

Вводя новую переменную

$$\theta = t - \tau,$$

получаем:

$$G = \frac{Q_0}{4\pi D} \int_0^t e^{-\frac{r^2}{4D\theta} - \beta\theta} \frac{d\theta}{\theta}.$$

Функция источника, соответствующая стационарной задаче, может быть найдена предельным переходом при $t \rightarrow \infty$ в предыдущей формуле

$$\bar{G} = \lim_{t \rightarrow \infty} G = \frac{Q_0}{4\pi D} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{4D} \frac{1}{\theta} - \beta\theta} \frac{d\theta}{\theta}.$$

Преобразуем этот интеграл при помощи подстановки

$$\theta = Ce^{\xi},$$

где C — некоторая постоянная,

$$\bar{G} = \frac{Q_0}{4\pi D} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left[\frac{r^2}{4DC} e^{-\xi} + \beta C e^{\xi}\right]} d\xi.$$

Требую, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{r^2}{4DC} = \beta C,$$

находим:

$$C = \frac{r}{2\sqrt{\beta D}} \quad \text{и} \quad \frac{r^2}{4DC} = \beta C = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{\beta}{D}} = \frac{\kappa r}{2} \quad \left(\kappa^2 = \frac{\beta}{D}\right).$$

Отсюда следует, что стационарная функция источника имеет вид

$$\bar{G} = \frac{Q_0}{4\pi D} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\kappa r \operatorname{ch} \xi} d\xi = \frac{Q_0}{2\pi D} \int_0^{\infty} e^{-\kappa r \operatorname{ch} \xi} d\xi = \frac{Q_0^2}{2\pi D} K_0(\kappa r).$$

Таким образом, рассмотренная здесь задача приводит к интегральному представлению (24) для функции $K_0(x)$.

§ 4. Представление цилиндрических функций в виде контурных интегралов

1. Контурные интегралы. Рассмотрим уравнение колебаний $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) = a^2\Delta_2 u$ и будем искать его решение в виде $u(x, y, t) = v(x, y)e^{i\omega t}$; для $v(x, y)$ получим уравнение $\Delta_2 v + k^2 v = 0$ ($k = \omega/a$). Его частными решениями являются функции $v = e^{\pm ikx}$ и $v = e^{\pm iky}$ — амплитуды плоских волн $u = e^{i(\omega t \pm kx)}$ и $u = e^{i(\omega t \pm ky)}$, распространяющихся вдоль оси x и соответственно вдоль оси y . Плоская волна, распространяющаяся

в направлении l , очевидно, имеет вид

$$v = e^{-ik(tr)} = e^{-ik(x \cos \varphi + y \sin \varphi)} = e^{-ikr \cos(\varphi - \alpha)},$$

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha, \quad l = l(\cos \varphi, \sin \varphi).$$

Если $\alpha = \pi/2$, то на оси y амплитуда волны, падающей под углом φ к оси x , равна

$$v = e^{-ikr \sin \varphi}. \quad (1)$$

Будем искать решение $Z_\nu(x)$ уравнения Бесселя

$$L(y) = x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (2)$$

в виде суперпозиции плоских волн вида (1), считая при этом

$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$ комплексными и обозначая $kr = x$. Положим

$$\begin{aligned} Z_\nu(x) &= \\ &= \int_C K(x, \varphi) \Phi_\nu(\varphi) d\varphi = \\ &= \int_C e^{-ix \sin \varphi} \Phi_\nu(\varphi) d\varphi, \end{aligned} \quad (3)$$

где C — некоторый контур на плоскости $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$, $K(x, \varphi) = e^{-ix \sin \varphi}$, $\Phi_\nu(\varphi)$ — неопределенный пока фазовый множитель. Выберем C так, чтобы интеграл

(3) сходил, а $\Phi_\nu(\varphi)$ так, чтобы этот интеграл удовлетворял уравнению Бесселя. Найдем сначала $\Phi_\nu(\varphi)$, предполагая, что интеграл (3) сходится и его можно дифференцировать под знаком интеграла. Вычислим $L(K)$. Замечая, что $K_\varphi = -ix \cos \varphi K$, $K_{\varphi\varphi} = ix \sin \varphi K - x^2 \cos^2 \varphi K$, $K_x = -i \sin \varphi K$, $K_{xx} = -\sin^2 \varphi K$, получим $x^2 K_{xx} + x K_x + x^2 K = K(x^2 \cos^2 \varphi - ix \sin \varphi) = -K_{\varphi\varphi}$, $L(K) = -(\nu^2 K + K_{\varphi\varphi})$ и, следовательно,

$$L(Z_\nu) = - \int_C (K_{\varphi\varphi} + \nu^2 K) \Phi_\nu(\varphi) d\varphi.$$

Проинтегрируем по частям, считая, что подстановки обращаются в нуль (на бесконечности, если контур уходит в

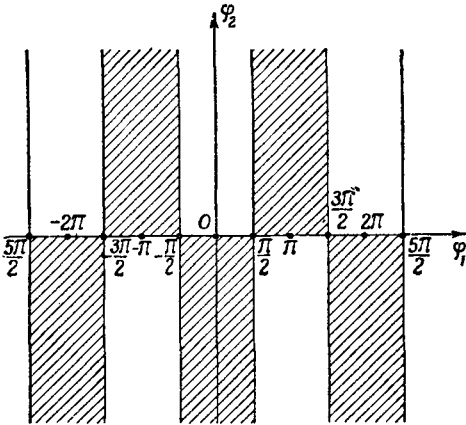


Рис. 95

бесконечность):

$$L(Z_\nu) = - \int_C \{ \Phi'_\nu + \nu^2 \Phi_\nu \} K d\varphi - \int_C \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \Phi_\nu \frac{\partial K}{\partial \varphi} - K \frac{\partial \Phi_\nu}{\partial \varphi} \right\} d\varphi =$$

$$= - \int_C \{ \Phi'_\nu + \nu^2 \Phi_\nu \} K d\varphi.$$

Для того чтобы $L(Z_\nu) = 0$, достаточно, чтобы

$$\Phi'_\nu + \nu^2 \Phi = 0.$$

Выберем $\Phi_\nu = e^{i\nu\varphi}$. Тогда $Z_\nu(x) = \int_C e^{-ix \sin \varphi + i\nu\varphi} d\varphi$. Для сходимости этого интеграла достаточно, чтобы

$\text{Re}(ix \sin \varphi) =$
 $= \text{Re}(ix \sin(\varphi_1 + i\varphi_2)) =$
 $= -x \cos \varphi_1 \text{sh} \varphi_2 > 0$
 $(\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2).$

$$\text{Re}(ix \sin \varphi) =$$

$$= \text{Re}(ix \sin(\varphi_1 + i\varphi_2)) =$$

$$= -x \cos \varphi_1 \text{sh} \varphi_2 > 0$$

$$(\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2).$$

Это условие выполнено при $x > 0$, если

$$\varphi_2 < 0,$$

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \varphi_1 < \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

либо $\varphi_2 > 0$,

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \varphi_1 < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4)$$

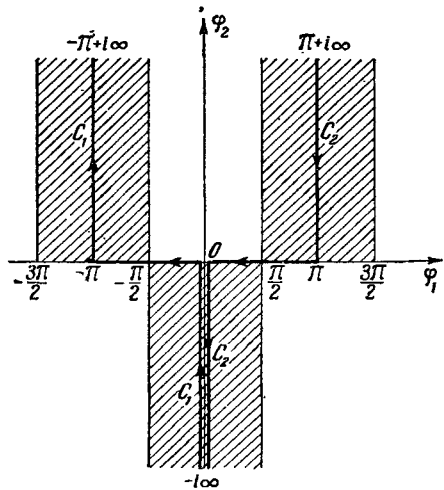


Рис. 96.

На рис. 95 области, по которым должен проходить контур, заштрихованы. В качестве контура C можно взять любой контур, асимптотические ветви которого лежат в заштрихованных областях.

2. Функции Ханкеля. Выберем два контура: C_1 — контур, состоящий из луча $(-i\infty, 0)$, отрезка $(0, -\pi)$ и луча $(-\pi, -\pi + i\infty)$, а контур $C_2 = (i\infty + \pi, \pi) + (\pi, 0) + (0, -i\infty)$ (рис. 96). Соответствующие интегралы (3) определяют цилиндрические функции

$$H_\nu^{(k)}(x) = - \frac{1}{\pi} \int_{C_k} e^{-ix \sin \varphi + i\nu\varphi} d\varphi, \quad k = 1, 2. \quad (5)$$

В п. 4 будет показано, что определенные при помощи контурных интегралов (5) функции $H_\nu^{(k)}(x)$ совпадают с функциями

Ханкеля, которые были введены в § 2. Для этого достаточно будет убедиться в том, что функции (5) имеют асимптотику

$$H_{\nu}^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\alpha_{\nu}} + \dots, \quad H_{\nu}^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i\alpha_{\nu}} + \dots,$$

$$\alpha_{\nu} = x - \frac{\pi}{2} \nu - \frac{\pi}{4}. \quad (6)$$

Пользуясь определением (5) функций Ханкеля $H_{\nu}^{(1,2)}(x)$, можно получить для них рекуррентные формулы

$$H_{\nu+1}^{(k)} + H_{\nu-1}^{(k)} = \frac{2\nu}{x} H_{\nu}^{(k)}, \quad H_{\nu+1}^{(k)} - H_{\nu-1}^{(k)} = -2H_{\nu}^{(k)'}(x), \quad k = 1, 2.$$

Выведем первую формулу. Замечая, что $\Phi_{\nu+1} + \Phi_{\nu-1} = 2 \cos \varphi \Phi_{\nu}$, $\Phi_{\nu} = e^{i\nu\varphi}$, и интегрируя по частям, находим:

$$H_{\nu+1}^{(k)}(x) + H_{\nu-1}^{(k)}(x) = -\frac{2}{\pi} \int_{C_k} e^{-ix \sin \varphi + i\nu\varphi} \cos \varphi d\varphi =$$

$$= -\frac{2\nu}{x\pi} \int_{C_k} e^{-ix \sin \varphi + i\nu\varphi} d\varphi = \frac{2\nu}{x} H_{\nu}^{(k)}(x).$$

Из (5) и формулы $J_{\nu}(x) = \frac{1}{2}(H_{\nu}^{(1)} + H_{\nu}^{(2)})$ можно получить представление в виде контурного интеграла для функции Бесселя $J_{\nu}(x)$, полагая

$$J_{\nu}(x) = \frac{1}{2}(H_{\nu}^{(1)}(x) + H_{\nu}^{(2)}(x)) = -\frac{1}{\pi} \int_{C_0} e^{-ix \sin \varphi + i\nu\varphi} d\varphi, \quad (7)$$

где $C_0 = C_1 + C_2$ — контур, состоящий из луча $(\pi + i\infty, 0)$, отрезка $(\pi, -\pi)$ и луча $(-\pi, -\pi + i\infty)$. Направление обхода указано на рис. 96.

Чтобы убедиться в том, что интеграл (7) в самом деле дает функцию, совпадающую с введенной в § 1 функцией Бесселя, надо показать, что он разлагается в степенной ряд (15) § 1. Для этого нам понадобятся некоторые свойства гамма-функции.

3. Некоторые свойства гамма-функции. Гамма-функция $\Gamma(s)$, как известно, есть интеграл

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx, \quad (8)$$

где s — вообще говоря, комплексный аргумент, причем $\operatorname{Re} s > 0$. Помимо элементарных свойств¹⁾

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \text{ и т. д.,}$$

¹⁾ Б. М. Будак, С. В. Фомин, Кратные интегралы и ряды, «Наука», 1965.

нам понадобится свойство

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}. \tag{9}$$

В самом деле,

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+t)} x^{s-1} t^{-s} dx dt.$$

Будем рассматривать этот интеграл как двойной интеграл и произведем замену переменных, полагая $\xi = x + t$, $\eta = x/t$.

Вычисляя $\xi_x \eta_t - \xi_t \eta_x = -(1 + \eta)/t$, получим $dx dt = -\frac{t}{1 + \eta} d\xi d\eta$ и

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\xi} \eta^{s-1} \frac{d\xi d\eta}{1 + \eta} = \int_0^\infty \frac{\eta^{s-1} d\eta}{1 + \eta}.$$

Интеграл, стоящий справа, вычисляется при помощи вычетов и равен $\pi/\sin \pi s$ ¹⁾.

Для гамма-функции имеет место представление в виде контурного интеграла (интеграла Римана — Ханкеля)

$$\Gamma(s) = (e^{i2\pi s} - 1)^{-1} \int_\gamma e^{-\varphi} \varphi^{s-1} d\varphi, \tag{10}$$

где γ — любой контур (на плоскости комплексного переменного $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$) указанного на рис. 97 вида; этот контур идет из $+\infty$, обходит вокруг точки $\varphi = 0$ и возвращается опять на $+\infty$. Подынтегральная функция $f(\varphi) = e^{-\varphi} \varphi^{s-1} = e^{-\varphi} e^{(s-1)\ln \varphi}$ комплексного переменного φ имеет точку ветвления $\varphi = 0$. Проведем разрез вдоль положительной части вещественной оси, полагая $\arg \varphi = 0$ на верхнем берегу разреза и $\arg \varphi = 2\pi$ на нижнем берегу разреза.

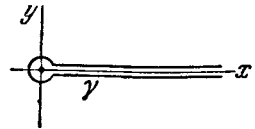


Рис. 97.

В силу теоремы Коши контур γ можно, без изменения величины интеграла $\int_\gamma f(\varphi) d\varphi$, произвольно деформировать, сохраняя об-

ход вокруг точки $\varphi = 0$ и удерживая концы контура на $+\infty$. Выберем в качестве γ контур, состоящий из луча $(+\infty, \epsilon)$ на верхнем берегу разреза, окружности C_ϵ с центром $\varphi = 0$ и радиусом ϵ и луча $(\epsilon, +\infty)$ вдоль нижнего берега. Тогда $f(\varphi) = e^{-\varphi + (s-1)\ln \varphi}$ на верхнем берегу и $f(\varphi) = e^{(s-1)2\pi i - \varphi + (s-1)\ln \varphi}$ на нижнем берегу, где $\ln \varphi$ принимает вещественные значения,

¹⁾ М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функции комплексного переменного, Физматгиз, 1958.

так что

$$\int_{\gamma} e^{-\varphi} \varphi^{s-1} d\varphi = \\ = \int_{\infty}^{\varepsilon} e^{-x} x^{s-1} dx + e^{(s-1)2\pi i} \int_{\varepsilon}^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx + \int_{C_{\varepsilon}} e^{-\varphi} \varphi^{s-1} d\varphi. \quad (11)$$

Покажем, что интеграл по C_{ε} стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$, если $\operatorname{Re} s > 0$. В самом деле, на C_{ε} $|e^{-\varphi}|$ ограничен,

$$|\varphi^{s-1}| = e^{(s_0-1) \ln |\varphi| - s_1 \arg \varphi} = \varepsilon^{s_0-1} e^{-s_1 \arg \varphi}, \quad s = s_0 + is_1$$

и

$$\left| \int_{C_{\varepsilon}} e^{-\varphi} \varphi^{s-1} d\varphi \right| \leq A 2\pi \varepsilon^{s_0} e^{-s_1 \arg \varphi} \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (s_0 > 0).$$

Поэтому предельный переход в (11) приводит к (10).

Формула (10) определяет справа от мнимой оси аналитическую функцию $\Gamma(s)$. В силу аналитического продолжения формула (10) справедлива на всей плоскости и $\Gamma(s)$ представляется в виде частного двух целых функций. При $s = -n$ ($n \geq 0$) $\Gamma(s)$ имеет полюса.

Справедлива формула

$$\frac{1}{\Gamma(s+1)} = \frac{e^{i\pi s}}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-\varphi} \varphi^{-s-1} d\varphi. \quad (12)$$

Она следует из (9) и (10). В самом деле,

$$\frac{1}{\Gamma(s+1)} = \frac{\sin \pi(s+1)}{\pi} \Gamma(-s) = -\frac{\sin \pi s}{\pi} \Gamma(-s) = \\ = \frac{e^{-i\pi s} - e^{i\pi s}}{2\pi i (e^{-2\pi i s} - 1)} \int_{\gamma} e^{-\varphi} \varphi^{-s-1} d\varphi = \frac{e^{i\pi s}}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-\varphi} \varphi^{-s-1} d\varphi.$$

4. Интегральное представление функции Бесселя. Покажем теперь, что функция

$$J_{\nu}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{C_0} e^{-ix \sin \varphi + i\nu \varphi} d\varphi \quad (13)$$

разлагается в ряд (15) § 1. Для этого преобразуем контур C_0 (см. стр. 658), полагая $\rho = \frac{x}{2} e^{-i(\varphi-\pi)}$ ($x > 0$). Из таблицы

| | | | | | | |
|-----------|-----------------|---------------|----------------------------------|------------------------|-------------------------|------------------|
| φ | $i\infty + \pi$ | π | $\frac{\pi}{2}$ | 0 | $-\pi$ | $-\pi + i\infty$ |
| ρ | ∞ | $\frac{x}{2}$ | $\frac{x}{2} e^{i\frac{\pi}{2}}$ | $\frac{x}{2} e^{i\pi}$ | $\frac{x}{2} e^{i2\pi}$ | ∞ |

видно, что C_0 преобразуется в контур γ , показанный на рис. 98, который состоит из луча $(+\infty, x/2)$, окружности C^* радиуса $0,5x$ и луча $(0,5x, +\infty)$. Вычисляя

$$-ix \sin \varphi = -\frac{ix}{2i} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = -\frac{x}{2} \left(\frac{x}{2\rho} e^{i\pi} - \frac{2\rho}{x} e^{-i\pi} \right) = \frac{x^2}{4\rho} - \rho,$$

преобразуем интеграл (13) к виду

$$J_\nu(x) = -\frac{i}{2\pi} \int_\gamma e^{-\rho + \frac{x^2}{4\rho}} \left(\frac{x}{2\rho} \right)^\nu e^{i\pi\nu} \frac{d\rho}{\rho} \quad \left(d\varphi = \frac{i d\rho}{\rho} \right). \quad (14)$$

Разложим $\exp(x^2/4\rho)$ в степенной ряд и подставим в (14):

$$J_\nu(x) = -\frac{i}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(0,5x)^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)} e^{i\pi\nu} \int_\gamma e^{-\rho} \rho^{-(k+\nu+1)} d\rho.$$

Пользуясь затем формулой (12) для $1/\Gamma(k+\nu+1)$, получим

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2k+\nu}.$$

Таким образом, функция (13) есть функция Бесселя $J_\nu(x)$, введенная в § 1, п. 1. Преобразуем интеграл (13), разбив его на три части: по оси φ_1 (от $-\pi$ до π) и по бесконечным ветвям. Для вычисления интеграла по ветвям $(\pm\pi + i\infty)$ введем новую переменную, полагая соответственно $\varphi = i\xi \pm \pi$. В результате получаем для функции Бесселя ν -го порядка следующее интегральное представление:

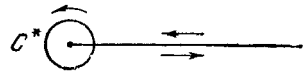


Рис. 98.

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix \sin \varphi + i\nu\varphi} d\varphi - \frac{\sin \pi\nu}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x \operatorname{sh} \xi - \nu\xi} d\xi. \quad (15)$$

Если $\nu = n$ целое число, то $\sin \pi\nu = 0$ и

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix \sin \varphi + in\varphi} d\varphi. \quad (16)$$

Отсюда, в частности, следует, что для плоской волны $e^{-ix \sin \varphi}$ имеет место разложение в ряд Фурье

$$e^{-ix \sin \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) e^{-in\varphi},$$

так как (16) есть формула для коэффициента Фурье этого разложения. Полагая $\varphi = \psi + \pi/2$ и учитывая, что, в силу периодичности подынтегральной функции в (16), интегрирование можно производить по любому промежутку длиной 2π , получим вторую интегральную формулу:

$$J_n(x) = \frac{i^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix \cos \psi + in\psi} d\psi, \quad (17)$$

которая соответствует следующему разложению плоской волны:

$$e^{-ix \cos \varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)^n J_n(x) e^{-in\varphi}.$$

В частности, при $n = 0$ имеем:

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix \cos \psi} d\psi. \quad (18)$$

5. Интегральное представление $K_\nu(x)$. Покажем, что для функции $K_\nu(x)$ мнимого аргумента, определяемой по формуле (см. § 3),

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \pi i e^{\frac{1}{2}\pi\nu i} H_\nu^{(1)}(ix), \quad (19)$$

справедливо интегральное представление

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x \operatorname{ch} \xi - \nu \xi} d\xi, \quad x > 0, \quad (20)$$

Отсюда видно, что $K_\nu(x)$ — вещественная монотонно убывающая положительная функция. При $\nu = 0$ формула (20) дает

$$K_0(x) = \int_0^{\infty} e^{-x \operatorname{ch} \xi} d\xi. \quad (21)$$

Для доказательства (20) обратимся к (19) и представлению (5) для функции $H_\nu^{(1)}$. Пусть $C_{1, \psi}$ — контур (рис. 99), у которого вертикальные части пути C_1 вместо $-\pi$ и 0 имеют абсциссы $-\pi - \psi$ и ψ ($\psi < 0$); в частности, $C_{1, 0} = C_1$. В силу теоремы Коши замена C_1 в (5) контуром $C_{1, \psi}$ не влияет на значение интеграла, если при больших $|\varphi_2|$ выполнено условие сходимости интеграла $\operatorname{Re}(-ix \sin \varphi) < 0$, где $x = x_1 + ix_2$, $\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2$. В силу (19) нас интересует функция Ханкеля $H_\nu^{(1)}(ix)$ чисто мнимого аргумента. Условие сходимости при $x_1 = 0$, $x = ix_2$, $\varphi = \psi$ имеет вид $x_2 \sin \varphi_1 \operatorname{ch} \varphi_2 < 0$ или $x_2 \sin \psi < 0$. Мы

выберем контур $C_{1, -\pi/2}$ при $\psi = -\pi/2$. Заменяем x_2 на x и введем новую переменную интегрирования ξ , положив $\varphi = -\frac{\pi}{2} + i\xi$;

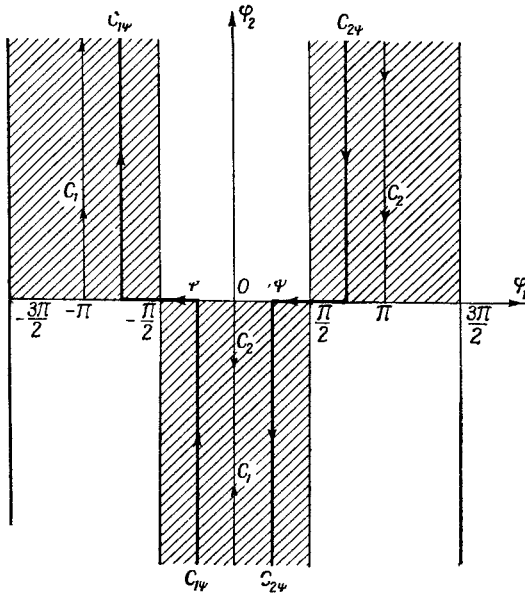


Рис. 99.

тогда $d\varphi = i d\xi$, $\sin \varphi = \cos i\xi = \operatorname{ch} \xi$ и интеграл (5) по $C_{1, \psi}$ примет вид

$$H_v^{(1)}(ix) = \frac{1}{\pi i} e^{-\frac{1}{2} \pi v i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x \operatorname{ch} \xi - v \xi} d\xi.$$

Отсюда и из (19) следует (20).

6. Асимптотические формулы для цилиндрических функций. Пользуясь методом перевала¹⁾, покажем, что для функций $H_v^{(1,2)}(x)$, определяемых при помощи контурных интегралов (5), справедливы при больших значениях вещественного аргумента $x > 0$ следующие асимптотические формулы:

$$\left. \begin{aligned} H_v^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left(x - \frac{\pi}{2} v - \frac{\pi}{4}\right)} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \quad x > 0, \\ H_v^{(2)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i\left(x - \frac{\pi}{2} v - \frac{\pi}{4}\right)} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

¹⁾ М. А. Лаврентьев, Б. В. Шаба т, Методы теории функции комплексного переменного, Физматгиз, 1958.

Отсюда, в силу п. 4 § 1, будет следовать, что функции (5) тождественно совпадают с функциями Ханкеля, введенными в § 3 при помощи формул (12), (13).

Из формул $H_\nu^{(1)} = J_\nu + iN_\nu$, $H_\nu^{(2)} = J_\nu - iN_\nu$ и (22) следуют асимптотические формулы для функций Бесселя $J_\nu(x)$ и функций Неймана $N_\nu(x)$:

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{2} \nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \tag{23}$$

$$N_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{2} \nu - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right). \tag{24}$$

Напомним, что в п. 4 мы доказали тождественность функций $J_\nu(x)$, введенных при помощи контурных интегралов, с функциями $J_\nu(x)$, введенными в § 1 при помощи рядов.

При выводе асимптотических формул (22) мы будем пользоваться контурными интегралами (5). Рассуждения достаточно провести для $H_\nu^{(1)}(x)$. Подынтегральная функция

$$e^{-ix \sin \varphi + i\nu\varphi}, \quad x > 0,$$

в формуле (5) не имеет особенностей в конечной части плоскости комплексного переменного φ .

Поэтому, в силу теоремы Коши, контур интегрирования в конечной плоскости можно произвольно деформировать при условии, что асимптоты ветвей контура, уходящих в бесконечность, лежат в тех же заштрихованных полосах плоскости φ , как и для контура C_1 . Если выбранный контур \overline{C}_1 целиком лежит в заштрихованной области (рис. 100), то во всех точках, где $\sin \varphi \neq 0$, подынтегральная функция экспоненциально стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$, так как $\text{Im} \sin \varphi < 0$. Если отдельные части контура проходят по незаштрихованной области, то на этих частях в подынтегральном выражении происходят сложные интерференционные явления.

Для выяснения асимптотического поведения функции $H_\nu^{(1)}(x)$ при больших значениях аргумента x целесообразно контур \overline{C}_1 выбрать так, чтобы он целиком лежал в заштрихованной области. Такой контур очевидно пройдет через точку $-\pi/2$, в которой действительная часть $\text{Re}(-i \sin \varphi) = \cos \varphi_1 \text{sh} \varphi_2$ обращается в нуль. При $x \rightarrow \infty$ подынтегральная функция в окрестности этой точки не стремится

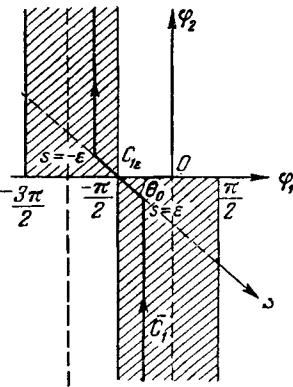


Рис. 100.

равномерно к нулю, поэтому главной частью интеграла по \bar{C}_1 при $x \rightarrow \infty$ является интеграл по малой дуге, содержащей точку $\varphi = -\pi/2$. С этой точки зрения \bar{C}_1 следует выбрать так, чтобы на нем множитель $e^{-ix \sin \varphi}$ убывал наиболее быстро при удалении от точки $\varphi = -\pi/2$. Рассмотрим «топографию» функции $e^{-ix \sin \varphi}$ в окрестности $\varphi = -\pi/2$. Положим $\varphi = -\frac{\pi}{2} + se^{i\theta}$. Для малых значений s найдем:

$$\begin{aligned} -i \sin \varphi &= i \cos(se^{i\theta}) = i \left(1 - \frac{s^2}{2} e^{2i\theta} + \dots \right) = \\ &= \frac{s^2}{2} \sin 2\theta + i \left(1 - \frac{s^2}{2} \cos 2\theta \right) + \dots \end{aligned}$$

Для действительной части $\operatorname{Re}(-i \sin \varphi) = \frac{1}{2} s^2 \sin 2\theta$ точка $s = 0$ является седловой точкой: в заштрихованных полосах эта функция отрицательна, в незаштрихованных областях — положительна, а при $s = 0$ ($\varphi = -\pi/2$) обращается в нуль. Направление $\theta = \theta_0 = -\pi/4$, очевидно, будет направлением наиболее быстрого спуска (убывания) для функции $\frac{s^2}{2} \sin 2\theta$. Отсюда следует, что и для модуля функции $e^{-ix \sin \varphi}$ точка $s = 0$ является седловой, а $\theta_0 = -\pi/4$ соответствует направлению быстрого спуска.

Выберем контур C_1 так, чтобы он содержал прямолинейный отрезок $\bar{C}_{1\varepsilon}$ ($-\varepsilon < s < \varepsilon$), проходящий через точку $s = 0$ ($\varphi = -\pi/2$) под углом $\theta_0 = -\pi/4$, а его ветви, уходящие в бесконечность, целиком лежали в заштрихованных областях (рис. 100).

Подынтегральная функция в (5) экспоненциально убывает при удалении от точки $s = 0$. Поэтому с точностью до экспоненциально убывающего слагаемого можно написать:

$$H_v^{(1)}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{\bar{C}_1} e^{-ix \sin \varphi + iv\varphi} d\varphi \approx \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{x \left(-\frac{s^2}{2} + i \right) - iv \frac{\pi}{2}} ds e^{-i \frac{\pi}{4}},$$

так как вдоль $\bar{C}_{1\varepsilon}$ $\varphi = -\frac{\pi}{2} + se^{-i\pi/4}$, $d\varphi = e^{-i \frac{\pi}{4}} ds$, $-i \sin \varphi \approx -\frac{s^2}{2} + i$, $e^{iv\varphi} \approx e^{-\frac{iv\pi}{2}}$, а s изменяется от ε до $-\varepsilon$. Введем обозначения $\xi = s\sqrt{x/2}$, $d\xi = \sqrt{x/2} ds$, $\alpha = \sqrt{x/2}$. Тогда

$$H_v^{(1)}(x) \approx \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2}{x}} e^{i \left(x - \frac{\pi}{2} - v - \frac{\pi}{4} \right)} \int_{-\varepsilon\alpha}^{\varepsilon\alpha} e^{-\xi^2} d\xi.$$

Если $x \rightarrow \infty$ ¹⁾, т. е. $\alpha \rightarrow \infty$, то $\int_{-\varepsilon\alpha}^{\varepsilon\alpha} e^{-\xi^2} d\xi \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}$.

Отсюда находим первый член асимптотической формулы (22). Следующие члены разложения можно получить, если взять члены более высокого порядка малости относительно s . Оценка $O\left(\frac{1}{x^{s/2}}\right)$ для остаточных членов в (22) следует из п. 4 § 1.

Отметим, что изложенный выше метод перевала или метод седловой точки применим для получения асимптотического разложения ряда других функций, представимых в виде контурных интегралов, а также для $H_v^{(1,2)}(x)$ при $v \approx x \rightarrow \infty$.

§ 5. Интеграл Фурье — Бесселя и некоторые интегралы, содержащие функции Бесселя

1. Интеграл Фурье—Бесселя. Найдем разложение заданной функции $f(r)$ в интеграл по функциям Бесселя. Интеграл Фурье для функции $f(x)$ и соответственно для функции двух переменных $f(x, y)$, как известно, имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\mu(x-\xi)} d\xi, \quad (1)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\mu d\mu' \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) e^{i\mu(x-\xi)+i\mu'(y-\eta)} d\xi d\eta. \quad (2)$$

Вводя полярные координаты с помощью соотношений

$$x = r \cos \varphi, \quad \xi = \rho \cos \psi, \quad \mu = \lambda \cos \xi,$$

$$y = r \sin \varphi; \quad \eta = \rho \sin \psi; \quad \mu' = \lambda \sin \xi,$$

получим:

$$d\xi d\eta = \rho d\rho d\psi, \quad d\mu d\mu' = \lambda d\lambda d\xi,$$

$$\mu x + \mu' y = \lambda r \cos(\xi - \varphi), \quad \mu \xi + \mu' \eta = \lambda \rho \cos(\psi - \xi).$$

Предполагая, что $f(x, y)$ имеет вид

$$f(x, y) = f(r) e^{in\varphi}, \quad (3)$$

где n — целое число, и преобразовывая с помощью написанных

¹⁾ Ошибка, допускаемая при замене конечных пределов бесконечными, имеет экспоненциальный характер убывания, так как

$$\int_z^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \approx e^{-z^2}/2z.$$