формулой

$$u(M)=\iint\limits_{\Sigma} G(M,\ P)\,F(P)\,d\sigma_P.$$

Применяя (24) к уравнению сферических функций $\Delta_{\theta,\varphi}u = -\lambda u$, заключаем:

сферические функции, определяемые формулой (7), *представляют совокупность всех линейно-независимых собственных функций интегрального уравнения*

$$u(M)=\lambda\iint\limits_{\Sigma} G(M,\ P)\,u(P)\,d\sigma_P$$

с симметрическим ядром $G(M, P)$, *определяемым формулой* (21).

К этому уравнению применима общая теория интегральных уравнений с симметрическим ядром. Отсюда следует, что произвольная дважды дифференцируемая функция $f(\theta, \varphi)$ может быть разложена в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по сферическим функциям

$$f(\theta,\ \varphi)=\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta,\ \varphi)= \\ =\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi)\,P_n^{(m)}(\cos\theta), \quad (25)$$

где

$$Y_n(\theta,\ \varphi)=\sum_{m=0}^{n}(A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi)\,P_n^{(m)}(\cos\theta), \quad (26)$$

A_{nm} и B_{nm} — коэффициенты Фурье.

§ 4. Некоторые примеры применения сферических функций

Рассмотрим несколько типичных задач математической физики, требующих применения сферических функций.

Напомним, что общее решение уравнений Лапласа в сферической системе координат $(r,\ \theta,\ \varphi)$ имеет вид

$$u(r,\ \theta,\ \varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right)Y_n(\theta,\ \varphi),$$

где $Y_n(\theta, \varphi)$ — сферическая гармоника, т. е. линейная комбинация всех $2n+1$ сферических функций. Если решение ищется в области $r < a$ (внутренняя задача), то $B_n = 0$, для задачи в области $r > a$ (внешней задачи) следует положить $A_n = 0$ и, наконец, в случае области $a < r < b$, не содержащей ни $r = 0$, ни $r = \infty$, в решение, вообще говоря, входят слагаемые с r^n и $1/r^{n+1}$.

1. Задача Дирихле для сферы. Пусть дана сфера радиуса a. Поместим в центр этой сферы начало сферической системы координат (r, θ, φ) и рассмотрим две задачи Дирихле:

$$\Delta u = 0 \quad \text{при} \quad r < a, \ u|_{r=a} = f(\theta, \varphi) \ \text{(внутренняя задача)}, \tag{1}$$

$$\Delta u = 0 \quad \text{при} \quad r > a, \ u|_{r=a} = f(\theta, \varphi) \ \text{(внешняя задача)}, \tag{1'}$$

где $f = f(\theta, \varphi)$ — заданная функция на поверхности сферы. Разложим $f(\theta, \varphi)$ в ряд по сферическим функциям:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi),$$

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{n} \{A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi\} P_n^{(m)}(\cos\theta),$$

где A_{nm} и B_{nm} вычисляются по формулам (9) § 3.

Решение внутренней задачи ищем в виде

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \bar{Y}_n(\theta, \varphi) \quad \text{при} \quad r \leqslant a.$$

Пользуясь граничным условием при $r = a$ и учитывая разложение для $f(\theta, \varphi)$, находим

$$\bar{Y}_n(\theta, \varphi) = Y_n(\theta, \varphi).$$

Аналогично находим решение внешней задачи (2):

$$u(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta, \varphi) \quad \text{при} \quad r \geqslant a.$$

2. Проводящая сфера в поле точечиого заряда. Найдем электростатическое поле точечного заряда e в точке P в присутствии идеально проводящей сферы радиуса a. Будем предполагать, что сфера заземлена, т. е. ее потенциал равен нулю. Поместим начало сферической системы координат (r, θ, φ) в центр O сферы, а полярную ось $(\theta = 0)$ проведем через точку P; $OP = r_0 > a$.

Электростатическое поле $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} u$. Потенциал $u = u(M)$, $(M = M(r, \theta, \varphi))$ удовлетворяет уравнению Лапласа всюду вне сферы, кроме точки $M = P$, в которой имеет особенность вида $e/R_{MP} = u_0$, где u_0 — потенциал заряда e в неограниченном пространстве (в отсутствии сферы). На поверхности сферы потенциал $u|_{r=a} = 0$. Решение задачи естественно искать в виде

$$u(M) = \frac{e}{R} + v(M), \qquad R = R_{MP} = \sqrt{r_0^2 + r^2 - 2rr_0\cos\theta},$$

где v есть решение внешней задачи Дирихле

$$\left.\begin{aligned} &\Delta v = 0 \quad \text{при} \quad r > a, \\ &v\big|_{r=a} = -\frac{e}{R}\Big|_{r=a}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

В данном случае f из (1) имеет вид $f(\theta) = -\frac{e}{R}\Big|_{r=a}$. Воспользуемся разложением $1/R$ в ряд при $r < r_0$ (см. § 1, п. 1)

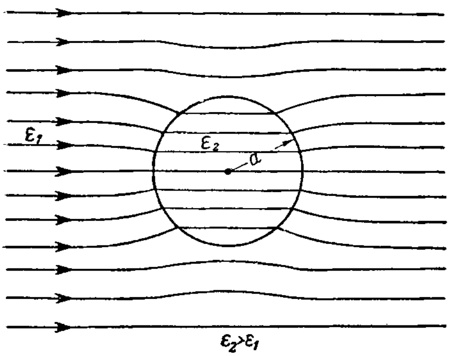

Рис. 104.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta)$$

$$\text{при} \quad r < r_0. \qquad (3)$$

Решение внешней задачи Дирихле (2) ищется в виде

$$v = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta, \varphi).$$

Из (2) и (3) находим $Y_n = -ea^n r_0^{-(n+1)} P_n(\cos\theta)$. Таким образом, потенциал $u = u(r, \theta)$ найден:

$$u = u(r, \theta) = \frac{e}{R} - e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{2n+1}}{r^{n+1}r_0^{n+1}} P_n(\cos\theta).$$

3. Поляризация шара в однородиом поле. Пусть в электростатическое поле в однородной изотропной среде с диэлектрической постоянной ε_1 помещен шар радиуса a из диэлектрика с постоянной ε_2 (рис. 104). Будем искать потенциал создавшегося поля в виде суммы

$$u = \begin{cases} u_1 = u_0 + v_1 & \text{вне шара}, \\ u_2 = u_0 + v_2 & \text{внутри шара}, \end{cases}$$

где u_0 — потенциал невозмущенного (в отсутствии диэлектрического шара) поля, а v — возмущение, вызываемое помещенным в поле шаром. Потенциал u удовлетворяет уравнению

$$\Delta u = 0$$

при дополнительных условиях

$$u_1 = u_2 \quad \text{на} \quad S,$$

$$\varepsilon_1\frac{\partial u_1}{\partial n} = \varepsilon_2\frac{\partial u_2}{\partial n} \quad \text{на} \quad S,$$

где S — граница шара, u_1 и u_2 — значения функции u вне и внутри шара. Отсюда следует, что потенциал v будет определяться условиями

$$\Delta v = 0,$$

$$v_1 = v_2 \quad \text{на} \quad S, \tag{4}$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial v_1}{\partial n} - \varepsilon_2 \frac{\partial v_2}{\partial n} = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\frac{\partial u_0}{\partial n} \quad \text{на} \quad S, \tag{4'}$$

так как для функции u_0 имеем:

$$\Delta u_0 = 0,$$

$$(u_0)_1 = (u_0)_2 \quad \text{на} \quad S,$$

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial n}\right)_1 = \left(\frac{\partial u_0}{\partial n}\right)_2 \quad \text{на} \quad S.$$

В правой части равенства (4′) стоит известная функция θ и φ, которую мы разложим по сферическим функциям:

$$\left.\frac{\partial u_0}{\partial n}\right|_S = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta, \varphi).$$

Полагая

$$v_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\overline{Y}_n(\theta, \varphi); \qquad v_2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^{n}\overline{\overline{Y}}_n$$

и пользуясь граничными условиями (4) и (4′), получаем:

$$\overline{Y}_n = \overline{\overline{Y}}_n$$

и

$$\varepsilon_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(n+1)}{r}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\overline{Y}_n\Big|_{r=a} - \varepsilon_2 \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{a}\left(\frac{r}{a}\right)^{n-1}\overline{Y}_n\Big|_{r=a} =$$

$$= -(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\sum_{n=0}^{\infty} Y_n,$$

откуда

$$\overline{Y}_n = Y_n \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\,a}{\varepsilon_1(n+1) + \varepsilon_2 n}. \tag{4''}$$

Рассмотрим теперь частный случай. Шар помещен в однородном параллельном внешнем поле E_0, направленном вдоль оси z. Потенциал этого поля равен

$$u_0 = -E_0 z = -E_0 r\cos\theta,$$

так что

$$\left.\frac{\partial u_0}{\partial n}\right|_S = \left.\frac{\partial u_0}{\partial r}\right|_{r=a} = -E_0\cos\theta = Y_1(\theta).$$

Формула (4″) дает:

$$\overline{Y}_n = 0 \quad \text{при} \quad n \neq 1,$$

$$\overline{Y}_1 = -E_0 \cos\theta \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\, a}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}.$$

Для потенциала возмущенного поля имеем:

$$u_1 = -E_0 z \left[1 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \left(\frac{a}{r}\right)^3\right] \quad \text{вне шара} \quad (r > a),$$

$$u_2 = -E_0 z \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \qquad \text{внутри шара} \quad (r < a),$$

откуда следует, что

$$E_1 = -\frac{\partial u_1}{\partial z} = \left[1 - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{2a^3}{r^3}\right] E_0,$$

$$E_2 = -\frac{\partial u_2}{\partial z} = \frac{3\varepsilon_1}{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2} E_0,$$

т. е. поле внутри шара параллельно и однородно.

Если $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, то эквипотенциальные поверхности, оставаясь плоскостями, перпендикулярными к направлению поля, будут расположены реже, чем в невозмущенном поле. Силовые линии, являющиеся ортогональными траекториями эквипотенциальных поверхностей, будут втягиваться в шар с большей диэлектрической постоянной. В случае $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ картина будет обратной.

Этим же методом можно получить решение задачи о поляризации шара в присутствии точечного источника, если воспользоваться разложением $1/R$ по сферическим функциям (см. § 1).

Следует отметить, что аналогичные задачи встречаются при изучении магнитных и термических полей, а также поля стационарного электрического тока при наличии сферического включения, физические характеристики которого отличны от характеристик среды. Для термической задачи в граничное условие (3) вместо ε_1 и ε_2 будут входить коэффициенты теплопроводности k_1 и k_2, для магнитной задачи — магнитные проницаемости μ_1 и μ_2, а для последней задачи — проводимости λ_1 и λ_2.

4. Собственные колебания сферы. Рассмотрим задачу о собственных колебаниях сферы радиуса r_0 с нулевыми граничными условиями первого рода. Эта задача сводится к отысканию собственных значений и собственных функций уравнения

$$\Delta v + \lambda v = 0 \tag{5}$$

с граничным условием на поверхности сферы

$$v = 0. \tag{6}$$

Помещая начало сферической системы координат в центр сферы, перепишем уравнение (5) в виде

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi}v+\lambda v=0, \qquad (5')$$

где

$$\Delta_{\theta,\varphi}v=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}.$$

Решение будем искать методом разделения переменных, полагая

$$v(r,\theta,\varphi)=R(r)\,Y(\theta,\varphi). \qquad (6')$$

После подстановки этого выражения в уравнение (5) получим:

$$\frac{\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)}{R}+\lambda r^2+\frac{\Delta_{\theta,\varphi}Y}{Y}=0, \qquad (7)$$

откуда следует:

$$\Delta_{\theta,\varphi}Y+\mu Y=0, \qquad (8)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left(\lambda-\frac{\mu}{r^2}\right)R=0. \qquad (9)$$

Решая уравнение (8) при естественных условиях ограниченности в полюсах сферы

$$|Y|_{\theta=0,\pi}<\infty \qquad (10)$$

и условии периодичности по φ: $Y(\theta,\varphi+2\pi)=Y(\theta,\varphi)$, получаем собственные значения

$$\mu=n(n+1), \qquad (11)$$

каждому из которых соответствует $2n+1$ сферическая функция:

$$\left.\begin{aligned} Y_n^{(0)}(\theta,\varphi)&=P_n(\cos\theta),\\ Y_n^{(-j)}(\theta,\varphi)&=P_n^{(j)}(\cos\theta)\cos j\varphi,\\ Y_n^{(j)}(\theta,\varphi)&=P_n^{(j)}(\cos\theta)\sin j\varphi \quad (j=1,2,\ldots,n).\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Обратимся теперь к уравнению (9). Учитывая равенство (11), граничные условия при $r=r_0$ и естественное условие ограниченности при $r=0$, получаем для функции $R(r)$ следующую задачу на собственные значения:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left(\lambda-\frac{n(n+1)}{r^2}\right)R=0, \qquad (9')$$

$$R(r_0)=0, \qquad (13)$$

$$|R(0)|<\infty. \qquad (14)$$

С помощью подстановки

$$R(r)=\frac{y(r)}{\sqrt{r}} \tag{15}$$

это уравнение приводится к уравнению Бесселя порядка $(n+{}^1/_2)$:

$$y''+\frac{1}{r}y'+\left[\lambda-\frac{(n+{}^1/_2)^2}{r^2}\right]y=0, \tag{16}$$

общее решение которого имеет вид (см. Дополнение II, ч. I, § 1)

$$y(r)=AJ_{n+{}^1/_2}(\sqrt{\lambda}r)+BN_{n+{}^1/_2}(\sqrt{\lambda}r). \tag{17}$$

Из условия ограниченности (14) следует, что

$$B=0.$$

Граничное условие (13) дает:

$$AJ_{n+{}^1/_2}(\sqrt{\lambda}r_0)=0.$$

Так как мы ищем нетривиальные решения уравнения, то $A\neq 0$ и, следовательно,

$$J_{n+{}^1/_2}(\sqrt{\lambda}r_0)=0.$$

Обозначив $\nu_1^{(n)}, \nu_2^{(n)}, \ldots, \nu_m^{(n)}$ корни трансцендентного уравнения

$$J_{n+{}^1/_2}(\nu)=0, \tag{18}$$

находим собственные значения

$$\lambda_{m,n}=\left(\frac{\nu_m^{(n)}}{r_0}\right)^2. \tag{19}$$

Каждому собственному значению $\lambda_{m,n}$ соответствует $2n+1$ собственная функция. Введем обозначение

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,J_{n+{}^1/_2}(x). \tag{20}$$

Тогда собственные функции уравнения (5) при граничном условии (6) можно представить в виде

$$v_{n,m,j}(r,\theta,\varphi)=\psi_n\left(\frac{\nu_m^{(n)}}{r_0}r\right)Y_n^{(j)}(\theta,\varphi)$$

$$(n=0,1,\ldots;\ m=1,2,\ldots;\ j=-n,\ldots,-1,0,1,\ldots,n). \tag{21}$$

Рассмотрим теперь первую внутреннюю краевую задачу для волнового уравнения

$$\Delta v+k^2v=0 \tag{22}$$

при граничном условии

$$v = f(\theta, \varphi) \tag{23}$$

на поверхности сферы радиуса r_0.

Из предшествующего изложения ясно, что решение этой задачи представляется в виде

$$v(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-n}^{n} f_{nj} \frac{\psi_n(kr)}{\psi_n(kr_0)} Y_n^{(j)}(\theta, \varphi), \tag{24}$$

где f_{nj} — коэффициенты разложения функции $f(\theta, \varphi)$ по сферическим функциям $\{Y_n^{(j)}(\theta, \varphi)\}$

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-n}^{n} f_{nj} Y_n^{(j)}(\theta, \varphi). \tag{25}$$

Если k^2 совпадает с одним из собственных значений

$$k^2 = \lambda_{m_0 n_0} = \left(\frac{\nu_{m_0}^{(n_0)}}{r_0}\right)^2,$$

то краевая задача (22) — (23) имеет решение не для всякой функции $f(\theta, \varphi)$. Формула (24) показывает, что необходимым и достаточным условием разрешимости нашей краевой задачи в этом случае является обращение в нуль коэффициентов $f_{n_0 j}$

$$f_{n_0 j} = 0$$

или

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) Y_{n_0}^{(j)}(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 0.$$

Если эти условия выполнены, то решение определяется формулой (24), в которой слагаемые, соответствующие $n = n_0$, отсутствуют. Однако при этом решение определено неоднозначно, так как к нему всегда можно прибавить любую линейную комбинацию собственных функций, соответствующих $k^2 = \lambda_{m_0 n_0}$.

5. Внешняя краевая задача для сферы. Рассмотрим внешнюю первую краевую задачу для сферы (см. гл. VII, § 3)

$$\Delta v + k^2 v = 0 \quad (k^2 > 0),$$

$$v\big|_{r=r_0} = f(\theta, \varphi),$$

$$v = O\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при} \quad r \to \infty,$$

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial v}{\partial r} + ikv\right) = 0 \quad (\text{условие излучения}).$$

Как было показано в § 3 главы VII, эта задача имеет единственное решение. Разложим искомую функцию и функцию $f(\theta, \varphi)$ в ряды по сферическим функциям:

$$v(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-n}^{n} R_n(r) Y_n^{(j)}(\theta, \varphi),$$

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-n}^{n} f_{nj} Y_n^{(j)}(\theta, \varphi).$$

Коэффициенты разложения $R_n(r)$, очевидно, будут удовлетворять уравнению

$$R_n'' + \frac{1}{r} R_n' + \left(k^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right) R_n = 0,$$

граничному условию

$$R_n(r_0) = f_n$$

и условиям излучения при $r \to \infty$:

$$R_n(r) = O\left(\frac{1}{r}\right), \qquad \lim_{r\to\infty} r(R_n' + ikR_n) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид (см. п. 4 и Дополнение I, § 3)

$$R_n(r) = A_n \zeta_n^{(1)}(kr) + B_n \zeta_n^{(2)}(kr),$$

где

$$\zeta_n^{(1)}(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\, H_{n+1/2}^{(1)}(\rho),$$

$$\zeta_n^{(2)}(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\, H_{n+1/2}^{(2)}(\rho) \qquad (\rho = kr).$$

Учитывая асимптотические формулы для функций Ханкеля $H_n^{(1)}(\rho)$ и $H_n^{(2)}(\rho)$ (см. Дополнение I, § 3):

$$H_n^{(1)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\, e^{i\left[\rho - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right]} + \ldots,$$

$$H_n^{(2)}(\rho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\rho}}\, e^{-i\left[\rho - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right]} + \ldots$$

(точками обозначены члены более высокого порядка малости относительно $1/\rho$), получаем для функций $\zeta_n^{(1)}$ и $\zeta_n^{(2)}$ следующие асимптотические формулы:

$$\zeta_n^{(1)}(kr) = \frac{e^{i\left[kr - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right]}}{r} + \ldots,$$

$$\zeta_n^{(2)}(kr) = \frac{e^{-i\left[kr - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right]}}{r} + \ldots$$

Отсюда видно, что условию излучения удовлетворяет лишь функция $\zeta_n^{(2)}$.

Поэтому

$$A_n = 0.$$

Пользуясь граничным условием при $r = r_0$, находим:

$$B_{nj} = \frac{f_{nj}}{\zeta_n^{(2)}(kr_0)}.$$

Таким образом, мы получаем функцию $v(r, \theta, \varphi)$ в виде

$$v(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-n}^{\infty} \frac{f_{nj}\zeta_n^{(2)}(kr)}{\zeta_n^{(2)}(kr_0)} Y_n^{(j)}(\theta, \varphi),$$

где

$$f_{nj} = \frac{\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\theta, \varphi)\, Y_n^{(j)}(\theta, \varphi) \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}{\|Y_n^{(j)}\|^2},$$

и

$$\|Y_n^{(j)}\|^2 = \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} [Y_n^{(j)}]^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{2\pi\varepsilon_j}{2n+1} \cdot \frac{(n+j)!}{(n-j)!}, \quad \varepsilon_j = \begin{cases} 2, & j = 0, \\ 1, & j > 0 \end{cases}$$

— квадрат нормы сферической функции $Y_n^{(j)}(\theta, \varphi)$.

ЧАСТЬ III

ПОЛИНОМЫ ЧЕБЫШЕВА—ЭРМИТА И ЧЕБЫШЕВА—ЛАГЕРРА

§ 1. Полиномы Чебышева — Эрмита

1. Дифференциальная формула. Полиномы Чебышева — Эрмита $H_n(x)$ определим по аналогии с полиномами Лежандра при помощи производящей функции $\Psi(\rho; x)$, полагая

$$\Psi(\rho, x) = e^{2x\rho - \rho^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{\rho^n}{n!}. \tag{1}$$

Отсюда, в силу теоремы Коши, следует

$$H_n(x) = \left.\frac{\partial^n \Psi(\rho, x)}{\partial \rho^n}\right|_{\rho=0} = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\Psi(\zeta, x)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = e^{x^2} \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_C \frac{e^{-(x-\zeta)^2}}{\zeta^{n+1}} d\zeta, \tag{2}$$

где C — замкнутый контур в плоскости комплексного переменного ζ, охватывающий точку $\zeta = 0$. Вводя новую переменную