IV. Различные ортогональные системы координат

Пусть x, y, z — декартовы координаты некоторой точки, а x_1, x_2, x_3 — криволинейные ортогональные координаты этой точки. Квадрат элемента длины выражается формулой

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = h_1^2\,dx_1^2 + h_2^2\,dx_2^2 + h_3^2\,dx_3^2,$$

где

$$h_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)^2} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3)$$

— метрические коэффициенты, или коэффициенты Ламэ. Ортогональная координатная система полностью характеризуется тремя метрическими коэффициентами h_1, h_2, h_3.

Приведем общее выражение для операторов grad, div, rot, Δ в ортогональной криволинейной системе координат:

$$\operatorname{grad} u = \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{h_j}\frac{du}{dx_j}\,\boldsymbol{i}_j,$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(h_2h_3A_1) + \frac{\partial}{\partial x_2}(h_3h_1A_2) + \frac{\partial}{\partial x_3}(h_1h_2A_3)\right],$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\boldsymbol{i}_1 & h_2\boldsymbol{i}_2 & h_3\boldsymbol{i}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta u = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)\right],$$

где $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$ — единичные базисные векторы, $\boldsymbol{A} = (A_1, A_2, A_3)$ — произвольный вектор, u — скаляр.

1. Прямоугольные координаты.

$$x_1 = x,\quad x_2 = y,\quad x_3 = z,\quad h_1 = 1,\quad h_2 = 1,\quad h_3 = 1,$$

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}, \qquad \operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \ldots,$$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz},$$

где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ — направляющие единичные векторы осей x, y, z.

2. Цилиндрические координаты

$$x_1 = r, \quad x_2 = \varphi, \quad x_3 = z$$

связаны с прямоугольными координатами уравнениями

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

Координатные поверхности: $r = \mathrm{const}$ — цилиндры, $\varphi = \mathrm{const}$ — плоскости, $z = \mathrm{const}$ — плоскости.

Метрические коэффициенты равны

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = 1,$$

так что

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{i}_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\boldsymbol{i}_2 + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{i}_3,$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_1) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_2}{\partial \theta} + \frac{\partial A_3}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_3}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial r}\right)\boldsymbol{i}_2 + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_2) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_1}{\partial \varphi}\right]\boldsymbol{i}_3,$$

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

3. Сферические координаты

$$x_1 = r, \quad x_2 = \theta, \quad x_3 = \varphi$$

связаны с прямоугольными координатами формулами

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta.$$

Координатные поверхности: концентрические сферы $r = \mathrm{const}$, плоскости $\varphi = \mathrm{const}$, конусы $\theta = \mathrm{const}$.

Метрические коэффициенты равны

$$h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r\sin\theta,$$

так что

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{i}_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\boldsymbol{i}_2 + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\boldsymbol{i}_3,$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_1\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\, A_2\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_3}{\partial \varphi},$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_3) - \frac{\partial A_2}{\partial \varphi}\right]\boldsymbol{i}_1 + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_1}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_3)\right]\boldsymbol{i}_2 + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_2) - \frac{\partial A_1}{\partial \theta}\right]\boldsymbol{i}_3,$$

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

4. Эллиптические координаты

$$x_1=\lambda, \quad x_2=\mu, \quad x_3=z$$

определяются с помощью формул преобразования

$$x=c\lambda\mu, \quad y=c\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}, \quad z=z,$$

где c — масштабный множитель.

Метрические коэффициенты равны

$$h_1=c\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2-1}}, \qquad h_2=c\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{1-\mu^2}}, \qquad h_3=1.$$

Координатные поверхности: $\lambda=\mathrm{const}$ — цилиндры эллиптического сечения с фокусами в точках $x=\pm c$, $y=0$, $\mu=\mathrm{const}$ — семейство конфокальных гиперболических цилиндров, $z=\mathrm{const}$ — плоскости.

5. Параболические координаты.

Если r, θ — полярные координаты точки на плоскости, то параболические координаты могут быть введены с помощью формул

$$x_1=\lambda=\sqrt{2r}\sin\frac{\theta}{2}, \quad x_2=\mu=\sqrt{2r}\cos\frac{\theta}{2}, \qquad x_3=z.$$

Координатные поверхности $\lambda=\mathrm{const}$ и $\mu=\mathrm{const}$ представляют собой пересекающиеся параболические цилиндры с образующими, параллельными оси z. Связь с декартовыми координатами дают формулы

$$x=\frac{1}{2}(\mu^2-\lambda^2), \quad y=\lambda\mu, \qquad z=z.$$

Метрические коэффициенты $h_1=h_2=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$, $h_3=1$.

6. Эллипсоидальные координаты.

Вводятся с помощью уравнений ($a>b>c$):

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1 \ (\lambda>-c^2) \quad \text{(уравнение эллипсоида)},$$

$$\frac{x^2}{a^2+\mu}+\frac{y^2}{b^2+\mu}+\frac{z^2}{c^2+\mu}=1 \ (-c^2>\mu>-b^2) \quad \text{(уравнение однополостного гиперболоида)},$$

$$\frac{x^2}{a^2+\nu}+\frac{y^2}{b^2+\nu}+\frac{z^2}{c^2+\nu}=1 \ (-b^2>\nu>-a^2) \quad \text{(уравнение двухполостного гиперболоида)}.$$

Каждой точке (x, y, z) соответствует только одна система значений λ, μ, ν. Параметры $x_1=\lambda$, $x_2=\mu$, $x_3=\nu$ и называются эллипсоидальными координатами. Координаты x, y, z выражаются явно через λ, μ, ν:

$$x=\pm\sqrt{\frac{(\lambda+a^2)(\mu+a^2)(\nu+a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}},\quad y=\pm\sqrt{\frac{(\lambda+b^2)(\mu+b^2)(\nu+b^2)}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)}},$$

$$z=\pm\sqrt{\frac{(\lambda+c^2)(\mu+c^2)(\nu+c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}}.$$

Коэффициенты Ламэ равны

$$h_1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{R^2(\lambda)}},\qquad h_2=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{R^2(\mu)}},$$

$$h_3=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{R^2(\nu)}},$$

где

$$R(s)=\sqrt{(s+a^2)(s+b^2)(s+c^2)}\qquad (s=\lambda,\ \mu,\ \nu).$$

Оператор Лапласа можно представить в виде

$$\Delta u=\frac{4}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)(\mu-\nu)}\left[(\mu-\nu)R(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(R(\lambda)\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)+\right.$$
$$\left.+(\nu-\lambda)R(\mu)\frac{\partial}{\partial\mu}\left(R(\mu)\frac{\partial u}{\partial\mu}\right)+(\lambda-\mu)R(\nu)\frac{\partial}{\partial\nu}\left(R(\nu)\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)\right].$$

Частное решение уравнения Лапласа, зависящее только от λ, $U=U(\lambda)$, дается формулой

$$U=A\int\frac{d\lambda}{R(\lambda)}+B,$$

где A и B — произвольные постоянные.

7. Вырожденные эллипсоидальные координаты.

а) Вырожденные эллипсоидальные координаты (α, β, φ) для вытянутого эллипсоида вращения определяются при помощи формул

$$x=c\sin\beta\cos\varphi,\quad y=c\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi,\quad z=c\operatorname{ch}\alpha\cos\beta,$$

где c — масштабный множитель, $0\leqslant\alpha<\infty$, $0\leqslant\beta\leqslant\pi$, $-\pi<\varphi\leqslant\pi$. Координатные поверхности: вытянутые эллипсоиды вращения $\alpha=\mathrm{const}$, двухполостные гиперболоиды вращения $\beta=\mathrm{const}$ и плоскости $\varphi=\mathrm{const}$.

Квадрат элемента длины дается выражением

$$ds^2=c^2(\operatorname{sh}^2\alpha+\sin^2\beta)(d\alpha^2+d\beta^2)+c^2\operatorname{sh}^2\alpha\sin^2\beta\,d\varphi^2,$$

откуда для метрических коэффициентов получаются значения:

$$h_1=h_2=c\sqrt{\operatorname{sh}^2\alpha+\sin^2\beta},\qquad h_3=h_\varphi=c\operatorname{sh}\alpha\sin\beta.$$

Уравнение Лапласа имеет вид

$$\Delta u = \frac{1}{c^2(\operatorname{sh}^2\alpha + \sin^2\beta)}\left[\frac{1}{\operatorname{sh}\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\operatorname{sh}\alpha\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right) + \frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sin\beta\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right] = 0.$$

б) Система вырожденных эллипсоидальных координат (α, β, φ) для сплюснутого эллипсоида вращения определяется с помощью равенств

$$x = c\operatorname{ch}\alpha\sin\beta\cos\varphi, \qquad y = c\operatorname{ch}\alpha\sin\beta\sin\varphi, \qquad z = c\operatorname{ch}\alpha\cos\varphi,$$
$$0 \leqslant \alpha < \infty, \qquad 0 \leqslant \beta \leqslant \pi, \qquad -\pi < \varphi \leqslant \pi.$$

Координатные поверхности: сплюснутые эллипсоиды вращения $\alpha = \mathrm{const}$, однополостные гиперболоиды вращения $\beta = \mathrm{const}$ и плоскости $\varphi = \mathrm{const}$, проходящие через ось z.

Квадрат линейного элемента и оператор Лапласа в рассматриваемой системе координат имеют вид

$$ds^2 = c^2(\operatorname{ch}^2\alpha - \sin^2\beta)(d\alpha^2 + d\beta^2) + c^2\operatorname{ch}^2\alpha\sin^2\beta\, d\varphi^2,$$

$$\Delta u = \frac{1}{c^2(\operatorname{ch}^2\alpha - \sin^2\beta)}\left[\frac{1}{\operatorname{ch}\alpha}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\operatorname{ch}\alpha\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right) + \frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sin\beta\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{\sin^2 a} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2\alpha}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right].$$

8. Тороидальные координаты.

Система тороидальных координат (α, β, φ) определяется при помощи формул

$$x = \frac{c\operatorname{sh}\alpha\cos\varphi}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}, \qquad y = \frac{c\operatorname{sh}\alpha\sin\varphi}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}, \qquad z = \frac{c\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta},$$

где c — масштабный множитель $0 \leqslant \alpha < \infty$, $-\pi < \beta \leqslant \pi$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

Координатные поверхности суть торы $\alpha = \mathrm{const}$:

$$(\rho - c\operatorname{cth}\alpha)^2 + z^2 = \left(\frac{c}{\operatorname{sh}\alpha}\right)^2 \quad (\rho = \sqrt{x^2 + y^2}),$$

сферы $\beta = \mathrm{const}$:

$$(z - c\operatorname{ctg}\beta)^2 + \rho^2 = \left(\frac{c}{\sin\beta}\right)^2,$$

плоскости $\varphi = \mathrm{const}$.

Выражение для квадрата линейного элемента имеет вид

$$ds^2 = \frac{c^2}{(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)^2}\left[d\alpha^2 + d\beta^2 + \operatorname{sh}^2\alpha\, d\varphi^2\right],$$

метрические коэффициенты равны

$$h_\alpha = h_\beta = \frac{c}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}, \qquad h_\varphi = \frac{c\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta},$$

и оператор Лапласа дается следующим выражением:

$$\Delta u = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right) + \frac{1}{(\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta)\operatorname{sh}\alpha}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}.$$

Удобно вводить вместо u новую функцию v с помощью соотношения

$$u = \sqrt{2\operatorname{ch}\alpha - 2\cos\beta}\cdot v,$$

при этом уравнение $\Delta u = 0$ приводится к уравнению

$$v_{\alpha\alpha} + v_{\beta\beta} + v_\alpha \operatorname{cth}\alpha + \frac{1}{4}v + \frac{1}{\operatorname{sh}^2\alpha}v_{\varphi\varphi} = 0.$$

9. Биполярные координаты

а) Биполярные координаты на плоскости. Переменные

$$x_1 = \alpha, \qquad x_2 = \beta, \qquad x_3 = z$$

называются биполярными координатами, если имеют место равенства

$$x = \frac{a\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}, \qquad y = \frac{a\sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}, \qquad z = z.$$

Метрические коэффициенты равны $h_1 = h_2 = \frac{a}{\operatorname{ch}\alpha - \cos\beta}$, $h_3 = 1$.

б) Бисферические координаты $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_3 = \varphi$ определяются при помощи формул

$$x = \frac{c\sin\alpha\cos\varphi}{\operatorname{ch}\beta - \cos\alpha}, \qquad y = \frac{c\sin\alpha\sin\varphi}{\operatorname{ch}\beta - \cos\alpha}, \qquad z = \frac{c\operatorname{sh}\beta}{\operatorname{ch}\beta - \cos\alpha},$$

где c — постоянный множитель $0 \leqslant \alpha < \beta$, $-\infty < \beta < \infty$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

Эти формулы можно представить в компактной форме:

$$z + i\rho = c\,i\operatorname{ctg}\frac{\alpha + i\beta}{2} \qquad \left(\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

Координатные поверхности суть: веретенообразные поверхности вращения $\alpha = \text{const}$:

$$(\rho - c\operatorname{ctg}\alpha)^2 + z^2 = \left(\frac{c}{\sin\alpha}\right)^2,$$

сферы $\beta=\text{const}$:

$$\rho^2+(z-c\operatorname{ctg}\beta)^2=\left(\frac{c}{\operatorname{sh}\beta}\right)^2,$$

плоскости $\rho=\text{const}$.

Выражение для квадрата линейного элемента в пространственных биполярных координатах имеет вид

$$ds^2=\frac{c^2}{(\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha)^2}[d\alpha^2+d\beta^2+\sin^2\alpha\,d\varphi^2],$$

откуда следует

$$h_1=h_2=\frac{c}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha},\qquad h_3=\frac{c\sin\alpha}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha},$$

и уравнение Лапласа принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\sin\alpha}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\sin\alpha}{\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)+\frac{1}{\sin\alpha\,(\operatorname{ch}\beta-\cos\alpha)}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0.$$

При решении уравнения Лапласа удобна подстановка

$$u=\sqrt{2\operatorname{ch}\beta-2\cos\alpha}\;v.$$

Тогда для функции v получается уравнение

$$v_{\alpha\alpha}+v_{\beta\beta}+v_\alpha\operatorname{ctg}\alpha-\frac{1}{4}v+\frac{1}{\sin^2\alpha}v_{\varphi\varphi}=0.$$

10. Сфероидальные координаты.

а) Вытянутые сфероидальные координаты

$$x_1=\lambda,\quad x_2=\mu,\quad x_3=\varphi,$$

$$x=c\lambda\mu,\quad y=c\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}\cos\varphi,\quad z=c\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}\sin\varphi,$$

$$\lambda\geqslant 1,\qquad -1\leqslant\mu\leqslant 1,\qquad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,$$

$$h_1=c\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2-1}},\quad h_2=c\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{1-\mu^2}},\quad h_3=c\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}.$$

б) Сплюснутые сфероидальные координаты

$$x_1=\lambda,\quad x_2=\mu,\quad x_3=\varphi,$$

$$x=c\lambda\mu\sin\varphi,\quad y=c\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)},\qquad z=c\lambda\mu\cos\varphi.$$

Поверхности $\lambda=\text{const}$—сплюснутые сфероиды, $\mu=\text{const}$—однополостные гиперболоиды. Метрические коэффициенты

$$h_1=c\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2-1}},\qquad h_2=c\sqrt{\frac{\lambda^2-\mu^2}{1-\mu^2}},\qquad h_3=c\lambda\mu.$$

11. Параболоидные координаты. Переменные

$$x_1=\lambda, \quad x_2=\mu, \quad x_3=\varphi,$$

определяемые соотношениями

$$x=\lambda\mu\cos\varphi, \quad y=\lambda\mu\sin\varphi, \quad z=\frac{1}{2}(\lambda^2-\mu^2),$$

называются параболоидными координатами. Метрические коэффициенты равны $h_1=h_2=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}$, $h_3=\lambda\mu$.

Координатные поверхности $\lambda=\mathrm{const}$, $\mu=\mathrm{const}$ являются параболоидами вращения вокруг оси симметрии Oz.