ГЛАВА I

КЛАССИФИКАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Многие задачи математической физики приводят к дифференциальным уравнениям с частными производными. Наиболее часто встречаются дифференциальные уравнения 2-го порядка. В настоящей главе мы рассмотрим классификацию этих уравнений.

§ 1. Классификация уравнений с частными производными 2-го порядка

1. Дифференциальные уравнения с двумя независимыми переменными. Дадим необходимые определения.

Уравнением с частными производными 2-го порядка с двумя независимыми переменными x, y называется соотношение между неизвестной функцией $u(x, y)$ и ее частными производными до 2-го порядка включительно[1]:

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0.$$

Аналогично записывается уравнение и для большего числа независимых переменных.

Уравнение называется *линейным относительно старших производных*, если оно имеет вид

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F_1(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \tag{1}$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} являются функциями x и y.

Если коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22} зависят не только от x и y, а являются, подобно F_1, функциями x, y, u, u_x, u_y, то такое уравнение называется *квазилинейным*.

Уравнение называется *линейным*, если оно линейно как относительно старших производных u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, так и относительно функции u и ее первых производных u_x, u_y:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0, \tag{2}$$

---

[1]) Мы пользуемся следующими обозначениями для производных:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ и т. д.}$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f — функции только x и y. Если коэффициенты уравнения (2) не зависят от x и y, то оно представляет собой линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Уравнение называется однородным, если $f(x, y) = 0$.

С помощью преобразования переменных

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

допускающего обратное преобразование, мы получаем новое уравнение, эквивалентное исходному. Естественно поставить вопрос: как выбрать ξ и η, чтобы уравнение в этих переменных имело наиболее простую форму?

В этом пункте мы дадим ответ на поставленный вопрос для уравнений, линейных относительно старших производных вида (1) с двумя независимыми переменными x и y:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

Преобразуя производные к новым переменным, получаем:

$$\left.\begin{aligned}
u_x &= u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x,\\
u_y &= u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y,\\
u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx},\\
u_{xy} &= u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy},\\
u_{yy} &= u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy}.
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Подставляя значения производных из (3) в уравнение (1), будем иметь:

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \bar{F} = 0, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{11} &= a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2,\\
\bar{a}_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + a_{22}\xi_y\eta_y,\\
\bar{a}_{22} &= a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2,
\end{aligned}$$

а функция $\bar{F}$ не зависит от вторых производных. Заметим, что если исходное уравнение линейно, т. е.

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = b_1u_x + b_2u_y + cu + f,$$

то $\bar{F}$ имеет вид

$$\bar{F}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = \beta_1u_\xi + \beta_2u_\eta + \gamma u + \delta,$$

т. е. уравнение остается линейным[1]).

[1]) Отметим, что если преобразование переменных линейно, то $\bar{F} = F$, так как вторые производные от ξ и η в формулах (3) равны нулю и $\bar{F}$ не получает дополнительных слагаемых от преобразования вторых производных.

Выберем переменные ξ и η так, чтобы коэффициент $\bar{a}_{11}$ был равен нулю. Рассмотрим уравнение с частными производными 1-го порядка

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_x z_y + a_{22}z_y^2 = 0. \tag{5}$$

Пусть $z = \varphi(x, y)$ — какое-нибудь частное решение этого уравнения. Если положить $\xi = \varphi(x, y)$, то коэффициент $\bar{a}_{11}$, очевидно, будет равен нулю. Таким образом, упомянутая выше задача о выборе новых независимых переменных связана с решением уравнения (5).

Докажем следующие леммы.

1. *Если $z = \varphi(x, y)$ является частным решением уравнения*

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_x z_y + a_{22}z_y^2 = 0,$$

то соотношение $\varphi(x, y) = C$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения

$$a_{11}\,dy^2 - 2a_{12}\,dx\,dy + a_{22}\,dx^2 = 0. \tag{6}$$

2. *Если $\varphi(x, y) = C$ представляет собой общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения*

$$a_{11}\,dy^2 - 2a_{12}\,dx\,dy + a_{22}\,dx^2 = 0,$$

то функция $z = \varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению (5).

Докажем первую лемму. Поскольку функция $z = \varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению (5), то равенство

$$a_{11}\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22} = 0 \tag{7}$$

является тождеством: оно удовлетворяется для всех x, y в той области, где задано решение. Соотношение $\varphi(x, y) = C$ является общим интегралом уравнения (6), если функция y, определенная из неявного соотношения $\varphi(x, y) = C$, удовлетворяет уравнению (6). Пусть

$$y = f(x, C)$$

есть эта функция; тогда

$$\frac{dy}{dx} = -\left[\frac{\varphi_x(x, y)}{\varphi_y(x, y)}\right]_{y=f(x, C)}, \tag{8}$$

где скобки и значок $y = f(x, C)$ указывают, что в правой части равенства (8) переменная y не является независимой переменной, а имеет значение, равное $f(x, C)$. Отсюда следует, что $y = f(x, C)$ удовлетворяет уравнению (6), так как

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} =$$

$$= \left[a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22}\right]_{y=f(x, C)} = 0,$$

поскольку выражение в квадратных скобках равно нулю при всех значениях x, y, а не только при $y = f(x, C)$.

Докажем вторую лемму. Пусть $\varphi(x, y) = C$ — общий интеграл уравнения (6). Докажем, что

$$a_{11}\varphi_x^2 + 2a_{12}\varphi_x\varphi_y + a_{22}\varphi_y^2 = 0 \tag{7'}$$

для любой точки (x, y). Пусть (x_0, y_0) — какая-нибудь заданная точка. Если мы докажем, что в ней удовлетворяется равенство (7′), то отсюда в силу произвольности (x_0, y_0) будет следовать, что равенство (7′) есть тождество и функция $\varphi(x, y)$ является решением уравнения (7′). Проведем через точку (x_0, y_0) интегральную кривую уравнения (6), полагая $\varphi(x_0, y_0) = C_0$ и рассматривая кривую $y = f(x, C_0)$. Очевидно, что $y_0 = f(x_0, C_0)$. Для всех точек этой кривой имеем:

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = \\ = \left[a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22}\right]_{y=f(x,\,C_0)} = 0.$$

Полагая в последнем равенстве $x = x_0$, получим:

$$a_{11}\varphi_x^2(x_0y_0) + 2a_{12}\varphi_x(x_0y_0)\,\varphi_y(x_0y_0) + a_{22}\varphi_y^2(x_0y_0) = 0,$$

что и требовалось доказать[1]).

Уравнение (6) называется *характеристическим* для уравнения (1), а его интегралы — *характеристиками*.

Полагая $\xi = \varphi(x, y)$, где $\varphi(x, y) = \text{const}$ есть общий интеграл уравнения (6), мы обращаем в нуль коэффициент при $u_{\xi\xi}$. Если $\psi(x, y) = \text{const}$ является другим общим интегралом уравнения (6), не зависимым от $\varphi(x, y)$, то, полагая $\eta = \psi(x, y)$, мы обратим в нуль также и коэффициент при $u_{\eta\eta}$.

Уравнение (6) распадается на два уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}, \tag{9}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \tag{10}$$

---

[1]) Установленная связь уравнений (5) и (6) эквивалентна известной связи (см. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, 1937, стр. 287; Смирнов, Курс высшей математики, т. II, 1948, стр. 78) между линейным уравнением с частными производными 1-го порядка и системой обыкновенных дифференциальных уравнений. В этом можно убедиться, разлагая левую часть уравнения (5) в произведение двух линейных дифференциальных выражений.

Знак подкоренного выражения определяет тип уравнения

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F = 0. \qquad (1)$$

Это уравнение мы будем называть в точке M уравнением

гиперболического типа, если в точке M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$,
эллиптического типа, если в точке M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$,
параболического типа, если в точке M $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ [1]).

Нетрудно убедиться в правильности соотношения

$$\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})D^2, \quad D = \xi_x\eta_y - \eta_x\xi_y,$$

из которого следует инвариантность типа уравнения при преобразовании переменных, так как функциональный определитель (якобиан) D преобразования переменных отличен от нуля. В различных точках области определения уравнение может принадлежать различным типам.

Рассмотрим область G, во всех точках которой уравнение имеет один и тот же тип. Через каждую точку области G проходят две характеристики, причем для уравнений гиперболического типа характеристики действительны и различны, для уравнений эллиптического типа — комплексны и различны, а для уравнений параболического типа обе характеристики действительны и совпадают между собой.

Разберем каждый из этих случаев в отдельности.

1. Для уравнения гиперболического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ и правые части уравнений (9) и (10) действительны и различны. Общие интегралы их $\varphi(x, y) = C$ и $\psi(x, y) = C$ определяют действительные семейства характеристик. Полагая

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y), \qquad (11)$$

приводим уравнение (4) после деления на коэффициент при $u_{\xi\eta}$ к виду

$$u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta), \quad \text{где} \quad \Phi = -\frac{\bar{F}}{2\bar{a}_{12}}.$$

Это — так называемая каноническая форма уравнений гиперболического типа [2]). Часто пользуются второй канонической

---

[1]) Эта терминология заимствована из теории кривых 2-го порядка.

[2]) Для того чтобы было возможно введение новых переменных ξ и η через функции φ и ψ, надо убедиться в независимости этих функций, достаточным условием чего является отличие от нуля соответствующего функционального определителя. Пусть функциональный определитель

$$\begin{vmatrix} \varphi_x & \psi_x \\ \varphi_y & \psi_y \end{vmatrix}$$

в некоторой точке M обращается в нуль. Тогда имеет место пропорциональформой. Положим

$$\xi=\alpha+\beta, \quad \eta=\alpha-\beta,$$

т. е.

$$\alpha=\frac{\xi+\eta}{2}, \quad \beta=\frac{\xi-\eta}{2},$$

где α и β — новые переменные. Тогда

$$u_\xi=\frac{1}{2}(u_\alpha+u_\beta), \quad u_\eta=\frac{1}{2}(u_\alpha-u_\beta), \quad u_{\xi\eta}=\frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha}-u_{\beta\beta}).$$

В результате уравнение (4) примет вид

$$u_{\alpha\alpha}-u_{\beta\beta}=\Phi_1 \qquad (\Phi_1=4\Phi).$$

2. Для уравнений параболического типа $a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0$, уравнения (9) и (10) совпадают, и мы получаем один общий интеграл уравнения (6): $\varphi(x, y)=\mathrm{const}$. Положим в этом случае

$$\xi=\varphi(x, y) \quad \text{и} \quad \eta=\eta(x, y),$$

где $\eta(x, y)$ — любая функция, не зависимая от φ. При таком выборе переменных коэффициент

$$\bar{a}_{11}=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2=\left(\sqrt{a_{11}}\,\xi_x+\sqrt{a_{22}}\,\xi_y\right)^2=0,$$

так как $a_{12}=\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$; отсюда следует, что

$$\bar{a}_{12}=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_y=$$
$$=\left(\sqrt{a_{11}}\,\xi_x+\sqrt{a_{22}}\,\xi_y\right)\left(\sqrt{a_{11}}\,\eta_x+\sqrt{a_{22}}\,\eta_y\right)=0.$$

После деления уравнения (4) на коэффициент при $u_{\eta\eta}$ получим каноническую форму для уравнения параболического типа

$$u_{\eta\eta}=\Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) \quad \left(\Phi=-\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}}\right).$$

ность строк, т. е.

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y}=\frac{\psi_x}{\psi_y},$$

что, однако, невозможно, так как

$$\frac{\varphi_x}{\varphi_y}=-\frac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \quad \text{и} \quad \frac{\psi_x}{\psi_y}=-\frac{a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$
$$\left(a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0\right)$$

(при этом мы считаем $a_{11}\neq 0$, что не является ограничением общности). Тем самым независимость функций φ и ψ установлена.

Если в правую часть не входит u_ξ, то это уравнение будет обыкновенным дифференциальным уравнением, зависящим от ξ как от параметра.

3. Для уравнения эллиптического типа $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ и правые части уравнений (9) и (10) комплексны. Пусть

$$\varphi(x, y) = C$$

— комплексный интеграл уравнения (9). Тогда

$$\varphi^*(x, y) = C,$$

где φ^* — сопряженная к φ функция, будет представлять собой общий интеграл сопряженного уравнения (10). Перейдем к комплексным переменным, полагая

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \varphi^*(x, y).$$

При этом уравнение эллиптического типа приводится к такому же виду, что и гиперболическое.

Чтобы не иметь дела с комплексными переменными, введем новые переменные α и β, равные

$$\alpha = \frac{\varphi + \varphi^*}{2}, \quad \beta = \frac{\varphi - \varphi^*}{2i},$$

так что

$$\xi = \alpha + i\beta, \quad \eta = \alpha - i\beta.$$

В этом случае

$$a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2 =$$
$$= (a_{11}\alpha_x^2 + 2a_{12}\alpha_x\alpha_y + a_{22}\alpha_y^2) - (a_{11}\beta_x^2 + 2a_{12}\beta_x\beta_y + a_{22}\beta_y^2) +$$
$$+ 2i(a_{11}\alpha_x\beta_x + a_{12}(\alpha_x\beta_y + \alpha_y\beta_x) + a_{22}\alpha_y\beta_y) = 0,$$

т. е.

$$\bar{a}_{11} = \bar{a}_{22} \quad \text{и} \quad \bar{a}_{12} = 0.$$

Уравнение (4) после деления на коэффициент при $u_{\alpha\alpha}$ принимает вид [1])

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \Phi(\alpha, \beta, u, u_\alpha, u_\beta) \qquad \left(\Phi = -\frac{\bar{F}}{\bar{a}_{22}}\right).$$

Таким образом, в зависимости от знака выражения $a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ имеют место следующие канонические формы

---

[1]) Подобное преобразование законно только в том случае, если коэффициенты уравнения (1) — аналитические функции. Действительно, если $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, то правые части уравнений (9) и (10) комплексны, а следовательно, функция y должна иметь комплексные значения. О решении этих уравнений можно говорить лишь в том случае, когда коэффициенты $a_{ik}(x, y)$ определены для комплексных значений y. При приведении уравнения эллиптического типа к канонической форме мы ограничимся случаем аналитических коэффициентов.

уравнения (1):

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ (гиперболический тип) $u_{xx} - u_{yy} = \Phi$ или $u_{xy} = \Phi$,

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ (эллиптический тип) $u_{xx} + u_{yy} = \Phi$,

$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ (параболический тип) $u_{xx} = \Phi$.

2. Классификация уравнений 2-го порядка со многими независимыми переменными. Рассмотрим линейное уравнение с действительными коэффициентами

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu + f = 0 \qquad (a_{ij} = a_{ji}), \tag{12}$$

где a, b, c, f являются функциями $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Введем новые независимые переменные ξ_k, полагая

$$\xi_k = \xi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Тогда

$$u_{x_i} = \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k}\alpha_{ik}, \qquad u_{x_i x_j} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} u_{\xi_k \xi_l}\alpha_{ik}\alpha_{jl} + \sum_{k=1}^{n} u_{\xi_k}(\xi_k)_{x_i x_j},$$

где

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i}.$$

Подставляя выражения для производных в исходное уравнение, получим:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \bar{a}_{kl}u_{\xi_k\xi_l} + \sum_{k=1}^{n} \bar{b}_k u_{\xi_k} + cu + f = 0,$$

где

$$\bar{a}_{kl} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_{ik}\alpha_{jl}, \qquad \bar{b}_k = \sum_{i=1}^{n} b_i\alpha_{ik} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\xi_k)_{x_i x_j}.$$

Рассмотрим квадратическую форму

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^0 y_i y_j, \tag{13}$$

коэффициенты которой равны коэффициентам a_{ij} исходного уравнения в некоторой точке $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Производя над переменными y линейное преобразование

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\eta_k,$$

получим для квадратической формы новое выражение:

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \bar{a}_{kl}^0\eta_k\eta_l, \quad \text{где} \quad \bar{a}_{kl}^0 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^0\alpha_{ik}\alpha_{jl}.$$

Таким образом, коэффициенты главной части уравнения изменяются аналогично коэффициентам квадратической формы при линейном преобразовании.

Как известно, выбором соответствующего линейного преобразования можно привести матрицу (a_{ij}^0) квадратической формы к диагональному виду, в котором

$$|\bar{a}_{ii}^0| = 1, \text{ либо } 0;$$
$$\bar{a}_{ij}^0 = 0 \qquad (i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots n).$$

Согласно закону инерции, число положительных, отрицательных и равных нулю коэффициентов $\bar{a}_{ii}^0$ в каноническом виде квадратичной формы инвариантно относительно линейного преобразования.

Назовем уравнение (12) в точке M_0 уравнением эллиптического типа, если все n коэффициентов $\bar{a}_{ii}^0$ одного знака; гиперболического типа (или нормального гиперболического типа), если $n-1$ коэффициентов $\bar{a}_{ii}^0$ имеют одинаковый знак, а один коэффициент противоположен им по знаку; ультрагиперболического типа, если среди $\bar{a}_{ii}^0$ имеется m коэффициентов одного знака и $n-m$ противоположного знака $(m, n-m > 1)$; параболического типа, если хотя бы один из коэффициентов $\bar{a}_{ii}^0$ равен нулю.

Выбирая новые независимые переменные ξ_i так, чтобы в точке M_0

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = \alpha_{ik}^0,$$

где α_{ik}^0 — коэффициенты преобразования, приводящего квадратическую форму (13) к каноническому виду (например, полагая $\xi_k = \sum \alpha_{ik}^{(0)} x_i$), получим, что в точке M_0 уравнение в зависимости от типа приводится к одной из следующих канонических форм:

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \ldots + u_{x_nx_n} + \Phi = 0 \text{ (эллиптический тип)},$$

$$u_{x_1x_1} = \sum_{i=2}^{n} u_{x_ix_i} + \Phi \qquad \text{(гиперболический тип)},$$

$$\sum_{i=1}^{m} u_{x_ix_i} = \sum_{i=m+1}^{n} u_{x_ix_i} + \Phi \quad (m > 1, \ n-m > 1)$$
$$\text{(ультрагиперболический тип)},$$

$$\sum_{i=1}^{n-m} (\pm u_{x_ix_i}) + \Phi = 0 \quad (m > 0) \qquad \text{(параболический тип)}.$$

Мы не останавливаемся при этом на более подробном делении уравнений параболического типа на уравнения эллиптически-параболические, гиперболически-параболические и т. д.

Таким образом, если уравнение (12) в некоторой точке M принадлежит к определенному типу, то его можно привести к соответствующей канонической форме в этой точке.

Рассмотрим подробнее вопрос о том, можно ли привести уравнение к канонической форме в некоторой окрестности точки M, если во всех точках этой окрестности уравнение принадлежит к одному и тому же типу.

Для приведения уравнения в некоторой области к каноническому виду нам пришлось бы функции $\xi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ подчинить дифференциальным соотношениям $\bar{a}_{kl} = 0$, для $k \neq l$. Число этих условий, равное $n(n-1)/2$, превосходит n — число определяемых функций ξ при $n > 3$. Для $n = 3$ недиагональные элементы матрицы $(\bar{a}_{ik})$, вообще говоря, можно было бы обратить в нули, но при этом диагональные элементы могут оказаться различными.

Следовательно, при $n \geqslant 3$ уравнение нельзя привести к каноническому виду в окрестности точки M. При $n = 2$ можно обратить в нуль единственный недиагональный коэффициент и удовлетворить условию равенства двух диагональных коэффициентов, что и было сделано в п. 1.

Если коэффициенты уравнения (12) постоянны, то, приводя (12) к канонической форме в одной точке M, мы получим уравнение, приведенное к канонической форме во всей области определения уравнения.

3. Канонические формы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. В случае двух независимых переменных линейное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f(x, y) = 0. \tag{14}$$

Ему соответствует характеристическое уравнение с постоянными коэффициентами. Поэтому характеристики будут прямыми линиями

$$y = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x + C_1, \qquad y = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}x + C_2.$$

С помощью соответствующего преобразования переменных уравнение (14) приводится к одной из простейших форм:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu + f = 0 \quad \text{(эллиптический тип)}, \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} &u_{\xi\eta} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu + f = 0 \\ &\text{или} \\ &u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu + f = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{(гиперболический тип)}, \tag{16}$$

$$u_{\xi\xi} + b_1u_\xi + b_2u_\eta + cu + f = 0 \quad \text{(параболический тип)}. \tag{17}$$

Для дальнейшего упрощения введем вместо u новую функцию v:

$$u = e^{\lambda\xi+\mu\eta}\cdot v,$$

где λ и μ — неопределенные пока постоянные. Тогда

$$\begin{aligned}
u_\xi &= e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_\xi + \lambda v),\\
u_\eta &= e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_\eta + \mu v),\\
u_{\xi\xi} &= e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\xi\xi} + 2\lambda v_\xi + \lambda^2 v),\\
u_{\xi\eta} &= e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\xi\eta} + \lambda v_\eta + \mu v_\xi + \lambda\mu v),\\
u_{\eta\eta} &= e^{\lambda\xi+\mu\eta}(v_{\eta\eta} + 2\mu v_\eta + \mu^2 v).
\end{aligned}$$

Подставляя выражения для производных в уравнение (15) и сокращая затем на $e^{\lambda\xi+\mu\eta}$, получим:

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + (b_1 + 2\lambda)v_\xi + (b_2 + 2\mu)v_\eta + \\ + (\lambda^2 + \mu^2 + b_1\lambda + b_2\mu + c)v + f_1 = 0.$$

Параметры λ и μ выбираем так, чтобы два коэффициента, например, при первых производных, обратились в нуль ($\lambda = -b_1/2$; $\mu = -b_2/2$). В результате получим:

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 = 0,$$

где γ — постоянная, выражающаяся через c, b_1 и b_2, $f_1 = fe^{-(\lambda\xi+\mu\eta)}$. Производя аналогичные операции и для случаев (16) и (17), приходим к следующим каноническим формам для уравнений с постоянными коэффициентами:

$$v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 = 0 \quad \text{(эллиптический тип)},$$

$$\left.\begin{array}{r} v_{\xi\eta} + \gamma v + f_1 = 0 \\ \text{или} \quad v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} + \gamma v + f_1 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{(гиперболический тип)},$$

$$v_{\xi\xi} + b_2 v_\eta + f_1 = 0 \quad \text{(параболический тип)}.$$

Как было отмечено в п. 2, уравнение с постоянными коэффициентами в случае нескольких независимых переменных

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu + f = 0$$

при помощи линейного преобразования переменных приводится к каноническому виду одновременно для всех точек области его определения. Вводя вместо u новую функцию v

$$u = ve^{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\dots+\lambda_nx_n}$$

и выбирая нужным способом λ_i, мы можем дальше упростить уравнение, что приводит нас к каноническим формам, сходным со случаем $n = 2$.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ I

1. Найти области гиперболичности, эллиптичности и параболичности уравнения

$$u_{xx} + yu_{yy} = 0$$

и привести его к каноническому виду в области гиперболичности.

2. Привести к каноническому виду уравнения:

а) $u_{xx} + xyu_{yy} = 0$.

б) $yu_{xx} - xu_{yy} + u_x + yu_y = 0$.

в) $e^{2x}u_{xx} + 2e^{x+y}u_{xy} + e^{2y}u_{yy} = 0$.

г) $u_{xx} + (1 + y)^2 u_{yy} = 0$.

д) $xu_{xx} + 2\sqrt{xy}\, u_{xy} + yu_{yy} - u_x = 0$.

е) $(x - y)\, u_{xx} + (xy - y^2 - x + y)\, u_{xy} = 0$.

ж) $y^2u_{xx} - e^{2x}u_{yy} + u_x = 0$.

з) $\sin^2 y u_{xx} - e^{2x}u_{yy} + 3u_x - 5u = 0$.

и) $u_{xx} + 2u_{xy} + 4u_{yy} + 2u_x + 3u_y = 0$.

3. Привести к каноническому виду и максимально упростить уравнение

$$au_{xx} + 2au_{xy} + au_{yy} + bu_x + cu_y + u = 0; \quad a,b,c \text{ — постоянные.}$$

4. Введя функцию $v = ue^{\lambda x + \mu y}$ и выбирая соответствующим образом параметры λ и μ, упростить следующие уравнения с постоянными коэффициентами:

а) $u_{xx} + u_{yy} + \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u = 0$.

б) $u_{xx} = \dfrac{1}{a^2} u_y + \alpha u + \beta u_x$.

в) $u_{xx} - \dfrac{1}{a^2} u_{yy} = \alpha u_x + \beta u_y + \gamma u$.

г) $u_{xy} = \alpha u_x + \beta u_y$.