обращающейся в нуль при $x = \pm 1$:

$$\int_{-1}^{1} [F(x) - f(x)]^2\, dx < \varepsilon'.$$

Беря линейную комбинацию присоединенных функций, равномерно аппроксимирующих функцию $f(x)$

$$\left| f(x) - \textstyle\sum_1 (x) \right| < \varepsilon'',$$

и пользуясь неравенством

$$(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2),$$

получим:

$$\int_{-1}^{1} \left[F(x) - \textstyle\sum_1\right]^2 dx \leqslant 2\int_{-1}^{1} [F(x) - f(x)]^2\, dx + 2\int_{-1}^{1} \left[f(x) - \textstyle\sum_1\right]^2 dx < \varepsilon$$

$$(\text{если } 2\varepsilon' + 4(\varepsilon'')^2 \leqslant \varepsilon),$$

что доказывает полноту, а тем самым и замкнутость системы присоединенных функций.

§ 3. Гармонические полиномы и сферические функции

1. Гармонические полиномы. Гармоническим полиномом называется однородный полином, удовлетворяющий уравнению Лапласа

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0. \tag{1}$$

Нетрудно убедиться, что первые два однородных гармонических полинома имеют вид

$$u_1(x, y, z) = Ax + By + Cz,$$
$$u_2(x, y, z) = Ax^2 + By^2 - (A+B)z^2 + Cxy + Dxz + Eyz,$$

где A, B, C — произвольные коэффициенты.

Определим число линейно-независимых однородных гармонических полиномов степени n

$$u_n = \sum_{p+q+r=n} a_{p,q,r} x^p y^q z^r. \tag{2}$$

Целая однородная функция степени n имеет $(n+1)(n+2)/2$ коэффициентов. Действительно, правую часть равенства (2) можно представить в виде

$$a_{0,0,n} z^n + (a_{1,0,n-1} x + a_{0,1,n-1} y) z^{n-1} \ldots +$$
$$+ (a_{n-1,0,1} x^{n-1} + a_{n-2,1,1} x^{n-2} y + \ldots + a_{0,n-1,1} y^{n-1}) z +$$
$$+ (a_{n,0,0} x^n + a_{n-1,1,0} x^{n-1} y + \ldots + a_{0,n,0} y^n) z^0.$$

При z^n имеется один коэффициент, при z^{n-1} — два, ..., при z имеем n коэффициентов, а при z^0 число коэффициентов равняется $(n+1)$, так что общее число коэффициентов равно

$$1+2+\ldots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}. \qquad (3)$$

Уравнение (1) налагает на коэффициенты $n(n-1)/2$ линейных однородных соотношений, так как Δu_n — однородная функция степени $n-2$. Таким образом, полином должен иметь не менее чем $\frac{(n+1)(n+2)}{2}-\frac{(n-1)n}{2}=2n+1$ независимых коэффициентов. Если бы указанные $(n-1)n/2$ соотношения оказались линейно-зависимыми, то число независимых коэффициентов было бы больше $2n+1$.

Покажем, что только $2n+1$ коэффициентов линейно независимы. Коэффициенты $\alpha_{p,q,r}$ однородного полинома можно представить в виде

$$\alpha_{p,q,r}=\frac{1}{p!\,q!\,r!}\frac{\partial^n u_n}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r}.$$

Если u_n — гармонический полином, то $\alpha_{p,q,r}$ при $r\geqslant 2$ можно выразить через коэффициенты $\alpha_{p,q,0}$ и $\alpha_{p,q,1}$, число которых в точности равно $2n+1$.

Действительно,

$$\alpha_{p,q,r}=\frac{1}{p!\,q!\,r!}\frac{\partial^{n-2}}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^{r-2}}\left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2}\right]=$$
$$=\frac{1}{p!\,q!\,r!}\frac{\partial^{n-2}}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^{r-2}}\left[-\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}\right]=$$
$$=\beta_1\alpha_{p+2,q,r-2}+\beta_2\alpha_{p,q+2,r-2}.$$

Поступая аналогично с коэффициентами $\alpha_{p+2,q,r-2}$ и $\alpha_{p,q+2,r-2}$, мы в конце концов выразим $\alpha_{p,q,r}$ через коэффициенты типа $\alpha_{p,q,0}$ $(p+q=n)$ и $\alpha_{p,q,1}$ $(p+q+1=n)$. Число коэффициентов вида $\alpha_{p,q,0}$ равно $(n+1)$, а $\alpha_{p,q,r}$ равно n. Таким образом, общее число линейно-независимых коэффициентов, а следовательно, и независимых гармонических полиномов n-й степени в точности равно $2n+1$.

Однородные гармонические полиномы называются *шаровыми функциями*.

2. Сферические функции. Сферические функции проще всего могут быть введены при решении уравнения Лапласа для шаровой области методом разделения переменных.

Будем искать решение уравнения Лапласа в переменных (r,θ,φ)

$$\Delta u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0, \qquad (1)$$

полагая

$$u(r, \theta, \varphi) = R(r)\,Y(\theta, \varphi).$$

Для определения $R(r)$ получаем уравнение Эйлера

$$r^2R'' + 2rR' - \lambda R = 0, \tag{4}$$

а для определения $Y(\theta, \varphi)$ — уравнение

$$\Delta_{\theta,\varphi}Y + \lambda Y = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} + \lambda Y = 0 \tag{5}$$

с дополнительным условием ограниченности функции Y на всей сфере.

В частности, функция $Y(\theta, \varphi)$ удовлетворяет условиям

$$\left.\begin{aligned} &Y(\theta, \varphi + 2\pi) = Y(\theta, \varphi), \\ &|Y(0, \varphi)| < \infty, \quad |Y(\pi, \varphi)| < \infty. \end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

Ограниченные решения уравнения (5), обладающие непрерывными до 2-го порядка производными, называются **сферическими функциями**.

Решение задачи для $Y(\theta, \varphi)$ ищем также методом разделения переменных, полагая

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\,\Phi(\varphi).$$

Функция $\Phi(\varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$\Phi'' + \mu\Phi = 0$$

и условию периодичности

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi).$$

Задача для $\Phi(\varphi)$ имеет решение лишь при целом $\mu = m^2$ и линейно-независимыми решениями являются функции $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$. Функция $\Theta(\theta)$ определяется из уравнения

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \left(\lambda - \frac{\mu}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0$$

и условий ограниченности при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$.

Вводя переменную

$$t = \cos\theta$$

и обозначая $X(t)\,|_{t=\cos\theta} = X(\cos\theta) = \Theta(\theta)$, получим для $X(t)$ уравнение присоединенных функций

$$\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\frac{dX}{dt}\right] + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-t^2}\right)X = 0 \quad (-1 < t < 1). \tag{6}$$

Уравнение (6), как мы уже видели в § 2, допускает ограниченные решения лишь при $\lambda = n(n+1)$

$$X(t)\big|_{t=\cos\theta} = P_n^{(m)}(t)\big|_{t=\cos\theta} = P_n^{(m)}(\cos\theta) = \Theta(\theta),$$

где $m \leqslant n$.

Выпишем полученную систему сферических функций n-го порядка. Условимся приписывать отрицательный верхний индекс тем функциям, которые содержат $\cos k\varphi$, и положительный — тем функциям, которые содержат $\sin k\varphi$. Тогда будем иметь:

$$\left.\begin{array}{ll} m=0 & Y_n^{(0)}(\theta,\varphi) = P_n(\cos\theta), \\ m=1 & Y_n^{(-1)}(\theta,\varphi) = P_n^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi,\quad Y_n^{(1)}(\theta,\varphi) = P_n^{(1)}(\cos\theta)\sin\varphi, \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m=k & Y_n^{(-k)}(\theta,\varphi) = P_n^{(k)}(\cos\theta)\cos k\varphi,\quad Y_n^{(k)}(\theta,\varphi) = P_n^{(k)}(\cos\theta)\sin k\varphi \\ & (k=1,2,\dots,n). \end{array}\right\} \quad (7)$$

Число различных сферических функций n-го порядка $Y_n^{(m)}$ равно $2n+1$. Линейная комбинация этих $2n+1$ сферических функций (7)

$$Y_n(\theta,\varphi) = \sum_{m=0}^{n} (A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi)\, P_n^{(m)}(\cos\theta) \qquad (7^*)$$

или

$$Y_n(\theta,\varphi) = \sum_{m=-n}^{n} C_{mn} Y_n^{(m)}(\theta,\varphi),$$

где

$$C_{mn} = \begin{cases} A_{nm} & \text{при } m \leqslant 0, \\ B_{nm} & \text{при } m > 0 \end{cases}$$

является также сферической функцией и называется сферической гармоникой.

Функции $Y_n^{(0)} = P_n(\cos\theta)$ не зависят от φ и называются *зональными*. Так как $P_n(t)$ в силу леммы § 1, п. 6 имеет ровно n нулей внутри промежутка $(-1, +1)$, то сфера разделяется на $(n+1)$ широтных зон, внутри которых зональная функция сохраняет знак.

Рассмотрим поведение функции

$$Y_n^{(\pm k)} = \sin^k\theta \left[\frac{d^k}{dt^k} P_n(t)\right]_{t=\cos\theta} \begin{cases} \sin k\varphi, \\ \cos k\varphi \end{cases}$$

на сфере. Так как $\sin\theta$ обращается в нуль на полюсах, $\sin k\varphi$ или $\cos k\varphi$ обращаются в нуль на $2k$ меридианах, а $\frac{d^k}{dt^k} P_n(t)$

в силу той же леммы — на $(n-k)$ широтах, то вся сфера разбивается на клетки, в которых $Y_n^{(\pm k)}$ сохраняет постоянный знак (рис. 103). Функции $Y_n^{(\pm k)}$ (при $k>0$) называются тессеральными.

Вернемся теперь к отысканию функции R. Будем искать функцию $R(r)$ в виде

$$R = r^{\sigma}.$$

Подставляя искомую форму решения в уравнение (4), получим характеристическое уравнение для определения σ:

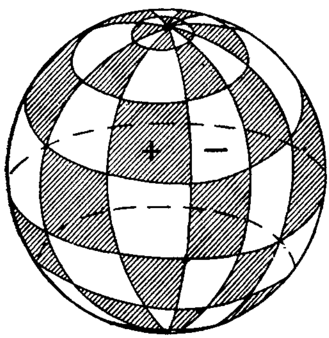

Рис. 103.

$$\sigma(\sigma+1)-n(n+1)=0,$$

откуда находим два значения σ:

$$\sigma = n \quad \text{и} \quad \sigma = -(n+1).$$

Следовательно, частными решениями уравнения Лапласа являются функции

$$r^n Y_n^{(k)}(\theta, \varphi), \tag{7'}$$

$$r^{-(n+1)} Y_n^{(k)}(\theta, \varphi), \tag{7''}$$

первая из которых, очевидно, соответствует решению внутренних задач, а вторая — внешних задач (см. § 4, п. 1).

Покажем, что найденные решения уравнения Лапласа являются однородными полиномами n-й степени. Общий член, например, в формуле (7′) можно записать так:

$$v = r^n \sin^k\theta \cos k\varphi \cos^{n-k-2q}\theta,$$

где q изменяется от 0 до $(n-k)/2$. Функцию v можно представить в виде произведения трех полиномов:

$$v = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3,$$

где

$$u_1 = r^k \sin^k\theta\cos k\varphi = \operatorname{Re}[r\sin\theta e^{i\varphi}]^k = \operatorname{Re}[(x+iy)^k],$$

$$u_2 = r^{n-k-2q}\cos^{n-k-2q}\theta = z^{n-k-2q},$$

$$u_3 = r^{2q} = (x^2+y^2+z^2)^q.$$

Отсюда ясно, что функция $r^n Y_n^{(k)}(\theta, \varphi)$ есть однородный гармонический полином степени $k+n-k-2q+2q=n$.

Очевидно, что сферические функции являются значениями шаровых функций (7′) и (7″) на сфере радиуса единица.

3. Ортогональность системы сферических функций. Докажем, что сферические функции, соответствующие различным значениям λ, ортогональны на поверхности сферы Σ. Пусть Y_1 и Y_2 удовлетворяют уравнениям

$$\Delta_{\theta,\varphi} Y_1 + \lambda_1 Y_1 = 0; \quad \Delta_{\theta,\varphi} Y_2 + \lambda_2 Y_2 = 0, \tag{5}$$

где

$$\Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Нетрудно видеть, что имеет место формула

$$\iint_\Sigma Y_2 \Delta_{\theta,\varphi} Y_1\, d\Omega = -\iint_\Sigma \left\{\frac{\partial Y_1}{\partial\theta}\frac{\partial Y_2}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial Y_1}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial Y_2}{\partial\varphi}\right\} d\Omega \tag{8}$$

$$(d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi),$$

легко получаемая интегрированием по частям.

На поверхности сферы

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial\theta}\boldsymbol{i}_\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\boldsymbol{i}_\varphi, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{A} = \frac{1}{\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right],$$

так что

$$\Delta_{\theta,\varphi} u = \operatorname{div}\operatorname{grad} u$$

и формулу (8) можно записать в виде

$$\iint_\Sigma Y_2 \Delta Y_1\, d\Omega = -\iint_\Sigma \operatorname{grad} Y_1 \cdot \operatorname{grad} Y_2 \cdot d\Omega.$$

Меняя местами в формуле (8) функции Y_1 и Y_2 и вычитая полученную формулу из формулы (8), будем иметь:

$$J = \iint_\Sigma \{Y_2 \Delta_{\theta,\varphi} Y_1 - Y_1 \Delta_{\theta,\varphi} Y_2\}\, d\Omega = 0. \tag{9}$$

Формулы (8) и (9) являются формулами Грина для оператора сферических функций.

Из формулы (9) легко следует ортогональность функций Y_1 и Y_2. В самом деле, пользуясь уравнениями (5), получим из формулы (9)

$$J = (\lambda_2 - \lambda_1)\iint_\Sigma Y_1 Y_2\, d\Omega = 0,$$

откуда при $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\iint_\Sigma Y_1 Y_2\, d\Omega = 0$$

или

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_1(\theta, \varphi) Y_2(\theta, \varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi = 0.$$

Тем самым доказана ортогональность сферических функций, соответствующих разным λ.

Выше мы получили для $\lambda = n(n+1)$ систему $2n+1$ сферических функций n-го порядка. Докажем, что и эти *сферические функции ортогональны между собой на сфере.*

Пусть $Y_n^{(k_1)}$ и $Y_n^{(k_2)}$ — две сферические функции. Интегрируя их произведение и пользуясь формулой (9) § 2, получим:

$$\iint_\Sigma Y_n^{(k_1)} Y_n^{(k_2)}\, d\Omega = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} Y_n^{(k_1)}(\theta, \varphi)\, Y_n^{(k_2)}(\theta, \varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos k_1\varphi \cos k_2\varphi\, d\varphi \int_0^{\pi} P_n^{(k_1)}(\cos\theta)\, P_n^{(k_2)}(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos k_1\varphi \cos k_2\varphi\, d\varphi \int_{-1}^{+1} P_n^{(k_1)}(t)\, P_n^{(k_2)}(t)\, dt =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k_1 \neq k_2, \\ \dfrac{2\pi}{2n+1}\,\dfrac{(n+k)!}{(n-k)!} & \text{при} \quad k_1 = k_2 = k \neq 0, \\ 2\pi \cdot \dfrac{2}{2n+1} & \text{при} \quad k_1 = k_2 = 0, \end{cases} \qquad (8')$$

т. е. сферические функции, *определяемые формулой* (7), образуют ортогональную систему в области $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ и имеют квадрат нормы, равный

$$\| Y_n^{(k)} \|^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} [Y_n^{(k)}(\theta, \varphi)]^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{2}{2n+1}\, \pi\varepsilon_k \frac{(n+k)!}{(n-k)!}, \qquad (8'')$$

где $\varepsilon_0 = 2$, $\varepsilon_k = 1$ при $k > 0$.

Предполагая возможность разложения произвольной функции $f(\theta, \varphi)$ в ряд по сферическим функциям (возможность такого разложения для дважды непрерывно дифференцируемой функции будет подробно обоснована ниже, п. 5), допускающий почленное интегрирование, получим

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi)\, P_n^{(m)}(\cos\theta),$$

где A_{nm} и B_{nm} — коэффициенты Фурье, определяемые формулами

$$\left.\begin{aligned} A_{nm} &= \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} f(\theta, \varphi)\, P_n^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{\|Y_n^{(m)}\|^2}, \\ B_{nm} &= \frac{\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} f(\theta, \varphi)\, P_n^{(m)}(\cos\theta)\sin m\varphi \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{\|Y_n^{(m)}\|^2}, \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

$$\|Y_n^{(m)}\|^2 = \frac{2\pi\varepsilon_m}{2n+1}\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \quad \varepsilon_m = \begin{cases} 2 & \text{при} \quad m = 0, \\ 1 & \text{при} \quad m > 0. \end{cases}$$

Общее решение уравнения Лапласа можно представить в виде

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n Y_n(\theta, \varphi)$$

для внутренней краевой задачи или

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta, \varphi)$$

для внешней краевой задачи, где

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \{\alpha_{nm}\cos m\varphi + \beta_{nm}\sin m\varphi\}\, P_n^{(m)}(\cos\theta)$$

— сферическая гармоника.

4. **Полнота системы сферических функций.** Докажем полноту системы сферических функций, определяемых формулой (7). Докажем сперва, что любая функция $f(\theta, \varphi)$, имеющая непрерывные вторые производные, может быть равномерно аппроксимирована некоторым полиномом из сферических функций.

Рассмотрим разложение такой функции в ряд Фурье

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} [A_m(\theta)\cos m\varphi + B_m(\theta)\sin m\varphi].$$

Используя ограниченность второй производной, легко оценить коэффициенты A_m и B_m этого разложения

$$|A_m| < \frac{M}{m^2}; \quad |B_m| < \frac{M}{m^2},$$

где

$$M = \max|f_{\varphi\varphi}|.$$

Отсюда следует, что для остаточного члена ряда Фурье имеет место равномерная оценка

$$\left| f - \sum_{m=0}^{m_0} [A_m(\theta)\cos m\varphi + B_m(\theta)\sin m\varphi] \right| = |R_{m_0}| < 2M \sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \varepsilon', \tag{10}$$

где $\varepsilon' > 0$ — любое наперед заданное число.

На основании п. 3 § 2 коэффициенты Фурье $A_m(\theta)$ и $B_m(\theta)$, являющиеся непрерывными функциями θ, обращающимися в нуль при θ, равном 0 и π, могут быть равномерно аппроксимированы линейными комбинациями присоединенных функций m-го порядка

$$\left| A_m(\theta) - \sum_{k=0}^{n} a_k P_k^{(m)}(\cos\theta) \right| < \frac{\varepsilon'}{2m_0+1},$$

$$\left| B_m(\theta) - \sum_{k=0}^{n} b_k P_k^{(m)}(\cos\theta) \right| < \frac{\varepsilon'}{2m_0+1}. \tag{11}$$

Тогда из неравенств (10) и (11) будет следовать:

$$\left| f(\theta, \varphi) - \sum_{n=0}^{m_0} \sum_{k=0}^{n} \left[a_k P_k^{(m)}(\cos\theta)\cos m\varphi + \right.\right.$$
$$\left.\left. + b_k P_k^{(m)}(\cos\theta)\sin m\varphi \right] \right| < 2\varepsilon', \tag{12}$$

что и доказывает возможность равномерной аппроксимации любой дважды дифференцируемой функции $f(\theta, \varphi)$ полиномом из сферических функций. Отсюда следует, что и любую непрерывную функцию можно равномерно аппроксимировать полиномом сферических функций, что и доказывает полноту системы функций, определяемых формулой (7). Из полноты этой системы следует ее замкнутость.

Таким образом, доказано, что уравнение сферических функций не имеет ограниченных решений при $\lambda \neq n(n+1)$ и что всякая сферическая функция n-го порядка (при $\lambda = n(n+1)$) представима формулой (7*).

5. Разложение по сферическим функциям. Сферические функции являются собственными функциями уравнения

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \lambda u = 0 \quad \text{или} \quad \Delta_{\theta,\varphi} u + \lambda u = 0 \tag{13}$$

на поверхности сферы Σ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$ при дополнительных условиях ограниченности.

Для обоснования разложимости произвольной дважды непрерывно дифференцируемой функции $f(\theta, \varphi)$ в ряд по сферическим функциям перейдем к соответствующему интегральному уравнению. С этой целью построим функцию источника уравнения

$$\Delta_{\theta, \varphi} u = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0, \tag{14}$$

удовлетворяющую условию ограниченности решения при $\theta = 0, \pi$.

Как было отмечено выше

$$\Delta_{\theta, \varphi} u = (\operatorname{div} \operatorname{grad} u)_{\theta, \varphi} \tag{15}$$

на поверхности сферы. Уравнение (14) можно рассматривать как уравнение стационарного распределения температуры или стационарного электрического тока на поверхности сферы.

С этой точки зрения понятно, что невозможно построить решение однородного уравнения

$$\Delta_{\theta, \varphi} u = 0 \tag{16}$$

с особенностью в одной только точке, так как для возможности существования стационарной температуры необходимо, чтобы сумма источников и стоков равнялась нулю.

Введем обобщенную функцию источника, которая в нашем случае должна быть решением уравнения

$$\Delta_{\theta, \varphi} u = q \quad (q = 1/4\pi), \tag{17}$$

регулярным всюду, кроме полюса $\theta = 0$, где она должна иметь логарифмическую особенность. Правая часть уравнения (17) означает плотность отрицательных источников (стоков) тепла, равномерно распределенных по поверхности сферы так, что

$$\iint_{\Sigma} q \, d\sigma = 1. \tag{18}$$

Предполагая, что искомая функция источника u является функцией только одного переменного θ, получаем для нее обыкновенное дифференциальное уравнение, решая которое найдем:

$$u = -q \ln \sin\theta + c \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}. \tag{19}$$

Требуя, чтобы u имело особенность только при $\theta = 0$, получаем:

$$c = -q$$

и

$$u = -2q \ln \sin \frac{\theta}{2} - q \ln 2.$$

Так как $u_1 = \mathrm{const}$ является решением однородного уравнения, то функция источника G определена с точностью до произвольной постоянной. Поэтому мы можем написать:

$$G = -\frac{1}{2\pi}\ln\sin\frac{\theta}{2}. \qquad (20)$$

Если источник находится в некоторой точке M_0, то функция источника имеет вид

$$G(M, M_0) = -\frac{1}{2\pi}\ln\sin\frac{\gamma_{MM_0}}{2}, \qquad (21)$$

где γ_{MM_0} — угловое расстояние между точками $M_0(\theta_0, \varphi_0)$ и $M(\theta, \varphi)$ [1]).

Перейдем теперь к решению неоднородного уравнения

$$\Delta_{\theta,\varphi}u = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = -F(\theta, \varphi). \qquad (22)$$

Это уравнение может иметь регулярное всюду на Σ решение только при выполнении условия

$$\iint_{\Sigma} F\,d\sigma = 0, \qquad (23)$$

выражающего, что сумма источников и стоков должна быть равна нулю. Его легко получить из формул Грина для оператора $\Delta_{\theta,\varphi}$, установленных в п. 3.

Покажем, что всякое решение уравнения (22), удовлетворяющее условию (23), представимо в виде

$$u(M) = \iint_{\Sigma} G(M, P)\,F(P)\,d\sigma_P + A,$$

где A — некоторая постоянная, а $G(M, P)$ — функция источника, определяемая формулой (21). Пусть M — некоторая фиксированная точка сферы, в которую мы помещаем северный полюс ($\theta = 0$), а M_1 — диаметрально противоположная ей точка. Точки M и M_1 являются особыми точками уравнения (22). Поэтому построим на Σ в этих точках малые кружки K_ε^M и $K_\varepsilon^{M_1}$ и рассмотрим интеграл

$$I = \iint_{\Sigma_1 = \Sigma - K_\varepsilon^M - K_\varepsilon^{M_1}} (u\,\Delta G - G\,\Delta u)\,d\sigma.$$

---

[1]) Угол γ определяется из формулы

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0).$$

Подставляя в правую часть выражения для Δu и ΔG, имеем:

$$I=\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}\left[u\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial G}{\partial\theta}\right)-G\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\right]d\theta\,d\varphi+$$
$$+\int_0^{\pi-\varepsilon}\frac{d\theta}{\sin\theta}\int_0^{2\pi}\left[u\frac{\partial^2 G}{\partial\varphi^2}-G\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]d\varphi.$$

Учитывая, что в квадратных скобках стоят точные производные от выражений

$$\sin\theta\left[u\frac{\partial G}{\partial\theta}-G\frac{\partial u}{\partial\theta}\right]\quad\text{и}\quad u\frac{\partial G}{\partial\varphi}-G\frac{\partial u}{\partial\varphi}=v,\quad\text{причем}\quad v\Big|_0^{2\pi}=0,$$

получаем после интегрирования

$$I=\int_0^{2\pi}\left[\sin\theta\left(u\frac{\partial G}{\partial\theta}-G\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\right]_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}d\varphi.$$

Далее, замечая, что

$$\frac{\partial G}{\partial\theta}=-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\sin\frac{\theta}{2}=-\frac{1}{4\pi}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2},$$

будем иметь:

$$I=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\cdot u\right]_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}d\varphi-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\left[\sin\theta\ln\sin\frac{\theta}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial\theta}\,d\varphi\right]_\varepsilon^{\pi-\varepsilon}=I_1+I_2.$$

Отсюда видно, что

$$\lim_{\varepsilon\to0}I_1=u(M)\quad\text{и}\quad\lim_{\varepsilon\to0}I_2=0.$$

Следовательно,

$$u(M)=\iint_\Sigma G(M,\,P)\,F(P)\,d\sigma_P+A,\tag{24}$$

где

$$A=\frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma u\,d\sigma\text{ — постоянная.}$$

Решение нашей задачи определено с точностью до аддитивной постоянной. То решение, для которого $\iint_\Sigma u\,d\sigma=0$, определяется формулой

$$u(M)=\iint\limits_{\Sigma} G(M, P)\,F(P)\,d\sigma_P.$$

Применяя (24) к уравнению сферических функций $\Delta_{\theta,\varphi}u = -\lambda u$, заключаем:

сферические функции, определяемые формулой (7), *представляют совокупность всех линейно-независимых собственных функций интегрального уравнения*

$$u(M)=\lambda\iint\limits_{\Sigma} G(M, P)\,u(P)\,d\sigma_P$$

с симметрическим ядром $G(M, P)$, *определяемым формулой* (21).

К этому уравнению применима общая теория интегральных уравнений с симметрическим ядром. Отсюда следует, что произвольная дважды дифференцируемая функция $f(\theta, \varphi)$ может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по сферическим функциям

$$f(\theta, \varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi)=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi)\,P_n^{(m)}(\cos\theta), \tag{25}$$

где

$$Y_n(\theta, \varphi)=\sum_{m=0}^{n}(A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi)\,P_n^{(m)}(\cos\theta), \tag{26}$$

A_{nm} и B_{nm} — коэффициенты Фурье.

§ 4. Некоторые примеры применения сферических функций

Рассмотрим несколько типичных задач математической физики, требующих применения сферических функций.

Напомним, что общее решение уравнений Лапласа в сферической системе координат (r, θ, φ) имеет вид

$$u(r, \theta, \varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right)Y_n(\theta, \varphi),$$

где $Y_n(\theta, \varphi)$ — сферическая гармоника, т. е. линейная комбинация всех $2n+1$ сферических функций. Если решение ищется в области $r < a$ (внутренняя задача), то $B_n = 0$, для задачи в области $r > a$ (внешней задачи) следует положить $A_n = 0$ и, наконец, в случае области $a < r < b$, не содержащей ни $r = 0$, ни $r = \infty$, в решение, вообще говоря, входят слагаемые с r^n и $1/r^{n+1}$.