квантового числа n число l может принимать n значений $l = 0, 1, \ldots, n-1$, а каждому значению l соответствует $2l+1$ значение m. Отсюда следует, что заданному значению энергии E_n, т. е. заданному значению n, соответствует

$$\sum_{l=0}^{n-1}(2l+1) = 1+3+5+\ldots+(2n-1) = n^2$$

различных собственных функций. Таким образом, каждый уровень энергии имеет вырождение кратности n^2.

Найденный нами дискретный спектр отрицательных собственных значений энергии E_n состоит из бесконечного множества чисел с точкой сгущения в нуле.

Второй отличительной чертой рассматриваемой задачи для уравнения Шредингера является наличие непрерывного спектра положительных собственных значений (всякое положительное число E является собственным значением уравнения (23)). В этом случае электрон уже не связан с ядром, но все еще находится в его поле (ионизированный атом водорода). На доказательстве существования сплошного спектра мы не останавливаемся, отсылая читателя к специальной литературе[1]).

ЧАСТЬ IV

ФОРМУЛЫ, ТАБЛИЦЫ И ГРАФИКИ

Ниже приводятся таблицы некоторых специальных функций, с которыми мы встречались при решении краевых задач математической физики. Таблицы сопровождаются перечнем простейших свойств специальных функций.

I. Основные свойства специальных функций

1. Интеграл ошибок

1. Интеграл ошибок:

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\alpha^2}\,d\alpha.$$

2. Разложение при малых z:

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(z - \frac{z^3}{1!\cdot 3} + \frac{z^5}{2!\cdot 5} - \ldots\right).$$

3. Асимптотическая формула при больших z:

$$\Phi(z) \cong 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-z^2}}{z}\left(1 - \frac{1}{(2z^2)} + \frac{3\cdot 4}{(2z)^4} - \frac{4\cdot 5\cdot 6}{(2z)^6} + \ldots\right).$$

[1]) См., например, В. А. Фок, Начала квантовой механики, 1932; Курант и Гильберт, Методы математической физики, т. I, Гостехиздат, 1951, гл. V.

2. Цилиндрические функции

Ряды	Асимптотические формулы
1. Функции Бесселя	
$J_\nu(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)}-\ldots$	$J_\nu(x)\cong\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\ldots$
2. Функции Неймана	
$N_0(x)=\frac{2}{\pi}J_0(x)\left(\ln\frac{x}{2}+C\right)+\frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\ldots$ ($C=0{,}577215664901532$ есть постоянная Эйлера)	$N_0(x)\cong\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\ldots$
$N_1(x)=-\frac{2}{\pi x}+\frac{2}{\pi}J_1(x)\left(\ln\frac{x}{2}+C\right)+\ldots,$	$N_1(x)\cong-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\ldots,$
$N_n(x)=-\frac{1}{\pi}\left(\frac{2}{x}\right)^n(n-1)!+\ldots$ $(n>1)$	$N_n(x)\cong\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\pi n}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+\ldots$
3. Функции Ханкеля	
$H_\nu^{(1)}(x)=J_\nu(x)+iN_\nu(x),$	$H_\nu^{(1)}(x)\cong\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{i\left(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}+\ldots,$
$H_\nu^{(2)}(x)=J_\nu(x)-iN_\nu(x)$	$H_\nu^{(2)}(x)\cong\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{-i\left(x-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}+\ldots$
4. Функции мнимого аргумента	
$I_\nu(x)=(-i)^\nu I_\nu(ix)=\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}+\ldots$	$I_\nu(x)\cong\sqrt{\frac{1}{2\pi x}}\,e^x+\ldots$
$K_0(x)=\frac{\pi}{2}iH_0^{(1)}(ix)=-\left(\ln\frac{x}{2}+C\right)I_0(x)+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\ldots$	$K_0(x)\cong\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,e^{-x}+\ldots$
$K_1(x)=-\frac{\pi}{2}H_1^{(1)}(ix)=\frac{1}{x}+\ldots$	$K_1(x)\cong\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,e^{-x}+\ldots$
$K_n(x)=\frac{\pi}{2}e^{i\frac{\pi}{2}n}H_n^{(1)}(ix)=\frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^n+\ldots$	$K_n(x)\cong\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,e^{-x}+\ldots$

5. Рекуррентные формулы:

$$\frac{d}{dx}[x^\nu Z_\nu(x)] = x^\nu Z_{\nu-1}(x), \quad \frac{d}{dx}\left[\frac{Z_\nu(x)}{x^\nu}\right] = -\frac{Z_{\nu+1}(x)}{x^\nu},$$

$$Z_{\nu-1}(x) + Z_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} Z_\nu(x),$$

где $Z_\nu(x)$ — любая цилиндрическая функция вещественного аргумента.

Частные случаи:

$$J_0'(x) = -J_1(x), \qquad \int_0^x J_1(x)\,dx = 1 - J_0(x),$$

$$\frac{d}{dx}[xJ_1(x)] = xJ_0(x), \qquad \int_0^x xJ_0(x)\,dx = xJ_1(x).$$

Для функций мнимого аргумента:

$$I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} I_\nu(x), \quad K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) = -\frac{2\nu}{x} K_\nu(x),$$

$$I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x) = 2\frac{d}{dx} I_\nu(x), \quad K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x) = -2\frac{d}{dx} K_\nu(x),$$

$$I_0'(x) = I_1(x), \quad K_0'(x) = -K_1(x).$$

6. Определитель Вронского для цилиндрических функций:

$$J_\nu(x) N_\nu'(x) - N_\nu(x) J_\nu'(x) = \frac{2}{\pi x},$$

$$H_\nu^{(1)}(x) H_\nu^{(2)\prime}(x) - H_\nu^{(2)}(x) H_\nu^{(1)\prime}(x) = -\frac{4i}{\pi x},$$

$$I_\nu(x) K_\nu'(x) - K_\nu(x) I_\nu'(x) = -\frac{1}{x}.$$

7. Интегральные формулы:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix\sin\varphi + in\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \frac{(-i)^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\cos\varphi + in\varphi}\,d\varphi = \frac{(-i)^n}{\pi} \int_0^{\pi} e^{ix\cos\varphi} \cos n\varphi\,d\varphi,$$

$$H_\nu^{(1,2)}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{C_{1,2}} e^{-ix\sin\varphi + i\nu\varphi}\,d\varphi,$$

где контуры интегрирования C_1 и C_2 изображены на рис. 96;

$$K_\nu(x) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x\,\mathrm{ch}\,\xi - \nu\xi}\,d\xi.$$

8. Функции полуцелого порядка:

$$J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x,$$

$$J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x,$$

$$J_{3/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x\right),$$

$$J_{-3/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(-\frac{\cos x}{x}-\sin x\right),$$

$$N_{n+1/2}(x)=(-1)^{n-1}J_{-n-1/2}(x).$$

3. Полиномы Лежандра

1. Производящая функция:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\rho^2-2\rho x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n P_n(x), \qquad 0<\rho<1, \qquad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

2. Рекуррентная формула:

$$(n+1)P_{n+1}(x)-x(2n+1)P_n(x)+nP_{n-1}(x)=0.$$

3. Формула Родрига:

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n].$$

4. Уравнение полиномов Лежандра:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+n(n+1)y=0.$$

5. Интегральная формула:

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(x+i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi\right)^n d\varphi, \qquad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

6. Квадрат нормы:

$$\|P_n\|^2=\int_{-1}^{+1}P_n^2(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}.$$

7.

$$P_0(x)=1, \quad P_1(x)=x, \quad P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),$$

$$P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x), \qquad P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3).$$

4. Присоединеные функции

1. Уравнение присоединенных функций:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right]+\left(n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)y=0.$$

2.

$$P_n^{(m)}(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x).$$

3.

$$\|P_n^{(m)}\|^2=\int_{-1}^{+1}[P_n^{(m)}(x)]^2\,dx=\frac{2}{2n+1}\,\frac{(n+m)!}{(n-m)!}.$$

5. Полиномы Чебышева—Эрмита

1. Производящая функция:

$$e^{2tx-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}H_n(x)\frac{t^n}{n!}.$$

2. Рекуррентные формулы:

$$H_n'(x)=2nH_{n-1}(x),\qquad H_{n+1}(x)-2xH_n(x)+2nH_{n-1}(x)=0.$$

3. Дифференциальная формула:

$$H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}.$$

4.

$$\|H_n\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}H_n^2(x)\,e^{-x^2}\,dx=2^n n!\sqrt{\pi}.$$

6. Полиномы Чебышева—Лагерра

1. Производящая функция:

$$\frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)\,t^n.$$

2. Дифференциальная формула:

$$L_n(x)=\frac{1}{n!}e^x\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n).$$

3.

$$\|L_n(x)\|^2=1.$$