Для вычисления функции $F(\lambda)$ воспользуемся формулами (12)

$$F(\lambda)=\int_0^\infty J_0(\lambda\rho)(\cos k\rho+i\sin k\rho)\,d\rho=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}, & \text{если}\quad \lambda>k,\\[2mm] \dfrac{i}{\sqrt{k^2-\lambda^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}, & \text{если}\quad k>\lambda.\end{cases}$$

Таким образом,

$$\frac{e^{ik\rho}}{\rho}=\int_0^\infty J_0(\rho\lambda)\frac{\lambda\,d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k^2}},\tag{18}$$

т. е. функция

$$v_0=\frac{e^{ik\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}}$$

совпадает с интегралом $C(\rho,z)$ при $z=0$. Итак, обе функции

$$v_0(\rho,\,z)\quad\text{и}\quad C(\rho,\,z)$$

являются решениями волнового уравнения, совпадают при $z=0$ и имеют в точке $z=0$, $\rho=0$ одинаковую особенность.

Отсюда следует, что они тождественно равны друг другу, т. е.

$$\int_0^\infty J_0(\lambda\rho)\frac{e^{-\sqrt{\lambda^2-k^2}\,|z|}}{\sqrt{\lambda^2-k^2}}\lambda\,d\lambda=\frac{e^{ik\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}}.\tag{19}$$

Полученная формула широко применялась А. Зоммерфельдом в физических исследованиях и часто называется формулой Зоммерфельда.

ЧАСТЬ II

СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Сферические функции были введены в связи с изучением решений уравнения Лапласа и, в частности, с теорией потенциала. В § 1 мы рассматриваем полиномы Лежандра, которые используются затем для построения шаровых и сферических функций (§ 2). Сферические функции являются весьма мощным аппаратом для решения многих задач математической физики.

§ 1. Полиномы Лежандра

1. Производящая функция и полиномы Лежандра. Полиномы Лежандра тесно связаны с фундаментальным решением уравнения Лапласа $\frac{1}{R}$, где R — расстояние точки M от фиксированной точки M_0. Пусть r и r_0 — радиусы-векторы точек M и M_0, а θ — угол между ними (рис. 101). Очевидно, можно написать

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{\sqrt{r_0^2+r^2-2rr_0\cos\theta}}=\begin{cases}\dfrac{1}{r_0}\dfrac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}} & \text{для } r<r_0,\\[2mm] \dfrac{1}{r}\dfrac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}} & \text{для } r>r_0,\end{cases}\tag{1}$$

где $x=\cos\theta\,(-1\leqslant x\leqslant 1)$ и $\rho=\frac{r}{r_0}<1$ или $\rho=\frac{r_0}{r}<1$ (в обоих случаях ρ меньше единицы).

Функция

$$\Psi(\rho,\ x)=\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}}\qquad(0<\rho<1,\ -1\leqslant x\leqslant 1)\tag{2}$$

называется производящей функцией полиномов Лежандра.

Разложим функцию $\Psi(\rho,\ x)$ в ряд по степеням ρ:

$$\Psi(\rho,\ x)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\,\rho^n.\tag{3}$$

Коэффициенты $P_n(x)$ разложения (3) являются полиномами n-й степени и называются полиномами Лежандра.

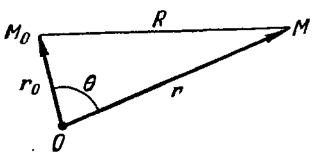

Рис. 101.

В силу теоремы Коши из формулы (3) следует, что

$$P_n(x)=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n\Psi}{\partial\rho^n}\bigg|_{\rho=0}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\Psi(\zeta,\ x)}{\zeta^{n+1}}\,d\zeta,\tag{4}$$

где C — любой замкнутый контур в плоскости комплексного переменного $\zeta=\xi+i\eta$, содержащий точку $\zeta=0$. Полагая $\sqrt{1-2x\zeta+\zeta^2}=1-\zeta z$, найдем $\zeta=2(z-x)/(z^2-1)$, $d\zeta=2(1-\zeta z)\,dz/(z^2-1)$, $\Psi(\zeta,\ x)\,d\zeta=2\,dz/(z^2-1)$.

Формула (4) примет вид

$$P_n(x)=\frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_{C_1}\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\,dz,\tag{5}$$

где C_1 — любой контур, окружающий точку $z=x$.

Учитывая, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{(z^2-1)^n}{z-x}\,dz=(x^2-1)^n$$

и пользуясь формулой для производной

$$\frac{d^n}{dx^n}\int\limits_{C_1}\frac{(z^2-1)^n}{z-x}\,dz=n!\int\limits_{C_1}\frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}}\,dz,$$

получаем из (5) формулу для $P_n(x)$:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]. \tag{6}$$

Из формулы (6) непосредственно видно, что: 1) $P_n(x)$ есть полином степени n; 2) $P_n(x)$ содержит только степени x той четности, что и номер n, так что

$$P_n(-x)=(-1)^n P_n(x). \tag{7}$$

Полагая $x=1$, находим:

$$\Psi(\rho,\ 1)=\frac{1}{1-\rho}=1+\rho+\ldots+\rho^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(1)\,\rho^n,$$

т. е. $P_n(1)=1$, и, в силу (7),

$$P_n(-1)=(-1)^n. \tag{7'}$$

Формула (6) называется дифференциальной формулой для полиномов Лежандра или формулой Родрига.

Заметим, что из (1) и (3) следует разложение потенциала

$$\frac{1}{R}=\begin{cases}\dfrac{1}{r_0}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta) & \text{при} \quad r<r_0,\\[2ex] \dfrac{1}{r}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\cos\theta) & \text{при} \quad r>r_0.\end{cases} \tag{8}$$

2. Рекуррентные формулы. Дифференцируя $\Psi(\rho,\ x)$ по ρ и x, получим два тождества:

$$(1-2\rho x+\rho^2)\,\Psi_\rho-(x-\rho)\,\Psi=0, \tag{9}$$

$$(1-2\rho x+\rho^2)\,\Psi_x-\rho\Psi=0. \tag{10}$$

Запишем левую часть формулы (9) в виде степенного ряда относительно ρ, подставив в нее ряд (3) для Ψ и ряд $\Psi_\rho=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)\,P_{n+1}(x)\,\rho^n$. Коэффициент при ρ^n полученного ряда, в силу (9), равен нулю при всех x:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - x(2n+1)P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0. \tag{11}$$

Это тождество есть рекуррентная формула, связывающая три последовательных полинома. Она позволяет найти последовательно все $P_n(x)$ $(n > 1)$, если учесть, что (6) дает

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x.$$

Так, например, полагая в (11) $n = 1$, найдем $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$.

Выведем еще две рекуррентные формулы:

$$nP_n(x) - xP'_n(x) + P'_{n-1}(x) = 0,$$

или

$$P'_{n-1}(x) = xP'_n(x) - nP_n(x), \tag{12}$$

$$P'_n(x) - xP'_{n-1}(x) - nP_{n-1}(x) = 0. \tag{13}$$

Исключив из (9) и (10) Ψ, получим тождество $\rho\Psi_\rho - (x-\rho)\Psi_x = 0$, из которого сразу следует (12), если в левую часть этого тождества подставить ряд (3) и приравнять нулю коэффициент при ρ^n. Дифференцируя затем (11) по x и исключая $P'_{n-1} = xP'_n - nP_n$, получим $P'_{n+1} - xP'_n - (n+1)P_n = 0$ или (13) после замены $n+1$ на n.

3. Уравнение Лежандра. Найдем дифференциальное уравнение, решением которого является $P_n(x)$. Для этого исключим P_{n-1} и P'_{n-1} из (12) и (13). Сначала подставим P'_{n-1} из (12) в (13):

$$P'_n - xP'_{n-1} - nP_{n-1} = (1-x^2)P'_n + nxP_n - nP_{n-1} = 0,$$

затем продифференцируем полученное тождество по x и еще раз применим формулу (12) для P'_{n-1}:

$$[(1-x^2)P'_n]' + nxP'_n + nP_n - nP'_{n-1} =$$
$$= [(1-x^2)P'_n] + nxP'_n + nP_n - (nxP'_n - n^2P_n) = 0.$$

В результате приходим к уравнению

$$[(1-x^2)P'_n]' + n(n+1)P_n = 0. \tag{14}$$

Тем самым доказано, что полиномы Лежандра $P_n(x)$ являются собственными функциями, соответствующими собственным значениям $\lambda_n = n(n+1)$, следующей задачи:

найти такие значения λ, для которых на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ существуют нетривиальные решения уравнения Лежандра

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + \lambda y = 0, \qquad -1 < x < 1, \tag{15}$$

ограниченные при $x=\pm 1$ и удовлетворяющие условию нормировки $y(1)=1$.

4. Ортогональность полиномов Лежандра. Уравнение Лежандра (15) является частным случаем (при $q=0$, $\rho=1$, $k(x)=1-x^2$) рассмотренного во Введении уравнения

$$(k(x)y')'-q(x)y+\lambda\rho(x)y=0. \tag{16}$$

Поэтому к нему применима общая теория для уравнения (16). Из этой теории следует:

1) полиномы Лежандра разных порядков ортогональны между собой:

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx=0 \quad \text{при} \quad m\neq n;$$

2) второе линейно независимое решение уравнения Лежандра при $\lambda=n(n+1)$ обращается в бесконечность при $x=\pm 1$ как $\ln(1\mp x)$.

Система ортогональных полиномов, как известно, является замкнутой[1]). Поэтому уравнение Лежандра не имеет нетри-

---

[1]) Система ортогональных функций $\{\varphi_n\}$ называется з а м к н у т о й, если не существует непрерывной функции, не равной тождественно нулю и ортогональной ко всем функциям данной системы.

Система ортогональных функций $\{\varphi_n\}$ называется п о л н о й в промежутке (a, b), если любую непрерывную функцию можно аппроксимировать в среднем с любой степенью точности при помощи линейной комбинации функций $\{\varphi_n\}$. Иными словами, какого бы ни было $\varepsilon>0$, всегда можно указать такую линейную комбинацию функций

$$S_n=c_1\varphi_1+\ldots+c_n\varphi_n,$$

что

$$\int_a^b [f(x)-S_n(x)]^2\,dx<\varepsilon.$$

Для полной системы функций $\{\varphi_n\}$ имеет место соотношение

$$\int_a^b f^2(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty} N_n f_n^2,$$

где f_n — коэффициенты Фурье функции $f(x)$

$$\left(f_n=\frac{1}{N_n}\int_a^b f(\xi)\varphi_n(\xi)\,d\xi\right).$$

Замкнутость есть следствие полноты. Пусть дана некоторая полная система ортогональных функций $\{\varphi_n(x)\}$. Допустим, что существует непрерывная функция $f(x)\not\equiv 0$, ортогональная ко всем $\varphi_n(x)$. Тогда в силу полноты виальных ограниченных решений ни при каком $\lambda \neq n(n+1)$. В самом деле, если бы существовало решение $y(x)$ для $\lambda \neq \neq n(n+1)$, то оно было бы ортогонально во всем $P_n(x)$. Отсюда, в силу замкнутости системы ортогональных полиномов $\{P_n(x)\}$, следует, что $y(x) \equiv 0$. Тем самым доказано, что мы нашли все ограниченные нетривиальные решения уравнения Лежандра.

5. Норма полиномов Лежандра. Вычислим норму $\|P_n\|$ полиномов $P_n(x)$:

$$\|P_n\| = \left(\int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx\right)^{1/2}.$$

Применим рекуррентную формулу (11) дважды: сначала выразим из нее (предварительно заменив в (11) $n+1$ на n) P_n через P_{n-1} и P_{n-2}, а затем xP_n — через P_{n+1} и P_{n-1}. Учитывая ортогональность полиномов P_n, P_{n-1}, P_{n-2}, получим:

$$\|P_n\|^2 = \frac{1}{n}\int_{-1}^{1} P_n(x)\{(2n-1)\,xP_{n-1}(x) - (n-1)\,P_{n-2}\}\,dx =$$

$$= \frac{2n-1}{n}\int_{-1}^{1}(xP_n)\,P_{n-1}\,dx = \frac{2n-1}{2n+1}\|P_{n-1}\|^2.$$

Последовательное применение этой формулы дает $\|P_n\|^2 = \frac{1}{2n+1}\|P_0\|^2$. Подставив сюда $\|P_0\|^2 = \|1\|^2 = 2$, находим квадрат нормы

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1} \quad \text{и} \quad \|P_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}. \tag{17}$$

системы функций $\{\varphi_n\}$ должно иметь место равенство

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} N_n f_n^2 = 0,$$

так как $f_n = 0$ по предположению. Отсюда следует, что $f \equiv 0$, что противоречит сделанному допущению, т. е. система $\{\varphi_n(x)\}$ является замкнутой.

Полнота и, тем самым, замкнутость системы ортогональных полиномов $\{P_n(x)\}$ является следствием теоремы Вейерштрасса о возможности равномерной аппроксимации непрерывной функции при помощи полиномов: *какова бы ни была непрерывная функция $f(x)$, заданная в промежутке (a, b), и каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такой полином $Q_n(x)$, что*

$$|f(x) - Q_n(x)| < \varepsilon. \tag{A}$$

В самом деле, представляя полином $Q_n(x)$ в виде линейной комбинации ортогональных полиномов $\{P_n(x)\}$ и пользуясь неравенством (A), мы получим условие полноты системы ортогональных полиномов.

Таким образом,

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1}, & m = n. \end{cases} \tag{18}$$

6. Нули полиномов Лежандра. С помощью формулы Родрига (6) можно доказать теорему:

Полином Лежандра $P_n(x)$ имеет n нулей, расположенных на интервале $-1 < x < 1$, а его производная k-го порядка $k \leqslant n$, имеет $n-k$ нулей внутри интервала $(-1, 1)$ и не обращается в нуль на его концах.

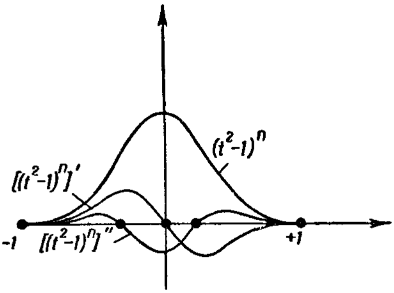

Рис. 102.

Действительно, функция $w = (x^2-1)^n$ обращается в нуль на концах интервала $(-1, 1)$. Ее производная $w'(x)$ обращается в нуль при $x = 1$ и $x = -1$ и по теореме о нуле производной имеет хотя бы один нуль внутри интервала $(-1, 1)$. Вторая производная $w''(x)$ имеет, по крайней мере, два нуля внутри интервала и не обращается в нуль на его концах (рис. 102). Продолжая рассуждения, приходим к заключению, что n-я производная $w^{(n)}(x)$ имеет, по крайней мере, n нулей на интервале $(-1, 1)$ или, точнее, ровно n нулей, так как она есть полином n-й степени. Первая часть утверждения доказана. Производная $P'_n(x)$ по той же теореме должна иметь, по крайней мере, $n-1$ нуль внутри $(-1, 1)$, но она есть полином $(n-1)$-й степени и потому имеет ровно $n-1$ нуль внутри интервала. Далее заключаем, что $\dfrac{d^k}{dx^k} P_n(x)$ имеет $n-k$ нулей внутри интервала $(-1, 1)$.

7. Ограниченность полиномов Лежандра. Покажем, что полиномы Лежандра $P_n(x)$ равномерно ограничены для всех значений аргумента $-1 \leqslant x \leqslant 1$:

$$|P_n(x)| \leqslant 1.$$

Для этого нам понадобится интегральное представление

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[x + i\sqrt{1-x^2}\sin\varphi\right]^n d\varphi. \tag{19}$$

Выведем формулу (19). Возьмем в (5) в качестве контура C_1 окружность радиуса $R = \sqrt{1-x^2}$ $(|x| < 1)$ с центром в точке

$z=x$. Тогда $z=x+\sqrt{1-x^2}e^{i\varphi}$, $dz=i\sqrt{1-x^2}e^{i\varphi}\,d\varphi$, $(z-x)^{n+1}=$ $=(1-x^2)^{\frac{n+1}{2}}e^{i(n+1)\varphi}$, $z^2-1=x^2-1+(1-x^2)e^{2i\varphi}+2x\sqrt{1-x^2}e^{i\varphi}=$ $=\sqrt{1-x^2}e^{i\varphi}\left[2x+\sqrt{1-x^2}\,(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})\right]=2\sqrt{1-x^2}e^{i\varphi}\left[x+i\times\right.$ $\left.\times\sqrt{1-x^2}\sin\varphi\right]$. Подставляя эти выражения в (5), получим (19). Если $-1\leqslant x\leqslant 1$, то $\left|x+i\sqrt{1-x^2}\sin\varphi\right|\leqslant 1$ и из (19) сразу следует ограниченность $P_n(x)$.

§ 2. Присоединенные функции Лежандра

1. Присоединенные функции. Рассмотрим следующую задачу:

найти собственные значения и собственные функции уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0,\quad -1<x<1,\qquad (1)$$

при условии ограниченности

$$|y(\pm 1)|<\infty.\qquad (2)$$

Уравнение (1) является частным случаем уравнения (8), рассмотренного во Введении, при $k(x)=1-x^2$, $q(x)=$ $=m^2/(1-x^2)$, $\rho=1$, $a=-1$, $b=1$. Так как коэффициент $k(x)=1-x^2$ обращается в нуль на обоих концах отрезка $-1\leqslant x\leqslant 1$, то естественное условие ограниченности ставится при $x=-1$ и $x=1$. В силу леммы 2 Введения решение $y(x)$ задачи (1) должно при $x=\pm 1$ иметь нули порядка ν, где $\nu=m/2$. Отсюда следует, что решение задачи (1) естественно искать в виде

$$y(x)=(1-x^2)^{m/2}v(x),\qquad v(\pm 1)\neq 0.\qquad (3)$$

Подставляя (3) в уравнение (1), найдем:

$$(1-x^2)v''-2(m+1)v'+[\lambda-m(m+1)]v=0.\qquad (4)$$

Это же уравнение получается для производной $\frac{d^mz}{dx^m}$ решения уравнения Лежандра (15) § 1, если его продифференцировать m раз. Нетривиальное ограниченное решение $z=P_n(x)$ уравнения Лежандра существует лишь при $\lambda=n(n+1)$, где n — целое положительное число. Отсюда следует, что

$$v(x)=\frac{d^mP_n}{dx^m},\quad \lambda=n(n+1)\qquad (5)$$