$z=x$. Тогда $z=x+\sqrt{1-x^2}e^{i\varphi}$, $dz=i\sqrt{1-x^2}e^{i\varphi}\,d\varphi$, $(z-x)^{n+1}=$
$=(1-x^2)^{\frac{n+1}{2}}e^{i(n+1)\varphi}$, $z^2-1=x^2-1+(1-x^2)e^{2i\varphi}+2x\sqrt{1-x^2}e^{i\varphi}=$
$=\sqrt{1-x^2}e^{i\varphi}\left[2x+\sqrt{1-x^2}\,(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi})\right]=2\sqrt{1-x^2}e^{i\varphi}\left[x+i\times\right.$
$\left.\times\sqrt{1-x^2}\sin\varphi\right]$. Подставляя эти выражения в (5), получим (19). Если $-1\leqslant x\leqslant 1$, то $\left|x+i\sqrt{1-x^2}\sin\varphi\right|\leqslant 1$ и из (19) сразу следует ограниченность $P_n(x)$.

§ 2. Присоединенные функции Лежандра

1. Присоединенные функции. Рассмотрим следующую задачу:

найти собственные значения и собственные функции уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\left(\lambda-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0, \quad -1<x<1, \tag{1}$$

при условии ограниченности

$$|y(\pm 1)|<\infty. \tag{2}$$

Уравнение (1) является частным случаем уравнения (8), рассмотренного во Введении, при $k(x)=1-x^2$, $q(x)=$ $=m^2/(1-x^2)$, $\rho=1$, $a=-1$, $b=1$. Так как коэффициент $k(x)=1-x^2$ обращается в нуль на обоих концах отрезка $-1\leqslant x\leqslant 1$, то естественное условие ограниченности ставится при $x=-1$ и $x=1$. В силу леммы 2 Введения решение $y(x)$ задачи (1) должно при $x=\pm 1$ иметь нули порядка ν, где $\nu=m/2$. Отсюда следует, что решение задачи (1) естественно искать в виде

$$y(x)=(1-x^2)^{m/2}v(x), \qquad v(\pm 1)\neq 0. \tag{3}$$

Подставляя (3) в уравнение (1), найдем:

$$(1-x^2)v''-2(m+1)v'+[\lambda-m(m+1)]v=0. \tag{4}$$

Это же уравнение получается для производной $\frac{d^mz}{dx^m}$ решения уравнения Лежандра (15) § 1, если его продифференцировать m раз. Нетривиальное ограниченное решение $z=P_n(x)$ уравнения Лежандра существует лишь при $\lambda=n(n+1)$, где n — целое положительное число. Отсюда следует, что

$$v(x)=\frac{d^mP_n}{dx^m}, \quad \lambda=n(n+1) \tag{5}$$

есть решение уравнения (2), а функция

$$P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m P_n}{dx^m} \tag{6}$$

есть собственная функция задачи (1), соответствующая собственному значению

$$\lambda_n = n(n+1), \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

$P_n^{(m)}(x)$ называется присоединенной функцией Лежандра m-го порядка. Очевидно, что $P_n^{(0)}(x) = P_n(x)$, $P_n^{(m)}(x) \not\equiv 0$ лишь при $m \leqslant n$.

2. **Норма присоединенных функций.** Согласно общей теореме на стр. 630 присоединенные функции $P_n^{(m)}$ образуют ортогональную систему. Вычислим норму $\|P_n^{(m)}\|$ присоединенных функций. Попутно будет доказана их ортогональность. Умножим уравнение (4) на $(1-x^2)^m$ и учтем (5). После замены $m+1$ на m получим:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^m \frac{d^m P_n}{dx^m}\right] = -[\lambda - m(m-1)](1-x^2)^{m-1}\frac{d^{m-1}P_n}{dx^{m-1}}. \tag{8}$$

Введем обозначение

$$L_{n,k}^m = \int_{-1}^{1} P_n^{(m)}(x)\,P_k^{(m)}(x)\,dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2)^m \frac{d^m P_n}{dx^m}\frac{d^m P_k}{dx^m}\,dx.$$

Интегрирование по частям дает:

$$L_{n,k}^m = \left[\frac{d^{m-1}P_k}{dx^{m-1}}\frac{d^m P_n}{dx^m}(1-x^2)^m\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}\frac{d^{m-1}P_k}{dx^{m-1}}\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d^m P_n}{dx^m}\right]dx.$$

Подстановка обращается в нуль, а подынтегральный член, в силу (8) и (7), преобразуется к виду

$$L_{n,k}^m = [n(n+1) - m(m-1)]\,L_{n,k}^{m-1} = (n+m)(n-m+1)\,L_{n,k}^{m-1}.$$

Из этой рекуррентной формулы следует

$$L_{n,k}^m = (n+m)(n+m-1)\ldots(n+1)\,n\ldots(n-m+1)\,L_{n,k}^0 = \\ = \frac{(n+m)!}{n!}\,\frac{n!}{(n-m)!}\,L_{n,k}^0 = \frac{(n+m)!}{(n-m)!}\,L_{n,k}^{(0)}.$$

Выражение для $L_{n,k}^0$ дается формулой (18) § 1, так как $P_n^{(0)} = P_n$. В результате получаем:

$$\int_{-1}^{1} P_n^{(m)}(x)\,P_k^{(m)}(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1}\,\dfrac{(n+m)!}{(n-m)!} & \text{при} \quad k = n, \end{cases} \tag{9}$$

т. е. присоединенные функции ортогональны между собой и квадрат нормы присоединенной функции $P_n^{(m)}$ равен

$$\|P_n^{(m)}\|^2 = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \tag{10}$$

3. Замкнутость системы присоединенных функций. Докажем, что система присоединенных функций $\{P_n^{(m)}(x)\}$ полностью исчерпывает все ограниченные решения уравнения (1).

В самом деле, при $\lambda = n(n+1)$ решение, линейно независимое с $P_n^{(m)}(x)$, обращается в бесконечность при $x = \pm 1$. Ограниченное же решение при $\lambda \neq n(n+1)$ должно быть ортогонально ко всем $P_n^{(m)}(x)$.

Для того чтобы убедиться, что не существует ограниченных решений уравнения (1), отличных от $P_n^{(m)}(x)$, достаточно установить, что система присоединенных функций $\{P_n^{(m)}(x)\}$ замкнута, т. е. что не существует никакой непрерывной функции, не равной тождественно нулю, которая была бы ортогональна ко всем функциям системы.

Лемма. *Любая функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[-1, 1]$ и обращающаяся в нуль на его концах при $x = 1$ и $x = -1$, может быть равномерно аппроксимирована с любой степенью точности линейной комбинацией из присоединенных функций любого порядка m.*

Заметим, прежде всего, что производные полиномов Лежандра $\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)$ являются полиномами степени $n-m$. Поскольку любой полином по степеням x может быть представлен в виде линейной комбинации этих полиномов, то, в силу теоремы Вейерштрасса, любая функция $\bar{f}(x)$, непрерывная на отрезке $[-1, 1]$, может быть равномерно аппроксимирована с любой степенью точности при помощи линейной комбинации $\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)$:

$$\left|\bar{f}(x) - \sum_{n=m}^{n_0} c_n \frac{d^m}{dx^m}P_n(x)\right| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad n_0 > N(\varepsilon).$$

Умножая это неравенство на $(1-x^2)^{m/2}$, получаем, что

$$\left|f_1(x) - \sum_{n=m}^{n_0} c_n P_n^{(m)}(x)\right| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad n_0 > N(\varepsilon),$$

где

$$f_1(x) = \bar{f}(x)(1-x^2)^{m/2}, \tag{11}$$

т. е. любая функция $f(x)$, представленная в виде (11), где $\bar{f}(x)$ — функция, непрерывная на отрезке $[-1, 1]$, может быть равномерно аппроксимирована с любой степенью точности линейной комбинацией присоединенных функций.

Будем говорить, что функция $f_1(x)$ принадлежит классу H_1, если она непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и тождественно равна нулю в малых окрестностях точек $x=-1$ и $x=1$.

$$f_1(x)=0 \quad \text{при} \quad |1-\delta|\leqslant|x|\leqslant 1.$$

Так как для каждой функции $f_1(x)$ класса H_1 функция

$$\bar{f}(x)=\frac{f_1(x)}{(1-x^2)^{m/2}}$$

является непрерывной на $[-1, 1]$, то тем самым лемма доказана для функций класса H_1.

Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$, непрерывную на отрезке $[-1, 1]$, обращающуюся в нуль на концах. Очевидно, что эту функцию можно равномерно аппроксимировать при помощи функции $f_1(x)$ из класса H_1 с точностью до $\varepsilon/2$:

$$|f(x)-f_1(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Аппроксимируя $f_1(x)$ линейной комбинацией из присоединенных функций с точностью до $\varepsilon/2$,

$$\left|f_1(x)-\sum\nolimits_1(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum\nolimits_1(x)=\sum_{n=m}^{n_0} c_n P_n^{(m)}(x),$$

получаем неравенство

$$\left|f(x)-\sum\nolimits_1(x)\right|<\varepsilon,$$

которое и доказывает лемму.

С помощью этой леммы легко доказывается полнота системы присоединенных функций, а тем самым и ее замкнутость.

Напомним, что система функций $\{\varphi_n(x)\}$ называется полной на некотором отрезке $[a, b]$, если любую функцию $F(x)$, непрерывную на $[a, b]$, можно аппроксимировать в среднем с любой степенью точности при помощи линейной комбинации этих функций

$$\int_a^b\left[F(x)-\sum_{n=1}^{n_0} c_n\varphi_n(x)\right]^2 dx<\varepsilon, \quad \text{если} \quad n_0>N(\varepsilon).$$

Очевидно, что всякую функцию, непрерывную на отрезке $[-1, 1]$, можно аппроксимировать в среднем с любой степенью точности при помощи функции $f(x)$, непрерывной на $[-1, 1]$ и обращающейся в нуль при $x = \pm 1$:

$$\int_{-1}^{1} [F(x) - f(x)]^2 \, dx < \varepsilon'.$$

Беря линейную комбинацию присоединенных функций, равномерно аппроксимирующих функцию $f(x)$

$$\left| f(x) - \sum\nolimits_1 (x) \right| < \varepsilon'',$$

и пользуясь неравенством

$$(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2),$$

получим:

$$\int_{-1}^{1} \left[F(x) - \sum\nolimits_1\right]^2 dx \leqslant 2\int_{-1}^{1} [F(x) - f(x)]^2 \, dx + 2\int_{-1}^{1} \left[f(x) - \sum\nolimits_1\right]^2 dx < \varepsilon$$

$$(\text{если } 2\varepsilon' + 4(\varepsilon'')^2 \leqslant \varepsilon),$$

что доказывает полноту, а тем самым и замкнутость системы присоединенных функций.

§ 3. Гармонические полиномы и сферические функции

1. Гармонические полиномы. Гармоническим полиномом называется однородный полином, удовлетворяющий уравнению Лапласа

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0. \tag{1}$$

Нетрудно убедиться, что первые два однородных гармонических полинома имеют вид

$$u_1(x, y, z) = Ax + By + Cz,$$
$$u_2(x, y, z) = Ax^2 + By^2 - (A+B)z^2 + Cxy + Dxz + Eyz,$$

где A, B, C — произвольные коэффициенты.

Определим число линейно-независимых однородных гармонических полиномов степени n

$$u_n = \sum_{p+q+r=n} \alpha_{p,q,r} x^p y^q z^r. \tag{2}$$

Целая однородная функция степени n имеет $(n+1)(n+2)/2$ коэффициентов. Действительно, правую часть равенства (2) можно представить в виде

$$\alpha_{0,0,n} z^n + (\alpha_{1,0,n-1} x + a_{0,1,n-1} y) z^{n-1} \ldots +$$
$$+ (\alpha_{n-1,0,1} x^{n-1} + \alpha_{n-2,1,1} x^{n-2} y + \ldots + \alpha_{0,n-1,1} y^{n-1}) z +$$
$$+ (\alpha_{n,0,0} x^n + \alpha_{n-1,1,0} x^{n-1} y + \ldots + \alpha_{0,n,0} y^n) z^0.$$