\nu(x)$ функции Ханкеля называется *функцией Неймана* или *цилиндрической функцией второго рода ν-го порядка*.

Формулы (3) и (4) устанавливают связь между функциями Ханкеля, Бесселя и Неймана, аналогичную связи между показательной функцией мнимого аргумента, синусом и косинусом (формула Эйлера). Асимптотические формулы (1), (2), (5) и (6) подчеркивают эту аналогию.

При изучении решений уравнения колебаний

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})$$

мы видели, что амплитуда $v(x, y)$ установившихся колебаний

$$u(x, y, t)=v(x, y)\,e^{i\omega t}$$

удовлетворяет волновому уравнению

$$v_{xx}+v_{yy}+k^2v=\Delta v+k^2v=0 \quad \left(k^2=\frac{\omega^2}{a^2}\right).$$

Если решение волнового уравнения обладает радиальной симметрией $v(x, y)=v(r)$, то, как было отмечено в § 1, функция $v(kr)$ удовлетворяет уравнению Бесселя нулевого порядка.

Таким образом, функции

$$H_0^{(1)}(kr)\,e^{i\omega t}=\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\,e^{i(\omega t+kr)}\frac{1}{\sqrt{i}}+\ldots \left(\sqrt{i}=e^{i\frac{\pi}{4}}\right), \tag{7}$$

$$H_0^{(2)}(kr)\,e^{i\omega t}=\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\,e^{i(\omega t-kr)}\sqrt{i}+\ldots \tag{8}$$

являются решениями уравнения колебаний, имеющими характер цилиндрических волн. Функция $H_0^{(2)}(kr)\,e^{i\omega t}$ соответствует расходящимся цилиндрическим волнам, а функция $H_0^{(1)}(kr)\,e^{i\omega t}$ — сходящимся цилиндрическим волнам[1]).

Вторым важным свойством цилиндрических функций является их поведение при $x\to 0$. В силу леммы 1 Введения функции $H_\nu^{(1,2)}$ и N_ν при $x\to 0$ обращаются в бесконечность (так как $J_\nu(0)$ конечно), точнее, $H_0^{(1)}(x)$, $H_0^{(2)}(x)$, $N_0(x)\sim\ln\frac{1}{x}$, так как $J_0(0)=1\neq 0$; $H_\nu^{(1)}(x)$, $H_\nu^{(2)}(x)$, $N_\nu(x)\sim\frac{1}{x^\nu}$ при $\nu>0$, так как $J_\nu(x)\sim x^\nu$ при $x\to 0$.

Функции Ханкеля и Неймана нулевого порядка являются фундаментальными решениями уравнения $\Delta_2 v+k^2v=0$, так как они имеют нужную логарифмическую особенность при $r=\sqrt{x^2+y^2}\to 0$ (см. гл. VII). Приведем (без доказательства) точные выражения для главных членов разложения этих функций в окрестности точки $x=0$:

$$N_0(x)=-\frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{x}+\ldots,\quad H_0^{(1)}(x)=-\frac{2i}{\pi}\ln\frac{1}{x}+\ldots,$$

$$H_0^{(2)}=\frac{2i}{\pi}\ln\frac{1}{x}+\ldots$$

2. Функции Ханкеля и Неймана. Как было отмечено в п. 1, всякое решение уравнения Бесселя нецелого порядка ν выражается через функции J_ν и $J_{-\nu}$. Установим связь между функциями $H_\nu^{(1)}$, $H_\nu^{(2)}$, N_ν и J_ν, $J_{-\nu}$.

---

[1]) Если взять временной множитель $e^{-i\omega t}$, то расходящимся волнам соответствует $H_0^{(1)}(kr)\,e^{-i\omega t}$, а сходящимся — $H_0^{(2)}(kr)\,e^{-i\omega t}$.

Так как всякое решение уравнения Бесселя при нецелом ν можно представить в виде линейной комбинации функций $J_\nu(x)$ и $J_{-\nu}(x)$, то

$$H_\nu^{(1)}(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x), \tag{9}$$

где C_1 и C_2 — постоянные, подлежащие определению. Для главных членов асимптотических разложений, очевидно, имеет место аналогичное равенство

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i\left(x-\frac{\pi}{2}\nu-\frac{\pi}{4}\right)} = C_1 \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + C_2 \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right). \tag{10}$$

Преобразуем аргумент второго слагаемого к виду $\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)$:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left[\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + \pi\nu\right] = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)\cos \pi\nu - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right)\sin \pi\nu.$$

Сокращая обе части равенства (10) на $\sqrt{2/\pi x}$ и пользуясь формулой Эйлера для левой части, получаем

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) = (C_1 + C_2\cos \pi\nu)\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right) - C_2 \sin \pi\nu \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\nu - \frac{\pi}{4}\right),$$

откуда

$$C_1 + C_2 \cos \pi\nu = 1, \qquad -C_2 \sin \pi\nu = i$$

или

$$\left.\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{i \sin \pi\nu}; \\ C_1 &= -\frac{\cos \pi\nu - i \sin \pi\nu}{i \sin \pi\nu} = -C_2 e^{-i\pi\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Подставляя (11) в (9), находим:

$$H_\nu^{(1)}(x) = -\frac{1}{i \sin \pi\nu}\left[J_\nu(x)\, e^{-i\pi\nu} - J_{-\nu}(x)\right]. \tag{12}$$

Аналогично

$$H_\nu^{(2)}(x) = \frac{1}{i \sin \pi\nu}\left[J_\nu(x)\, e^{i\pi\nu} - J_{-\nu}(x)\right]. \tag{13}$$

Пользуясь формулой (4′), определяющей $N_\nu(x)$, получаем из (12) и (13):

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos \pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin \pi\nu}. \tag{14}$$

Формулы (12), (13) и (14) получены нами для нецелых значений ν. Для целого значения $\nu = n$ функции Ханкеля и Неймана могут быть определены из (12), (13) и (14) с помощью предельного перехода при $\nu \to n$. Переходя в этих формулах к пределу при $\nu \to n$ и раскрывая неопределенность по известному правилу, будем иметь:

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + i\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)_{\nu=n} - (-1)^n\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)_{\nu=n}\right], \tag{12'}$$

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - i\frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)_{\nu=n} - (-1)^n\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)_{\nu=n}\right], \tag{13'}$$

$$N_n(x) = \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}\right)_{\nu=n} - (-1)^n\left(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}\right)_{\nu=n}\right]. \tag{14'}$$

Пользуясь представлением функций J_ν и $J_{-\nu}$ в виде степенных рядов, можно получить аналогичные представления для $N_\nu(x)$, а также $H_\nu^{(1)}(x)$ и $H_\nu^{(2)}(x)$.

Формулы (12) и (13) можно рассматривать как аналитическое определение функций Ханкеля. Существуют, однако, и другие способы введения функций Ханкеля. В § 6 будет дано представление функций Ханкеля в виде контурных интегралов.

Если $\nu = n + 1/2$, то функции Ханкеля и Неймана выражаются в конечном виде через элементарные функции. В частности, при $\nu = 1/2$ имеем:

$$N_{1/2}(x) = -J_{-1/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right),$$

$$H_{1/2}^{(1)}(x) = J_{1/2}(x) + iN_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{i\left(x - \frac{\pi}{2}\right)},$$

$$H_{1/2}^{(2)}(x) = J_{1/2}(x) - iN_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - i\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}e^{-i\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}.$$

3. Функции мнимого аргумента. Цилиндрические функции можно рассматривать не только при действительных, но и при комплексных значениях аргумента. В настоящем пункте мы рассмотрим цилиндрические функции первого рода от чисто мнимого аргумента.

Подставляя в ряд, определяющий $J_\nu(x)$, значение ix вместо x, получаем:

$$J_\nu(ix) = i^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k i^{2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} = i^\nu I_\nu(x), \tag{15}$$

где

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \tag{16}$$

— вещественная функция, связанная с $J_\nu(ix)$ соотношением

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) \quad \text{или} \quad I_\nu(x) = e^{-\frac{1}{2}\pi\nu i} J_\nu(ix).$$

В частности, при $\nu = 0$

$$I_0(x) = J_0(ix) = 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \ldots \tag{17}$$

Из ряда (16) видно, что $I_\nu(x)$ являются монотонно возрастающими функциями, имеющими при $x = 0$ нуль ν-го порядка. Пользуясь асимптотической формулой (5), получим, что для $I_\nu(x)$ должна иметь место асимптотическая формула

$$I_\nu(x) \approx \sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\, e^x \tag{18}$$

при больших значениях аргумента x.

Аналогично вводится $I_{-\nu}(x)$. Функции I_ν и $I_{-\nu}$ при нецелом ν линейно независимы, так как в точке $x = 0$ $I_\nu(x)$ $(\nu > 0)$, имеет нуль ν-го порядка, а $I_{-\nu}(x)$ — полюс $x^{-\nu}$. Если $\nu = n$ — целое число, то $I_{-n}(x) = I_n(x)$.

Цилиндрические функции мнимого аргумента являются решениями уравнения

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \tag{19}$$

и, в частности, функция $I_0(x)$ удовлетворяет уравнению

$$y'' + \frac{1}{x} y' - y = 0. \tag{20}$$

Наряду с функцией $I_\nu(x)$ рассматривают функцию Макдональда $K_\nu(x)$, определяемую с помощью функции Ханкеля чисто мнимого аргумента

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \pi i e^{\frac{1}{2}\pi\nu i} H_\nu^{(1)}(ix). \tag{21}$$

$K_\nu(x)$ является вещественной функцией x. В самом деле, формулы (12) и (13) дают

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2\sin\pi\nu}\,[I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)] \quad \text{при} \quad \nu \neq n,$$

$$K_n(x) = \frac{(-1)^n}{2}\left[\left(\frac{\partial I_{-\nu}}{\partial \nu}\right)_{\nu=n} - \left(\frac{\partial I_\nu}{\partial \nu}\right)_{\nu=n}\right]. \tag{22}$$

Пользуясь асимптотическим выражением для $H_\nu^{(1)}$, находим:

$$K_\nu(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}+\ldots \tag{23}$$

Формулы (23) и (18) показывают, что $K_\nu(x)$ экспоненциально убывают, а $I_\nu(x)$ экспоненциально возрастают при $x\to\infty$. Отсюда следует линейная независимость этих функций, а также возможность представлений любого решения уравнения (19) в виде линейной комбинации

$$y=AI_\nu(x)+BK_\nu(x).$$

В частности, если y ограничено на бесконечности, то $A=0$ и $y=BK_\nu(x)$; если же y ограничено при $x=0$, то $B=0$ и $y==AI_\nu(x)$.

Из линейной независимости I_ν и K_ν следует, что $K_\nu(x)$ имеет при $x=0$ полюс ν-го порядка ($K_\nu\sim x^{-\nu}$) при $\nu\neq 0$ и логарифмическую особенность при $\nu=0$. В п. 4 показано, что

$$K_0(x)=\ln\frac{1}{x}+\ \ldots \quad \text{при} \quad x\to 0.$$

На рис. 107 даны графики $I_0(x)$ и $K_0(x)$. В отличие от $J_\nu(x)$ и $N_\nu(x)$ функции $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ являются монотонными ($I_\nu(x)$ возрастает, а $K_\nu(x)$ убывает с ростом x).

Наиболее важное значение имеет функция

$$K_0(x)=\frac{\pi i}{2}H_0^{(1)}(ix).$$

4. Функция $K_0(x)$. Покажем, что для функции $K_0(x)$ справедливо следующее интегральное представление:

$$K_0(x)=\int_0^\infty e^{-x\operatorname{ch}\xi}\,d\xi \qquad (x>0). \tag{24}$$

Нетрудно убедиться в том, что интеграл

$$F(x)=\int_0^\infty e^{-x\operatorname{ch}\xi}\,d\xi \tag{24'}$$

удовлетворяет уравнению

$$\mathscr{L}(y)=y''+\frac{1}{x}y'-y=0. \tag{25}$$

В самом деле,

$$\mathscr{L}(F)=\int_0^\infty e^{-x\operatorname{ch}\xi}\left(\operatorname{ch}^2\xi-\frac{1}{x}\operatorname{ch}\xi-1\right)d\xi=$$

$$=\int_0^\infty e^{-x\operatorname{ch}\xi}\operatorname{sh}^2\xi\,d\xi-\frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-x\operatorname{ch}\xi}\operatorname{ch}\xi\,d\xi=S_1-S_2.$$

Интегрируя второе слагаемое по частям, получим:

$$S_2 = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-x\operatorname{ch}\xi}\operatorname{ch}\xi\, d\xi = \frac{\operatorname{sh}\xi}{x}e^{-x\operatorname{ch}\xi}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x\operatorname{ch}\xi}\operatorname{sh}^2\xi\, d\xi = S_1,$$

откуда и следует:

$$\mathscr{L}(F) = 0.$$

Полагая $\operatorname{ch}\xi = \eta$, преобразуем интеграл (24′) для $F(x)$ к виду

$$F(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-x\eta}}{\sqrt{\eta^2-1}}\, d\eta.$$

Пользуясь этой формулой, можно выяснить характер поведения функции $F(x)$ при $x\to\infty$. Производя еще раз замену переменной

$$x(\eta - 1) = \xi,$$

получаем:

$$F(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\int_0^\infty \frac{e^{-\xi}}{\sqrt{\xi\left(\frac{\xi}{x}+2\right)}}\, d\xi = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}F_1(x).$$

При $x\to\infty$

$$\lim F_1(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-\xi}}{\sqrt{2\xi}}\, d\xi = \frac{2}{\sqrt{2}}\int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\quad (t = \sqrt{\xi}).$$

Следовательно, при больших значениях x

$$F_1(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}(1+\varepsilon),$$

где $\varepsilon\to 0$ при $x\to\infty$. Отсюда получаем асимптотическую формулу

$$F(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x} + \ldots, \tag{26}$$

где точками отмечены члены более высокого порядка малости. Введенная с помощью интеграла (24′) функция $F(x)$ является решением уравнения (25), ограниченным на бесконечности, поэтому

$$F(x) = BK_0(x).$$

Сравнение асимптотических формул для $K_0(x)$ и $F_0(x)$ показывает, что $B = 1$ и, следовательно,

$$K_0(x) = \int_0^\infty e^{-x\operatorname{ch}\xi}\, d\xi \quad (x > 0). \tag{24}$$

Выясним характер функции $K_0(x)$ при $x\to 0$.

Представим интеграл

$$K_0(x) = F(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-x\eta}}{\sqrt{\eta^2 - 1}}\, d\eta$$

в виде

$$K_0(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}}\, d\lambda \qquad (x\eta = \lambda).$$

Разбивая этот интеграл на три части

$$K_0(x) = \int_x^A \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} + \int_x^A \frac{(e^{-\lambda} - 1)\, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}} + \int_A^\infty \frac{e^{-\lambda}\, d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - x^2}},$$

где A — некоторая вспомогательная постоянная, видим, что первое слагаемое равно

$$\ln \frac{A + \sqrt{A^2 - x^2}}{x} = -\ln x + \ldots,$$

а второе и третье слагаемые ограничены при $x \to 0$. Отсюда следует, что

$$K_0(x) = -\ln x + \ldots = \ln \frac{1}{x} + \ldots, \tag{27}$$

где точки означают слагаемые, остающиеся конечными при $x = 0$. Таким образом, функция $K_0(x)$ является решением уравнения (25), имеющим логарифмическую особенность в точке $x = 0$ и экспоненциально убывающим при $x \to \infty$.

Следующая задача дает физическую интерпретацию функции $K_0(x)$. Пусть в начале координат действует стационарный источник неустойчивого газа мощности Q_0. Стационарный процесс диффузии сопровождается распадом газа и описывается уравнением

$$\Delta u - \varkappa^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \varkappa^2 u = 0 \tag{28}$$

$$\left(\varkappa^2 = \frac{\beta}{D^2}\right),$$

где β — коэффициент распада, D — коэффициент диффузии. Функция источника этого уравнения обладает круговой симметрией и, следовательно, удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(x \frac{du}{dx}\right) - u = 0 \qquad (x = \varkappa r);$$

кроме того, функция источника имеет логарифмическую особенность в начале координат и ограничена на бесконечности. Отсюда следует, что функция источника пропорциональна $K_0(\varkappa r)$:

$$\overline{G} = AK_0(\varkappa r), \tag{29}$$

Для определения множителя A воспользуемся условием источника

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{K_\varepsilon}\left(-D\frac{\partial u}{\partial r}\right)ds = Q_0, \tag{30}$$

где интеграл слева выражает диффузионный поток через окружность K_ε радиуса ε с центром в источнике. Подставляя в это условие вместо u функцию $\overline{G} = AK_0(\varkappa r)$ и учитывая логарифмическую особенность функции $K_0(x)$ при $x = 0$, получаем:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{-\int_{K_\varepsilon} D\frac{\partial \overline{G}}{\partial r}\,dS\right\} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{D\,2\pi\varepsilon A\,\frac{1}{\varepsilon}\right\} = 2\pi AD = Q_0.$$

Отсюда

$$A = \frac{Q_0}{2\pi D}$$

и

$$\overline{G} = \frac{Q_0}{2\pi D}\,K_0(\varkappa r). \tag{31}$$

Интегральную формулу (24) для $K_0(x)$ можно получить, исходя из простых физических соображений.

Рассмотрим нестационарную задачу диффузии газа с распадом. Пусть в начале координат находится источник постоянной мощности Q_0, действующий начиная с момента $t = 0$. Будем предполагать, что в начальный момент $t = 0$ концентрация газа всюду равна нулю. Концентрация $u(x, y, t)$ должна удовлетворять уравнению

$$D\,\Delta u - \beta u = u_t \tag{32}$$

и соответствующим дополнительным условиям. Уравнение (32) при помощи подстановки

$$u = \tilde{u}e^{-\beta t}$$

преобразуется в обычное уравнение диффузии

$$D\,\Delta\tilde{u} = \tilde{u}_t,$$

для которого функция влияния точечного источника имеет вид

$$\tilde{G} = \frac{1}{\left(2\sqrt{\pi D(t-\tau)}\right)^2}\,e^{-\frac{r^2}{4D(t-\tau)}} \qquad (D = a^2).$$

Таким образом, функция влияния мгновенного точечного источника для уравнения (32) равна

$$G = \frac{Q}{\left(2\sqrt{\pi D(t-\tau)}\right)^2}\,e^{-\frac{r^2}{4D(t-\tau)}-\beta(t-\tau)}.$$

Функция влияния источника мощности Q_0, непрерывно действующего от $t = 0$ до момента t, дается формулой

$$G = Q_0\int_0^t \frac{1}{4\pi D(t-\tau)}\,e^{-\frac{r^2}{4D(t-\tau)}-\beta(t-\tau)}\,d\tau.$$

Вводя новую переменную

$$\theta = t - \tau,$$

получаем:

$$G = \frac{Q_0}{4\pi D} \int_0^t e^{-\frac{r^2}{4D\theta} - \beta\theta} \frac{d\theta}{\theta}.$$

Функция источника, соответствующая стационарной задаче, может быть найдена предельным переходом при $t \to \infty$ в предыдущей формуле

$$\overline{G} = \lim_{t \to \infty} G = \frac{Q_0}{4\pi D} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4D}\frac{1}{\theta} - \beta\theta} \frac{d\theta}{\theta}.$$

Преобразуем этот интеграл при помощи подстановки

$$\theta = Ce^{\xi},$$

где C — некоторая постоянная,

$$\overline{G} = \frac{Q_0}{4\pi D} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[\frac{r^2}{4DC} e^{-\xi} + \beta C e^{\xi}\right]} d\xi.$$

Требуя, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{r^2}{4DC} = \beta C,$$

находим:

$$C = \frac{r}{2\sqrt{\beta D}} \quad \text{и} \quad \frac{r^2}{4DC} = \beta C = \frac{r}{2}\sqrt{\frac{\beta}{D}} = \frac{\varkappa r}{2} \quad \left(\varkappa^2 = \frac{\beta}{D}\right).$$

Отсюда следует, что стационарная функция источника имеет вид

$$\overline{G} = \frac{Q_0}{4\pi D} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varkappa r \operatorname{ch} \xi} d\xi = \frac{Q_0}{2\pi D} \int_0^{\infty} e^{-\varkappa r \operatorname{ch} \xi} d\xi = \frac{Q_0}{2\pi D} K_0(\varkappa r).$$

Таким образом, рассмотренная здесь задача приводит к интегральному представлению (24) для функции $K_0(x)$.

§ 4. Представление цилиндрических функций в виде контурных интегралов

1. Контурные интегралы. Рассмотрим уравнение колебаний $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) = a^2\Delta_2 u$ и будем искать его решение в виде $u(x, y, t) = v(x, y)e^{i\omega t}$; для $v(x, y)$ получим уравнение $\Delta_2 v + k^2 v = 0$ $(k = \omega/a)$. Его частными решениями являются функции $v = e^{\pm ikx}$ и $v = e^{\pm iky}$ — амплитуды плоских волн $u = e^{i(\omega t \pm kx)}$ и $u = e^{i(\omega t \pm ky)}$, распространяющихся вдоль оси x и соответственно вдоль оси y. Плоская волна, распространяющаяся