Отсюда видно, что условию излучения удовлетворяет лишь функция $\zeta_n^{(2)}$.

Поэтому

$$A_n = 0.$$

Пользуясь граничным условием при $r = r_0$, находим:

$$B_{nj} = \frac{f_{nj}}{\zeta_n^{(2)}(kr_0)}.$$

Таким образом, мы получаем функцию $v(r, \theta, \varphi)$ в виде

$$v(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-n}^{\infty} \frac{f_{nj}\zeta_n^{(2)}(kr)}{\zeta_n^{(2)}(kr_0)} Y_n^{(j)}(\theta, \varphi),$$

где

$$f_{nj} = \frac{\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) Y_n^{(j)}(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}{\|Y_n^{(j)}\|^2},$$

и

$$\|Y_n^{(j)}\|^2 = \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} [Y_n^{(j)}]^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{2\pi\varepsilon_j}{2n+1} \cdot \frac{(n+j)!}{(n-j)!}, \qquad \varepsilon_j = \begin{cases} 2, & j = 0, \\ 1, & j > 0 \end{cases}$$

— квадрат нормы сферической функции $Y_n^{(j)}(\theta, \varphi)$.

ЧАСТЬ III

ПОЛИНОМЫ ЧЕБЫШЕВА — ЭРМИТА И ЧЕБЫШЕВА — ЛАГЕРРА

§ 1. Полиномы Чебышева — Эрмита

1. Дифференциальная формула. Полиномы Чебышева — Эрмита $H_n(x)$ определим по аналогии с полиномами Лежандра при помощи производящей функции $\Psi(\rho; x)$, полагая

$$\Psi(\rho, x) = e^{2x\rho - \rho^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{\rho^n}{n!}. \tag{1}$$

Отсюда, в силу теоремы Коши, следует

$$H_n(x) = \left.\frac{\partial^n \Psi(\rho, x)}{\partial \rho^n}\right|_{\rho=0} = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_C \frac{\Psi(\zeta, x)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = e^{x^2} \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_C \frac{e^{-(x-\zeta)^2}}{\zeta^{n+1}} d\zeta, \tag{2}$$

где C — замкнутый контур в плоскости комплексного переменного ζ, охватывающий точку $\zeta = 0$. Вводя новую переменную интегрирования $z = x - \zeta$, преобразуем (2) к виду

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{C_1} \frac{e^{-z^2}}{(z-x)^{n+1}} dz = \\ = (-1)^n e^{x^2} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \frac{d^n}{dx^n} \int\limits_{C_1} \frac{e^{-z^2}}{z-x} dz \right\}, \quad (3)$$

где C_1 — контур, охватывающий точку $z = x$. В силу теоремы Коши, выражение в фигурных скобках равно $\frac{d^n(e^{-x^2})}{dx^n}$. В результате получаем из (3) дифференциальную формулу

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}). \quad (4)$$

Эта формула показывает, что $H_n(x)$ есть полином степени n, причем

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x). \quad (5)$$

Из (4) находим $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$, $H_2(x) = 4x^2 - 2$ и т. д.

2. Рекуррентные формулы. Дифференцируя производящую функцию по ρ и x, найдем:

$$\Psi_x - 2\rho\Psi = 0, \quad \Psi_\rho - 2(x-\rho)\Psi = 0. \quad (6)$$

В каждое из тождеств (6) подставим ряд (1) для $\Psi(\rho, x)$. Собирая члены при ρ^n и приравнивая их к нулю, получим две рекуррентные формулы:

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x), \quad (7)$$

$$H_{n+1}(x) - 2xH_n(x) + 2nH_{n-1}(x) = 0. \quad (8)$$

Формула (8) позволяет последовательно определять H_n для всех n, зная $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = 2x$. Так, например, $H_2(x) = 2xH_1 - 2H_0 = 4x^2 - 2$, $H_3 = 2xH_2 - 4H_1 = 8x^3 - 12x$ и т. д.

3. Уравнение Чебышева — Эрмита. Найдем уравнение, которому удовлетворяет $H_n(x)$. Для этого используем рекуррентные формулы (7) и (8). Сначала с помощью (7) исключим из (8) $2nH_{n-1}$:

$$H_{n+1} - 2xH_n + H_n' = 0;$$

это уравнение продифференцируем по x:

$$H_{n+1}' - 2xH_n' - 2H_n + H_n'' = 0$$

и подставим сюда $H_{n+1}' = 2(n+1)H_n'$ из (7). В результате получим:

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d}{dx}\left(e^{-x^2} \frac{dH_n}{dx}\right) + 2ne^{-x^2}H_n = 0. \quad (9)$$

Отсюда видно, что полином Чебышева — Эрмита является собственной функцией, соответствующей собственному значению $\lambda = 2n$, следующей задачи (задача Штурма — Лиувилля):

найти те значения λ, *при которых уравнение Чебышева — Эрмита*

$$(e^{-x^2}y')' + \lambda e^{-x^2}y = 0, \qquad -\infty < x < \infty, \tag{10}$$

имеем нетривиальное решение, возрастающее при $x \to \infty$ *не быстрее, чем конечная степень* x.

Решение этой задачи можно было бы искать в виде степенного ряда $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Подставляя этот ряд в уравнение (10), получим для коэффициентов рекуррентную формулу

$$a_{n+2} = \frac{2n-\lambda}{(n+2)(n+1)} a_n. \tag{11}$$

Из формулы (11) видно, что при $\lambda = 2n$ все коэффициенты $a_k = 0$ для $k > n$ и ряд обрывается. Только при $\lambda = 2n$ может быть выполнено условие на бесконечности. Получающиеся полиномы определены с точностью до постоянного множителя. Выбирая $a_n = 2^n$, получим полиномы $H_n(x)$.

4. Норма полиномов $H_n(x)$. Докажем (не обращаясь к общей теории), что полиномы Чебышева — Эрмита образуют ортогональную с весом e^{-x^2} на бесконечной прямой $-\infty < x < \infty$ систему функций, и вычислим их норму (с весом $\rho(x) = e^{-x^2}$):

$$\| H_n \| = \sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}. \tag{12}$$

Рассмотрим выражение

$$L_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) dx.$$

Положим для определенности, что $m \leqslant n$. Интегрируя по частям и пользуясь формулой (7), а также тем, что на бесконечности обращается в нуль произведение полинома на e^{-x^2}, получим:

$$L_{mn} = (-1)^{n-1} 2m \int_{-\infty}^{\infty} H_{m-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(e^{-x^2}) dx =$$

$$= (-1)^{n-m} 2^m m! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(e^{-x^2}) dx.$$

так как $H_0=1$. Отсюда видно, что

$$L_{mn}=(-1)^{n-m}2^m m!\frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}(e^{-x^2})\Big|_{-\infty}^{\infty}=0 \quad \text{при} \quad m<n.$$

Если $m=n$, то

$$L_{mn}=2^n n!\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=2^n n!\sqrt{\pi}=\|H_n\|^2.$$

Тем самым доказано, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx=\begin{cases}0, & m\neq n.\\ 2^n n!\sqrt{\pi}, & m=n.\end{cases}$$

Система полиномов Чебышева — Эрмита является замкнутой (на доказательстве этого факта мы не останавливаемся), и, следовательно, мы нашли все решения задачи (10), т. е. $\lambda\neq 2n$ не может быть собственным значением.

5. Функции Чебышева — Эрмита. В приложениях (см. стр. 712) часто пользуются функциями Чебышева — Эрмита

$$\psi_n(x)=h_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}},\quad h_n(x)=\frac{H_n(x)}{\|H_n(x)\|},$$

образующими ортогональную и нормированную с весом $\rho(x)=1$ систему на бесконечном интервале $-\infty<x<\infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n(x)\psi_m(x)dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ 1, & m=n.\end{cases}$$

Эти функции обращаются в нуль при $x\to\pm\infty$ и удовлетворяют уравнению

$$\psi_n''+(\lambda-x^2)\psi_n=0 \quad \text{при} \quad \lambda=2n+1.$$

§ 2. Полиномы Чебышева — Лагерра

1. Дифференциальная формула. Полиномы Чебышева — Лагерра $L_n(x)$ мы определим при помощи производящей функции

$$\Psi(\rho,x)=\frac{1}{1-\rho}e^{-\frac{x\rho}{1-\rho}}. \tag{1}$$

Разлагая ее в степенной ряд

$$\Psi(\rho,x)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)\rho^n,\quad L_n(x)=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n\Psi}{\partial\rho^n}\Big|_{\rho=0} \tag{2}$$