Если $x\to\infty$ [1]), т. е. $\alpha\to\infty$, то $\int\limits_{-\varepsilon\alpha}^{\varepsilon\alpha} e^{-\xi^2}d\xi\to\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2}d\xi=\sqrt{\pi}.$
Отсюда находим первый член асимптотической формулы (22). Следующие члены разложения можно получить, если взять члены более высокого порядка малости относительно s. Оценка $O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$ для остаточных членов в (22) следует из п. 4 § 1.

Отметим, что изложенный выше метод перевала или метод седловой точки применим для получения асимптотического разложения ряда других функций, представимых в виде контурных интегралов, а также для $H_\nu^{(1,2)}(x)$ при $\nu\approx x\to\infty$.

§ 5. Интеграл Фурье — Бесселя и некоторые интегралы, содержащие функции Бесселя

1. Интеграл Фурье—Бесселя. Найдем разложение заданной функции $f(r)$ в интеграл по функциям Бесселя. Интеграл Фурье для функции $f(x)$ и соответственно для функции двух переменных $f(x,y)$, как известно, имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\mu\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\,e^{i\mu(x-\xi)}\,d\xi, \tag{1}$$

$$f(x,\ y)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\mu\,d\mu'\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\xi,\ \eta)\,e^{i\mu(x-\xi)+i\mu'(y-\eta)}\,d\xi\,d\eta. \tag{2}$$

Вводя полярные координаты с помощью соотношений

$$x=r\cos\varphi,\quad \xi=\rho\cos\psi,\quad \mu=\lambda\cos\xi,$$
$$y=r\sin\varphi;\quad \eta=\rho\sin\psi;\quad \mu'=\lambda\sin\xi,$$

получим:

$$d\xi\,d\eta=\rho\,d\rho\,d\psi,\quad d\mu\,d\mu'=\lambda\,d\lambda\,d\xi,$$
$$\mu x+\mu' y=\lambda r\cos(\xi-\varphi),\quad \mu\xi+\mu'\eta=\lambda\rho\cos(\psi-\xi).$$

Предполагая, что $f(x,\ y)$ имеет вид

$$f(x,\ y)=f(r)\,e^{in\varphi}, \tag{3}$$

где n — целое число, и преобразовывая с помощью написанных

---

[1]) Ошибка, допускаемая при замене конечных пределов бесконечными, имеет экспоненциальный характер убывания, так как

$$\int\limits_{z}^{\infty}e^{-\xi^2}\,d\xi\approx e^{-z^2}/2z.$$

выше соотношений интеграл Фурье (2), находим:

$$f(r)\,e^{in\varphi}=\int_0^\infty\int_0^\infty f(\rho)\,\rho\,d\rho\lambda\,d\lambda\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda r\cos(\xi-\varphi)+in(\xi-\varphi)}\,d\xi\cdot e^{in\varphi}\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\lambda\rho\cos(\psi-\xi)+in(\psi-\xi)}\,d\psi. \qquad (4)$$

Воспользуемся формулами (см. (16), (17) § 4 п. 4)

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{iz\cos\xi+in\xi}e^{-i\frac{\pi n}{2}}\,d\xi, \quad \left(\xi=\varphi-\frac{\pi}{2}\right), \qquad (5)$$

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-iz\cos\xi'+in\xi'}e^{i\frac{\pi n}{2}}\,d\xi' \quad (\xi=\pi+\xi'). \qquad (6)$$

Так как подынтегральные выражения в (5) и (6) являются периодическими функциями ξ и ξ' и интегрировать поэтому можно по любому промежутку длиной 2π, то можно написать:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{iz\cos(\xi-\xi_0)+in(\xi-\xi_0)}\,d\xi=J_n(z)\,e^{i\frac{\pi n}{2}}, \qquad (7)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-iz\cos(\xi'-\xi'_0)+in(\xi'-\xi'_0)}\,d\xi'=J_n(z)\,e^{-i\frac{\pi n}{2}}, \qquad (8)$$

где ξ_0 и ξ'_0 — произвольные числа. Подставляя (7) и (8) в (4) и сокращая обе части на $e^{in\varphi}$, получаем **интеграл Фурье — Бесселя**:

$$f(r)=\int_0^\infty\int_0^\infty f(\rho)\,J_n(\lambda\rho)\,J_n(\lambda r)\,\lambda\,d\lambda\,\rho\,d\rho \qquad (9)$$

или

$$f(r)=\int_0^\infty\varphi(\lambda)\,J_n(\lambda r)\,\lambda\,d\lambda, \quad \text{где} \quad \varphi(\lambda)=\int_0^\infty f(\rho)\,J_n(\lambda\rho)\,\rho\,d\rho.$$

Для того чтобы разложение в интеграл Фурье — Бесселя было возможно, достаточно потребовать от функции $f(r)$, определенной в промежутке $(0, \infty)$, выполнения следующих условий:

1) $f(r)$ непрерывна в промежутке $(0, \infty)$;

2) $f(r)$ имеет конечное число максимумов и минимумов во всяком конечном промежутке;

3) существует интеграл

$$\int_0^\infty \rho\,|f(\rho)|\,d\rho.$$

На доказательстве этого мы не останавливаемся.

2. Некоторые интегралы, содержащие функции Бесселя. В различных приложениях часто встречаются определенные интегралы, содержащие бесселевы функции

К числу наиболее распространенных интегралов этого типа принадлежит интеграл

$$B_1 = \int_0^\infty e^{-z\lambda} J_0(\rho\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\rho^2+z^2}} \quad (z > 0). \tag{10}$$

Для доказательства этой формулы заменим J_0 ее интегральным выражением ((16) § 4) и затем изменим порядок интегрирования:

$$B_1 = \int_0^\infty e^{-z\lambda} J_0(\rho\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-z\lambda}\,d\lambda \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\rho\lambda\sin\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_0^\infty e^{-(z+i\rho\sin\varphi)\lambda}\,d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi}{z+i\rho\sin\varphi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{z\,d\varphi}{z^2+\rho^2\sin^2\varphi} - \frac{i}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\rho\sin\varphi\,d\varphi}{z^2+\rho^2\sin^2\varphi} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{z\,d\varphi}{z^2+\rho^2\sin^2\varphi},$$

так как

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{z^2+\rho^2\sin^2\varphi} = 0$$

в силу нечетности подынтегрального выражения.

Полагая сначала $\operatorname{tg}\varphi = \xi$, а затем $\sqrt{\frac{z^2+\rho^2}{z^2}}\,\xi = \eta$, получаем:

$$B_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{z\,d\varphi}{z^2+\rho^2\sin^2\varphi} = \frac{2z}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{z^2+\rho^2\sin^2\varphi} =$$

$$= \frac{2z}{\pi}\int_0^\infty\frac{d\xi}{z^2(1+\xi^2)+\rho^2\xi^2} = \frac{2}{\pi\sqrt{z^2+\rho^2}}\int_0^\infty\frac{d\eta}{1+\eta^2} = \frac{1}{\sqrt{z^2+\rho^2}};$$

тем самым формула (10) доказана. Пользуясь (10), сразу же находим:

$$\int_0^\infty J_1(\rho\lambda)\,e^{-z\lambda}\,d\lambda = \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+\rho^2}}\right). \tag{11}$$

Полагая в формулах (10) и (11) $z = ia$ и разделяя действительную и мнимые части, получаем ряд следствий:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty J_0(\rho\lambda)\cos a\lambda\,d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\rho^2-a^2}},\\
&\int_0^\infty J_0(\rho\lambda)\sin a\lambda\,d\lambda = 0,\\
&\int_0^\infty J_1(\rho\lambda)\cos a\lambda\,d\lambda = \frac{1}{\rho},\\
&\int_0^\infty J_1(\rho\lambda)\sin a\lambda\,d\lambda = \frac{a}{\rho\sqrt{\rho^2-a^2}}
\end{aligned}\right\}\quad \text{при}\quad \rho > a; \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty J_0(\rho\lambda)\cos a\lambda\,d\lambda = 0,\\
&\int_0^\infty J_0(\rho\lambda)\sin a\lambda\,d\lambda = \frac{1}{\sqrt{a^2-\rho^2}}
\end{aligned}\right\}\quad \text{при}\quad a > \rho; \tag{13}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty J_1(\rho\lambda)\cos a\lambda\,d\lambda = \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\right),\\
&\int_0^\infty J_1(\rho\lambda)\sin a\lambda\,d\lambda = 0
\end{aligned}\right\}\quad \text{при}\quad a > \rho. \tag{13'}$$

Докажем вторую интегральную формулу

$$B_2 = \int_0^\infty J_\nu(\lambda\rho)\,e^{-t\lambda^2}\lambda^{\nu+1}\,d\lambda = \frac{1}{2t}\left(\frac{\rho}{2t}\right)^\nu e^{-\frac{\rho^2}{4t}}. \tag{14}$$

Подставим в эту формулу вместо J_ν степенной ряд и произведем почленное интегрирование ($t>0$!):

$$B_2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}\left(\frac{\rho}{2}\right)^{2k+\nu}\int_0^\infty \lambda^{2k+2\nu+1}e^{-t\lambda^2}\,d\lambda.$$

Вычисляя вспомогательный интеграл

$$\int_0^\infty \lambda^{2k+2\nu+1}e^{-t\lambda^2}\,d\lambda=\frac{1}{2t^{k+\nu+1}}\int_0^\infty e^{-\xi}\xi^{k+\nu}\,d\xi=\frac{1}{2t^{k+\nu+1}}\Gamma(k+\nu+1),$$

получаем:

$$B_2=\frac{1}{2t}\left(\frac{\rho}{2t}\right)^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{\rho^2}{4t}\right)^k=\frac{1}{2t}\left(\frac{\rho}{2t}\right)^{\nu}e^{-\frac{\rho^2}{4t}},$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что вычисление B_1 можно провести аналогично, разлагая бесселеву функцию в ряд и производя затем почленное интегрирование.

Рассмотрим интеграл

$$C=\int_0^\infty J_0(\lambda\rho)\frac{e^{-\sqrt{\lambda^2-k^2}\,|z|}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\lambda\,d\lambda. \tag{15}$$

Нетрудно убедиться, что он является решением уравнения

$$\Delta v+k^2v=0\quad\left(\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right).$$

Функция

$$v_0=\frac{e^{ikr}}{r}\qquad\left(r=\sqrt{\rho^2+z^2}\right)$$

также удовлетворяет волновому уравнению ($r>0$)

$$\Delta v_0+k^2v_0=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rv_0)+k^2v_0=-k^2\frac{e^{ikr}}{r}+k^2v_0=0.$$

Разложим функцию $v_0(\rho)=e^{ik\rho}/\rho$ в интеграл Фурье — Бесселя:

$$\frac{e^{ik\rho}}{\rho}=\int_0^\infty F(\lambda)J_0(\rho\lambda)\lambda\,d\lambda, \tag{16}$$

где

$$F(\lambda)=\int_0^\infty e^{ik\rho}J_0(\lambda\rho)\,d\rho. \tag{17}$$

Для вычисления функции $F(\lambda)$ воспользуемся формулами (12)

$$F(\lambda)=\int\limits_0^\infty J_0(\lambda\rho)(\cos k\rho+i\sin k\rho)\,d\rho=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}, & \text{если}\quad \lambda>k,\\ \dfrac{i}{\sqrt{k^2-\lambda^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}, & \text{если}\quad k>\lambda.\end{cases}$$

Таким образом,

$$\frac{e^{ik\rho}}{\rho}=\int\limits_0^\infty J_0(\rho\lambda)\frac{\lambda\,d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k^2}},\tag{18}$$

т. е. функция

$$v_0=\frac{e^{ik\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

совпадает с интегралом $C(\rho,z)$ при $z=0$. Итак, обе функции

$$v_0(\rho,\ z)\quad\text{и}\quad C(\rho,\ z)$$

являются решениями волнового уравнения, совпадают при $z=0$ и имеют в точке $z=0$, $\rho=0$ одинаковую особенность.

Отсюда следует, что они тождественно равны друг другу, т. е.

$$\int\limits_0^\infty J_0(\lambda\rho)\frac{e^{-\sqrt{\lambda^2-k^2}\,|z|}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\lambda\,d\lambda=\frac{e^{ik\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}}.\tag{19}$$

Полученная формула широко применялась А. Зоммерфельдом в физических исследованиях и часто называется формулой Зоммерфельда.

ЧАСТЬ II

СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Сферические функции были введены в связи с изучением решений уравнения Лапласа и, в частности, с теорией потенциала. В § 1 мы рассматриваем полиномы Лежандра, которые используются затем для построения шаровых и сферических функций (§ 2). Сферические функции являются весьма мощным аппаратом для решения многих задач математической физики.