ГЛАВА II

УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Уравнения с частными производными 2-го порядка гиперболического типа наиболее часто встречаются в физических задачах, связанных с процессами колебаний. Простейшее уравнение гиперболического типа

$$u_{xx} - u_{yy} = 0$$

обычно называют уравнением колебаний струны. В настоящей главе, как и в последующих, мы ограничимся рассмотрением класса линейных уравнений.

§ 1. Простейшие задачи, приводящие к уравнениям гиперболического типа. Постановка краевых задач

1. Уравнение малых поперечных колебаний струны. Каждую точку струны длины l можно охарактеризовать значением ее абсциссы x. Описание процесса колебания струны может быть проведено при помощи задания положения точек струны в различные моменты времени. Для определения положения струны в момент времени t достаточно задать компоненты вектора смещения $\{u_1(x,t),\ u_2(x,t),\ u_3(x,t)\}$ точки x в момент t.

Мы рассмотрим наиболее простую задачу о колебаниях струны. Будем предполагать, что смещения струны лежат в одной плоскости (x, u) и что вектор смещения u перпендикулярен в любой момент к оси x; тогда процесс колебания можно описать одной функцией $u(x,t)$, характеризующей вертикальное перемещение струны. Будем рассматривать струну как гибкую упругую нить. Математическое выражение понятия гибкости заключается в том, что напряжения, возникающие в струне, всегда направлены по касательным к ее мгновенному профилю (рис. 1). Это условие выражает собой то, что струна не сопротивляется изгибу.

Величина натяжения, возникающего в струне вследствие упругости, может быть вычислена по закону Гука[1]). Будем рассматривать малые колебания струны и пренебрегать квадратом u_x по сравнению с единицей.

---

[1]) С. П. Стрелков, Механика, «Наука», 1965.

Пользуясь этим условием, подсчитаем удлинение, испытываемое участком струны (x_1, x_2). Длина дуги этого участка равна

$$S' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+(u_x)^2}\,dx \cong x_2 - x_1 = S.$$

Таким образом, в пределах принятой нами точности удлинения участков струны в процессе колебания не происходит; отсюда

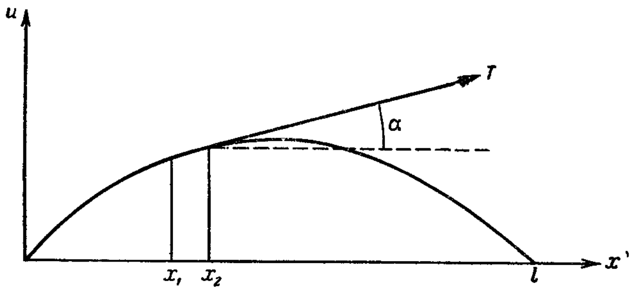

Рис. 1.

в силу закона Гука следует, что величина натяжения T в каждой точке не меняется со временем. Покажем также, что натяжение не зависит и от x, т. е.

$$T(x) = T_0 = \text{const}.$$

Найдем проекции натяжения на оси x и u (обозначим их T_x и T_u):

$$T_x(x) = T(x)\cos\alpha = \frac{T}{\sqrt{1+(u_x)^2}} \cong T(x),$$

$$T_u(x) = T(x)\sin\alpha \cong T(x)\operatorname{tg}\alpha = T(x)\,u_x,$$

где α — угол касательной к кривой $u(x,t)$ с осью x. На участок (x_1, x_2) действуют силы натяжения, внешние силы и силы инерции. Сумма проекций всех сил на ось x должна быть равна нулю (мы рассматриваем только поперечные колебания). Так как силы инерции и внешние силы по предположению направлены вдоль оси u, то

$$T_x(x_2) - T_x(x_1) = 0 \quad \text{или} \quad T(x_1) = T(x_2). \tag{1}$$

Отсюда в силу произвольности x_1 и x_2 следует, что натяжение не зависит от x, т. е. для всех значений x и t

$$T(x) \equiv T_0. \tag{2}$$

После сделанных предварительных замечаний перейдем к выводу уравнения поперечных колебаний струны. Воспользуемся вторым законом Ньютона. Составляющая количества движения участка струны (x_1, x_2) по оси u равна

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t(\xi, t)\,\rho(\xi)\,d\xi,$$

где ρ — линейная плотность струны. Приравняем изменение количества движения за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi)\,[u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)]\,d\xi$$

импульсу действующих сил, складывающихся из натяжения

$$T_0 u_x|_{x=x} - T_0 u_x|_{x=x}$$

в точках x_2 и x_1 и внешней силы, которую будем считать непрерывно распределенной с плотностью (нагрузкой) $F(x, t)$, рассчитанной на единицу длины. В результате получим уравнение поперечных колебаний элемента струны в интегральной форме

$$\int_{x_1}^{x_2} [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)]\,\rho(\xi)\,d\xi =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} T_0\,[u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)]\,d\tau + \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau. \qquad (3)$$

Для перехода к дифференциальному уравнению предположим существование и непрерывность вторых производных от $u(x, t)$[1]. Тогда формула (3) после двукратного применения теоремы о среднем примет вид

$$u_{tt}(\xi^*, t^*)\,\rho(\xi^*)\,\Delta t\,\Delta x = \{T_0\,[u_{xx}(\xi^{**}, t^{**})] + F(\xi^{***}, t^{***})\}\,\Delta t\,\Delta x,$$

где

$$\xi^*,\ \xi^{**},\ \xi^{***} \in (x_1, x_2), \text{ а } t^*,\ t^{**},\ t^{***} \in (t_1, t_2).$$

---

[1]) Делая предположение о двукратной дифференцируемости функций, мы фактически уславливаемся о том, что будем рассматривать лишь функции, обладающие этим свойством. Таким образом, подобного типа предположение связано с ограничением круга изучаемых физических явлений и не содержит в себе утверждения, что не существует функций, удовлетворяющих интегральному уравнению колебаний и не имеющих вторых производных. Такие функции существуют и представляют значительный практический интерес. Подробнее см. об этом § 2, п. 7.

Сократив на $\Delta x \Delta t$ и переходя к пределу при $x_2 \to x_1$, $t_2 \to t_1$, получим дифференциальное уравнение поперечных колебаний струны

$$T_0 u_{xx} = \rho u_{tt} - F(x, t). \tag{4}$$

В случае постоянной плотности $\rho = \text{const}$ этому уравнению обычно придают вид

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad \left(a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}\right), \tag{5}$$

где

$$f(x, t) = \frac{1}{\rho} F(x, t) \tag{6}$$

есть плотность силы, отнесенная к единице массы. При отсутствии внешней силы получим однородное уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

или

$$u_{xx} - u_{yy} = 0 \quad (y = at),$$

описывающее свободные колебания струны. Это уравнение является простейшим примером уравнения гиперболического типа.

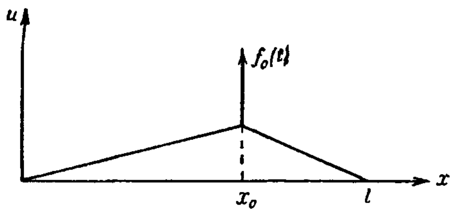

Рис. 2.

Если в точке $x_0 (x_1 < x_0 < x_2)$ приложена сосредоточенная сила $f_0(t)$ (рис. 2), то уравнение (3) запишется так:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi)\,[u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)]\,d\xi - \int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} f(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} T_0\,[u_x(x_2, \tau) - u_x(x_1, \tau)]\,d\tau + \int_{t_1}^{t_2} f_0(\tau)\,d\tau.$$

Поскольку скорости точек струны ограничены, то при $x_1 \to x_0$ и $x_2 \to x_0$ интегралы в левой части этого равенства стремятся к нулю, и равенство (3) принимает вид

$$\int_{t_1}^{t_2} T_0\,[u_x(x_0 + 0, \tau) - u_x(x_0 - 0, \tau)]\,d\tau = -\int_{t_1}^{t_2} f_0(\tau)\,d\tau. \tag{7}$$

Пользуясь теоремой о среднем, сокращая обе части равенства на Δt и переходя к пределу при $t_2 \to t_1$, получим:

$$u_x(x, t)\Big|_{x_0-0}^{x_0+0} = -\frac{1}{T_0} f_0(t).$$

Отсюда видно, что в точке приложения сосредоточенной силы первые производные претерпевают разрыв и дифференциальное уравнение теряет смысл. В этой точке должны выполняться два условия сопряжения

$$\left.\begin{aligned} u(x_0+0,\ t) &= u(x_0-0,\ t), \\ u_x(x_0+0,\ t) - u_x(x_0-0,\ t) &= -\frac{1}{T_0} f_0(t), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

первое из которых выражает непрерывность струны, второе определяет величину излома струны в точке x_0, зависящую от $f_0(t)$ и натяжения T_0.

2. Уравнение продольных колебаний стержней и струн. Уравнения продольных колебаний для струны, стержня и пружины записываются одинаково. Рассмотрим стержень, расположенный на отрезке $(0,\ l)$ оси x. Процесс продольных колебаний может быть описан одной функцией $u(x, t)$, представляющей в момент t смещение точки, имевшей в положении равновесия абсциссу x[1]. При продольных колебаниях это смещение происходит вдоль стержня. При выводе уравнения будем предполагать, что натяжения, возникающие в процессе колебания, следуют закону Гука.

Подсчитаем относительное удлинение элемента $(x,\ x+\Delta x)$ в момент t. Координаты концов этого элемента в момент t имеют значения

$$x + u(x,\ t),\quad x + \Delta x + u(x+\Delta x,\ t),$$

а относительное удлинение равно

$$\frac{[\Delta x + u(x+\Delta x,\ t) - u(x,\ t)] - \Delta x}{\Delta x} = u_x(x + \theta\,\Delta x,\ t)$$

$$(0 \leqslant \theta \leqslant 1).$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим, что относительное удлинение в точке x определяется функцией $u_x(x, t)$. В силу

[1]) Выбранная здесь геометрическая переменная x называется переменной Лагранжа. В переменных Лагранжа каждая физическая точка стержня в течение всего процесса характеризуется одной и той же геометрической координатой x. Физическая точка, занимавшая в начальный момент (в состоянии равновесия) положение x, в любой последующий момент t находится в точке с координатой $X = x + u(x, t)$. Если мы фиксируем некоторую геометрическую точку A с координатой X, то в различные моменты времени в этой точке будут находиться различные физические точки (с разными лагранжевыми координатами x). Часто пользуются также переменными Эйлера X, t, где X — геометрическая координата. Если $U(X, t)$ — смещение точки с эйлеровой координатой X, то лагранжева координата

$$x = X - U(X,\ t).$$

Пример использования координат Эйлера приведен в п. 6

закона Гука натяжение $T(x, t)$ равно

$$T(x, t) = k(x)\, u_x(x, t), \tag{9}$$

где $k(x)$ — модуль Юнга в точке $x\,(k(x) > 0)$.

Пользуясь теоремой об изменении количества движения, получаем интегральное уравнение колебаний

$$\int_{x_1}^{x_2} [u_t(\xi, t_2) - u_t(\xi, t_1)]\, \rho(\xi)\, d\xi =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} [k(x_2)\, u_x(x_2, \tau) - k(x_1)\, u_x(x_1, \tau)]\, d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau, \tag{10}$$

где $F(x, t)$ — плотность внешней силы, рассчитанная на единицу длины.

Предположим существование и непрерывность вторых производных функции $u(x, t)$. Применяя теорему о среднем и совершая предельный переход[1]) при $\Delta x = x_2 - x_1 \to 0$ и $\Delta t = t_2 - t_1 \to 0$, приходим к дифференциальному уравнению продольных колебаний стержня[2])

$$[k(x)\, u_x]_x = \rho u_{tt} - F(x, t). \tag{11}$$

Если стержень однороден $(k(x) = \text{const},\ \rho = \text{const})$, то это уравнение записывают следующим образом:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \qquad \left(a = \sqrt{\frac{k}{\rho}}\right), \tag{12}$$

где

$$f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho} \tag{13}$$

есть плотность силы, отнесенная к единице массы.

3. Энергия колебаний струны. Найдем выражение для энергии поперечных колебаний струны $E = K + U$, где K — кинетическая и U — потенциальная энергия. Элемент струны dx, движущийся со скоростью $v = u_t$, обладает кинетической энергией

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \rho(x)\, dx\, (u_t)^2 \qquad (m = \rho\, dx).$$

---

[1]) В дальнейшем мы будем опускать подробности, связанные с предельными переходами, которые были разобраны при выводе уравнения поперечных колебаний струны.

[2]) Условие малости колебаний в данном случае связано только с границей применимости закона Гука. В общем случае $T = k(x, u_x)\, u_x$, и мы приходим к квазилинейному уравнению

$$[k(x, u_x)\, u_x]_x = \rho u_{tt}\ F(x, t).$$

Кинетическая энергия всей струны равна

$$K=\frac{1}{2}\int_0^l \rho(x)\,[u_t(x,\ t)]^2\,dx. \qquad (14)$$

Потенциальная энергия поперечных колебаний струны, имеющей при $t=t_0$ форму $u(x,t_0)=u_0(x)$, равна работе, которую надо совершить, чтобы струна перешла из положения равновесия в положение $u_0(x)$. Пусть функция $u(x,t)$ дает профиль струны в момент t, причем

$$u(x,\ 0)=0, \qquad u(x,\ t_0)=u_0(x).$$

Элемент dx под действием равнодействующей сил натяжения

$$T\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+dx}-T\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x}=Tu_{xx}\,dx$$

за время dt проходит путь $u_t(x,t)\,dt$. Работа, производимая всей струной за время dt, равна

$$\left\{\int_0^l T_0u_{xx}u_t\,dx\right\}dt=\left\{T_0u_xu_t\Big|_0^l-\int_0^l T_0u_xu_{xt}\,dx\right\}dt=$$
$$=\left\{-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l T_0(u_x)^2\,dx+T_0u_xu_t\Big|_0^l\right\}dt.$$

Интегрируя по t от 0 до t_0, получаем:

$$-\frac{1}{2}\int_0^l T_0(u_x)^2\,dx\Big|_0^{t_0}+\int_0^{t_0} T_0u_xu_t\Big|_0^l\,dt=$$
$$=-\frac{1}{2}\int_0^l T_0[u_x(x,\ t_0)]^2\,dx+\int_0^{t_0} T_0u_xu_t\Big|_0^l\,dt.$$

Нетрудно выяснить смысл последнего слагаемого правой части этого равенства. Действительно, $T_0u_x|_{x=0}$ есть величина натяжения на конце струны $x=0$; $u_t(0,t)\,dt$ — перемещение этого конца, а интеграл

$$\int_0^{t_0} T_0u_xu_t\,|_{x=0}\,dt \qquad (15)$$

представляет работу, которую надо затратить на перемещение конца $x=0$. Аналогичный смысл имеет слагаемое, соответствующее $x=l$. Если концы струны закреплены, то работа на концах струны будет равна нулю (при этом $u(0,t)=0$,

$u_t(0, t) = 0$). Следовательно, при перемещении закрепленной на концах струны из положения равновесия $u = 0$ в положение $u_0(x)$ работа не зависит от способа перевода струны в это положение и равна

$$-\frac{1}{2}\int_0^l T_0[u_0(x)]^2\,dx, \tag{16}$$

потенциальной энергии струны в момент $t = t_0$ с обратиым знаком. Таким образом, полная энергия струны равна

$$E = \frac{1}{2}\int_0^l [T_0(u_x)^2 + \rho(x)(u_t)^2]\,dx. \tag{17}$$

Совершенно аналогично может быть получено выражение для потенциальной энергии продольных колебаний стержня. Впрочем, его можно получить также, исходя из формулы для потенциальной энергии упругого стержня

$$U = \frac{1}{2}k\left(\frac{l - l_0}{l_0}\right)^2 l_0,$$

где l_0 — начальная длина стержня, l — конечная длина. Отсюда непосредственно следует:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l k(u_x)^2\,dx.$$

4. Вывод уравнения электрических колебаний в проводах. Прохождение электрического тока по проводу с распределенными параметрами характеризуется силой тока i и напряжением v, которые являются функциями положения точки x и времени t. Применяя закон Ома к участку длиной dx, можно написать, что падение напряжения на элементе провода dx равняется сумме электродвижущих сил:

$$-v_x\,dx = iR\,dx + i_tL\,dx, \tag{18}$$

где R и L — сопротивление и коэффициент самоиндукции, рассчитанные на единицу длины.

Количество электричества, притекающее на элемент провода dx за время dt

$$[i(x, t) - i(x + dx, t)]\,dt = -i_x\,dx\,dt, \tag{19}$$

равно сумме количества электричества, необходимого для зарядки элемента dx, и количества, теряющегося вследствие несовершенства изоляции:

$$C[v(x, t + dt) - v(x, t)]\,dx + G\,dx \cdot v\,dt = (Cv_t + Gv)\,dx\,dt, \tag{20}$$

где C и G — коэффициенты емкости и утечки, рассчитанные на единицу длины, причем величину потерь мы считаем пропорциональной напряжению в рассматриваемой точке провода.

Из формул (18), (19) и (20) получаем систему

$$\left.\begin{array}{l} i_x + Cv_t + Gv = 0, \\ v_x + Li_t + Ri = 0, \end{array}\right\} \qquad (21)$$

называемую системой телеграфных уравнений[1]).

Чтобы получить одно уравнение, определяющее функцию i, продифференцируем первое равенство (21) по x, второе — по t, умножив его на C. Производя вычитание в предположении постоянства коэффициентов, найдем:

$$i_{xx} + Gv_x - CLi_{tt} - CRi_t = 0.$$

Заменяя v_x его значением из второго уравнения (21), получим уравнение для силы тока

$$i_{xx} = CLi_{tt} + (CR + GL)\,i_t + GRi. \qquad (22)$$

Аналогично выглядит уравнение для напряжения

$$v_{xx} = CLv_{tt} + (CR + GL)\,v_t + GRv. \qquad (23)$$

Уравнение (22) или (23) называется телеграфным уравнением. Если можно пренебречь потерями через изоляцию и если сопротивление очень мало ($G \cong R \cong 0$), то мы приходим к известному уравнению колебаний

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} \qquad \left(a = \sqrt{\frac{1}{LC}}\right). \qquad (24)$$

5. Поперечные колебания мембраны. Мембраной называется плоская пленка, не сопротивляющаяся изгибу и сдвигу. Рассмотрим мембрану, натянутую на плоский контур C. Будем изучать поперечные колебания мембраны, в которых смещение перпендикулярно к плоскости мембраны.

Пусть ds — элемент дуги некоторого контура, взятого на поверхности мембраны и проходящего через точку $M(x, y)$. На этот элемент действует натяжение, равное $T\,ds$. Вектор T вследствие отсутствия сопротивления изгибу и сдвигу лежит в касательной плоскости к мгновенной поверхности мембраны и перпендикулярен к элементу ds. Можно показать, что отсутствие сопротивления сдвигу приводит к тому, что величина натяжения не зависит от направления элемента ds, так что вектор натяжения $T = T(x, y, z)$ является функцией x, y и t. Эти

---

[1]) Эти уравнения являются приближенными в рамках теории электромагнитного поля, поскольку они не учитывают электромагнитных колебаний в среде, окружающей провод.

свойства вектора $\boldsymbol{T}$ служат математическим выражением отсутствия сопротивления изгибу и сдвигу.

Будем изучать малые колебания мембраны, пренебрегая квадратами первых производных u_x и u_y, где функция $u(x, y, t)$ определяет форму мембраны в момент времени t. Из этого предположения сразу же следует, что $T_h(x, y, t)$ — проекция натяжения на плоскость (x, y) — равна абсолютной величине натяжения. В самом деле, при любой ориентации дуги ds угол γ' между вектором $\boldsymbol{T}$ и плоскостью (x, y) не превосходит угла γ, образуемого нормалью к поверхности мембраны в точке (x, y) с осью z. Поэтому

$$\cos\gamma' \geqslant \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \cong 1,$$

т. е. $\cos\gamma' \cong 1$, и

$$T_h(x, y, z, t) = T\cos\gamma' \cong T(x, y, z, t). \tag{25}$$

Вертикальная составляющая натяжения, очевидно, равна

$$T_u = T\frac{\partial u}{\partial n}.$$

Выделим на поверхности мембраны элемент площади, проекция которого на плоскость (x, y) является прямоугольником $ABCD$ со сторонами, параллельными осям координат (рис. 3). На этот элемент действует сила натяжения, равная

$$\boldsymbol{T}^* = \oint\limits_{ABCD} \boldsymbol{T}\,ds. \tag{26}$$

В силу отсутствия перемещения вдоль осей x и y проекции $\boldsymbol{T}^*$ на эти оси равны нулю:

$$T_x^* = \int\limits_B^C T(x_2, y, t)\,dy - \int\limits_A^D T(x_1, y, t)\,dy =$$
$$= \int\limits_{y_1}^{y_2} \{T(x_2, y, t) - T(x_1, y, t)\}\,dy = 0.$$

Аналогично

$$T_y^* = \int\limits_{x_1}^{x_2} \{T(x, y_2, t) - T(x, y_1, t)\}\,dx = 0.$$

Пользуясь теоремой о среднем и учитывая произвол в выборе площадки $ABCD$, получаем:

$$\left.\begin{aligned} T(x, y_1, t) &= T(x, y_2, t), \\ T(x_1, y, t) &= T(x_2, y, t), \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

т. е. натяжение T не меняется при изменении x и y и может зависеть лишь от t.

Площадь какого-либо элемента мембраны в момент времени t равна в нашем приближении

$$\iint \frac{dx\,dy}{\cos\gamma} = \iint \sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\,dx\,dy \cong \iint dx\,dy. \tag{28}$$

Следовательно, в процессе колебаний не происходит растяжения, откуда в силу закона Гука вытекает независимость натяжений от времени. Таким образом, мы установили, что натяжение не зависит от переменных x, y и t

$$T(x,\ y,\ t) = \text{const} = T_0. \tag{29}$$

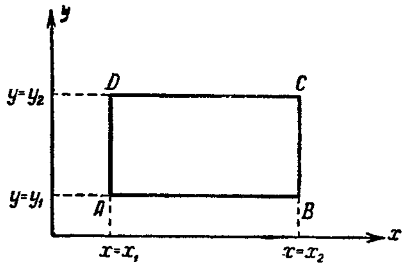

Рис. 3.

Перейдем к выводу уравнения колебаний мембраны. Воспользуемся теоремой о приращении количества движения. Пусть S_1 — проекция на плоскость $(x,\ y)$ некоторого участка мембраны, а C_1 — граница S_1. Приравнивая изменение количества движения импульсу вертикальных составляющих сил натяжения и внешних действующих сил с плотностью $F(x, y, t)$, получаем уравнение колебаний мембраны в интегральной форме

$$\iint_S [u_t(x,\ y,\ t_2) - u_t(x,\ y,\ t_1)]\,\rho(x,\ y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\int_{C_1} T_0\frac{\partial u}{\partial n}\,ds\,dt + \int_{t_1}^{t_2}\iint_{S_1} F\,dx\,dy\,dt, \tag{30}$$

где $\rho(x, y)$ — поверхностная плотность мембраны, а $F(x, y, t)$ — плотность внешней силы (на единицу площади).

Для перехода к дифференциальному уравнению предположим, что функция $u(x, y, t)$ имеет непрерывные вторые производные. С помощью теоремы Остроградского[1]) контурный интеграл преобразуется в поверхностный

$$\int_{C_1} \frac{\partial u}{\partial n}\,ds = \iint_{S_1} (u_{xx}+u_{yy})\,dx\,dy,$$

---

[1]) См. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, 1948, стр. 196; Б. М. Будак, С. В. Фомин, Кратные интегралы и ряды, «Наука», 1965.

вследствие чего интегральное уравнение колебаний приводится к виду

$$\int_{t_1}^{t_2}\iint_{S_1} \{\rho u_{tt} - T_0(u_{xx}+u_{yy}) - F(x, y, t)\}\, dx\, dy\, dt = 0.$$

Пользуясь теоремой о среднем, произвольностью выбора S_1 и промежутка времени (t_1, t_2), делаем заключение о тождественном равенстве нулю выражения в фигурных скобках. Таким образом, приходим к дифференциальному уравнению колебаний мембраны

$$\rho u_{tt} = T_0(u_{xx}+u_{yy}) + F(x, y, t). \tag{31}$$

Для однородной мембраны уравнение колебаний можно записать в виде

$$u_{tt} = a^2(u_{xx}+u_{yy}) + f(x, y, t) \quad \left(a^2 = \frac{T_0}{\rho}\right), \tag{32}$$

где $f(x, y, t)$ — плотность силы, рассчитанная на единицу массы мембраны.

6. Уравнения гидродинамики и акустики. Для характеристики движения жидкости пользуются функциями $v_1(x, y, z, t)$, $v_2(x, y, z, t)$, $v_3(x, y, z, t)$, представляющими компоненты вектора скорости v в точке (x, y, z) в момент t (эйлеровы переменные). Величинами, характеризующими движение жидкости, являются также плотность $\rho(x, y, z, t)$, давление $p(x, y, z, t)$ и плотность внешних действующих сил $\boldsymbol{F}(x, y, z, t)$ (если они имеются), рассчитанная на единицу массы.

Рассмотрим некоторый объем жидкости T и подсчитаем действующие на него силы. Пренебрегая силами трения, обусловленными вязкостью, т. е. рассматривая идеальную жидкость, получим для результирующей сил давления выражение в виде поверхностного интеграла

$$-\iint_S p\boldsymbol{n}\, dS, \tag{33}$$

где S — поверхность объема T, $\boldsymbol{n}$ — единичный вектор внешней нормали. Формула Остроградского[1]) дает:

$$-\iint_S p\boldsymbol{n}\, dS = -\iiint_T \operatorname{grad} p\, d\tau. \tag{34}$$

---

[1]) В самом деле, $p\boldsymbol{n} = p\cos(n, x)\boldsymbol{i} + p\cos(n, y)\boldsymbol{j} + p\cos(n, z)\boldsymbol{k}$, где $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — единичные векторы в системе координат (x, y, z),

$$\iint_S p\cos(n, x)\, dx = \iiint_T \frac{\partial p}{\partial x}\, d\tau \text{ и т. д.}$$

При вычислении ускорения какой-либо точки жидкости необходимо учесть перемещение самой точки. Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ — уравнение траектории этой точки. Вычислим производную скорости по времени

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial v}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial v}{\partial z}\dot{z} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}v_1 + \frac{\partial v}{\partial y}v_2 + \frac{\partial v}{\partial z}v_3 = \frac{\partial v}{\partial t} + (v\nabla)v,$$

где

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Такая производная по времени, учитывающая движение частицы среды (субстанции), называется субстанциональной или материальной. Уравнение движения жидкости выражает обычную связь между ускорением частиц и действующими на них силами

$$\iiint\limits_T \rho \frac{dv}{dt}\, d\tau = -\iiint\limits_T \operatorname{grad} p\, d\tau + \iiint\limits_T \rho \boldsymbol{F}\, d\tau, \tag{35}$$

где последний интеграл представляет собой равнодействующую внешних сил, приложенных к объему T. Отсюда в силу произвольности объема T получаем уравнение движения идеальной жидкости в форме Эйлера

$$v_t + (v\nabla)v = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \boldsymbol{F}. \tag{36}$$

Перейдем к выводу уравнения непрерывности. Если внутри T нет никаких источников или стоков, то изменение в единицу времени количества жидкости, заключенной внутри T, равно потоку через границу S

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_T \rho\, dt = -\iint\limits_S \rho v n\, dS. \tag{37}$$

Преобразование поверхностного интеграла в объемный дает

$$\iiint\limits_T \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho v\right) d\tau = 0.$$

Так как это равенство справедливо для сколь угодно малых объемов, то отсюда следует уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} v = 0. \tag{38}$$

К уравнениям (36) и (38) следует присоединить термодинамическое **уравнение состояния**, которое мы здесь возьмем в виде

$$p = f(\rho).$$

Следовательно, мы получаем систему пяти уравнений с пятью неизвестными функциями v_x, v_y, v_z, p и ρ. Если бы уравнение состояния содержало температуру, то нужно было бы добавить еще уравнение теплопереноса (см. приложение IV). Таким образом, система уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial t} + (v\nabla)\,v = F - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p,\\ &\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,(\rho v) = 0,\\ &p = f(\rho) \end{aligned}\right\} \qquad (39)$$

представляет замкнутую систему уравнений гидродинамики.

Применим уравнения гидродинамики к процессу распространения звука в газе. Сделаем следующие допущения: 1) внешние силы отсутствуют; 2) процесс распространения звука является адиабатическим, поэтому уравнением состояния служит адиабата Пуассона

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \quad \left(\gamma = \frac{c_p}{c_v}\right),$$

где ρ_0 и p_0 — начальная плотность и начальное давление, c_p и c_v — теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме; 3) колебания газа малы, можно пренебрегать высшими степенями скоростей, градиентов скоростей и изменения плотности.

Назовем **конденсацией** газа величину $s(x, y, z, t)$, равную относительному изменению плотности

$$s(x, y, z, t) = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}, \qquad (40)$$

откуда

$$\rho = \rho_0(1 + s). \qquad (41)$$

Уравнения гидродинамики при сделанных предположениях принимают вид

$$\left.\begin{aligned} v_t &= -\frac{1}{\rho_0}\,\mathrm{grad}\,p,\\ \rho_t &+ \rho_0\,\mathrm{div}\,v = 0,\\ p &= p_0(1 + s)^{\gamma} \cong p_0(1 + \gamma s), \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

так как

$$\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p=\frac{1}{\rho_0}(1-s+\ldots)\operatorname{grad} p=\frac{1}{\rho_0}\operatorname{grad} p+\ldots,$$

$$\operatorname{div}\rho\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\operatorname{grad}\rho+\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}=\rho_0\operatorname{div}\boldsymbol{v}+\ldots,$$

где точками обозначены члены второго и высших порядков малости. Вводя обозначение $a^2=\gamma p_0/\rho_0$, перепишем систему (42) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{v}_t=-a^2\operatorname{grad} s,\\ &s_t+\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0.\end{aligned}\right\}\tag{42'}$$

Применяя к первому уравнению (42′) оператор дивергенции и меняя порядок дифференцирования, будем иметь:

$$\operatorname{div}\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\boldsymbol{v}=-a^2\operatorname{div}(\operatorname{grad} s)=-a^2\nabla^2 s=-a^2\Delta s,$$

где

$$\nabla^2=\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

— оператор Лапласа. Используя второе уравнение (42′), получим уравнение колебаний

$$\Delta s=\frac{1}{a^2}s_{tt}\tag{43}$$

или

$$a^2(s_{xx}+s_{yy}+s_{zz})=s_{tt}.$$

Отсюда и из (40) получаем уравнение для плотности

$$a^2(\rho_{xx}+\rho_{yy}+\rho_{zz})=\rho_{tt}.\tag{43'}$$

Уравнения (43) и (43′) являются уравнениями колебаний. Введем теперь потенциал скоростей и покажем, что он удовлетворяет тому же уравнению колебаний (43), что и конденсация.

Из уравнения

$$\boldsymbol{v}_t=-a^2\operatorname{grad} s$$

следует

$$\boldsymbol{v}(x,y,z,t)=\boldsymbol{v}(x,y,z,0)-a^2\operatorname{grad}\left(\int_0^t s\,dt\right),\tag{44}$$

где $\boldsymbol{v}(x,y,z,0)$ — начальное распределение скоростей. Если поле скоростей в начальный момент имеет потенциал

$$\boldsymbol{v}\big|_{t=0}=-\operatorname{grad} f(x,y,z),\tag{45}$$

то имеет место соотношение

$$v = -\operatorname{grad}\left[f(x, y, z) + a^2\int\limits_0^t s\,dt\right] = -\operatorname{grad} U, \tag{46}$$

которое означает, что существует потенциал скоростей $U(x, y, z, t)$. Знания потенциала скоростей достаточно для описания всего процесса движения[1])

$$\left.\begin{aligned} v &= -\operatorname{grad} U, \\ s &= \frac{1}{a^2} U_t. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Подставляя эти значения в уравнение непрерывности

$$s_t + \operatorname{div} v = 0,$$

получим уравнение колебаний для потенциала

$$a^2(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) = U_{tt}$$

или

$$U_{tt} = a^2 \Delta U. \tag{48}$$

Для давления p и скорости v также можно получить уравнение колебаний вида (48), называемое часто **уравнением акустики**.

При решении задач для двумерного и одномерного случаев надо в уравнении (48) оператор Лапласа заменить оператором $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ и, соответственно, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Постоянная

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}}$$

имеет размерность скорости и, как будет показано в § 2, является скоростью распространения звука.

Вычислим скорость звука в воздухе при нормальном атмосферном давлении. В этом случае $\gamma = 7/5$, $\rho_0 = 0{,}001293$ *г/см*^{3}, $p_0 = 1{,}033$ *кг/см*^{2}; следовательно,

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = 336 \text{ м/сек}.$$

---

[1]) Из формулы (46) видно, что потенциал U определен с точностью до слагаемого, являющегося произвольной функцией t. Из уравнения $v_t = -a^2 \operatorname{grad} s$ и (46) следует $\operatorname{grad}\left(s - \frac{1}{a^2} U_t\right) = 0$, т. е. $s = \frac{1}{a^2} U_t$ при соответствующей нормировке потенциала U.

В случае колебаний газа в ограниченной области на ее границе должны быть заданы определенные граничные условия. Если граница представляет собой твердую непроницаемую стенку, то нормальная составляющая скорости равна нулю, что приводит к условиям

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{\Sigma}=0 \quad \text{или} \quad \left.\frac{\partial s}{\partial n}\right|_{\Sigma}=0. \tag{49}$$

7. Граничные и начальные условия. При математическом описании физического процесса надо прежде всего поставить задачу, т. е. сформулировать условия, достаточные для однозначного определения процесса.

Дифференциальные уравнения с обыкновенными и, тем более, с частными производными имеют, вообще говоря, бесчисленное множество решений. Поэтому в том случае, когда физическая задача приводится к уравнению с частными производными, для однозначной характеристики процесса необходимо к уравнению присоединить некоторые дополнительные условия.

В случае обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка решение может быть определено начальными условиями, т. е. заданием значений функции и ее первой производной при «начальном» значении аргумента (задача Коши). Встречаются и другие формы дополнительных условий, когда, например, задаются значения функции в двух точках (задача о цепной линии). Для уравнения с частными производными возможны также различные формы дополнительных условий.

Рассмотрим сперва простейшую задачу о поперечных колебаниях струны, закрепленной на концах. В этой задаче $u(x,t)$ дает отклонение струны от оси x. Если концы струны $0 \leqslant x \leqslant l$ закреплены, то должны выполняться «граничные условия»

$$u(0, t)=0, \quad u(l, t)=0. \tag{50}$$

Так как процесс колебаний струны зависит от ее начальной формы и распределения скоростей, то следует задать «начальные условия»:

$$\left.\begin{aligned} u(x, t_0)&=\varphi(x), \\ u_t(x, t_0)&=\psi(x). \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Таким образом, дополнительные условия состоят из граничных и начальных условий, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные функции точки. В дальнейшем мы покажем, что эти условия вполне определяют решение уравнения колебаний струны

$$u_{tt}=a^2u_{xx}. \tag{52}$$

Если концы струны движутся по заданному закону, то граничные условия (50) принимают другой вид:

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t), \end{aligned}\right\} \tag{50'}$$

где $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ — заданные функции времени t. Аналогично ставится задача для продольных колебаний струны или пружины.

Возможны и другие типы граничных условий. Рассмотрим, например, задачу о продольных колебаниях пружины, один конец которой закреплен (точка подвеса), а другой конец свободен. Закон движения свободного конца не задан и зачастую является искомой функцией.

В точке подвеса $x = 0$ отклонение

$$u(0, t) = 0;$$

на свободном конце $x = l$ натяжение пружины

$$T(l, t) = k \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} \tag{53}$$

равно нулю (нет внешних сил), так что математическая формулировка условия свободного конца имеет вид

$$u_x(l, t) = 0.$$

Если конец $x = 0$ движется по определенному закону $\mu(t)$, а при $x = l$ задана сила $\bar{\nu}(t)$, то

$$u(0, t) = \mu(t), \quad u_x(l, t) = \nu(t), \qquad \left(\nu(t) = \frac{1}{k}\bar{\nu}(t)\right).$$

Типичным является также условие упругого закрепления, скажем для $x = l$,

$$ku_x(l, t) = -\alpha u(l, t)$$

или

$$u_x(l, t) = -hu(l, t) \qquad \left(h = \frac{\alpha}{k}\right), \tag{54}$$

при котором конец $x = l$ может перемещаться, но упругая сила закрепления вызывает на этом конце натяжение, стремящееся вернуть сместившийся конец в прежнее положение. Эта сила, согласно закону Гука, пропорциональна смещению $u(l, t)$; коэффициент пропорциональности α называется коэффициентом жесткости закрепления.

Если точка (система), относительно которой имеет место упругое закрепление, перемещается и ее отклонение от начального положения дается функцией $\theta(t)$, то граничное условие принимает вид

$$u_x(l, t) = -h[u(l, t) - \theta(t)], \quad h = \frac{\alpha}{k} > 0. \tag{55}$$

Условие упругого закрепления на левом конце $x = 0$ имеет вид

$$u_x(0, t) = h[u(0, t) - \theta(t)], \quad h > 0$$

(формально можно считать, что (55) имеет место и при $x = 0$, но $h < 0$). Следует отметить, что в случае жесткого закрепления (α велико), когда даже небольшие сдвиги конца вызывают большие натяжения, граничное условие (55) переходит в условие $u(l, t) = \mu(t)$ $(\alpha = \infty)$ при $\mu(t) = \theta(t)$. В случае мягкого закрепления (α мало́), при котором большие сдвиги конца вызывают слабые натяжения, граничное условие переходит в условие свободного конца

$$u_x(l, t) = 0 \quad (\alpha = 0).$$

В дальнейшем мы будем говорить о трех основных типах граничных условий:

граничное условие 1-го рода $u(0, t) = \mu(t)$ — заданный режим,

граничное условие 2-го рода $u_x(0, t) = \nu(t)$ — заданная сила,

граничное условие 3-го рода $u_x(0, t) = h[u(0, t) - \theta(t)]$ — упругое закрепление.

Аналогично задаются граничные условия и на втором конце $x = l$. Если функции, задаваемые в правой части ($\mu(t)$, $\nu(t)$ или $\theta(t)$), равны нулю, то граничные условия называются *однородными*.

Комбинируя различные перечисленные типы граничных условий, мы получим шесть типов простейших краевых задач.

Более сложное граничное условие имеет место, например, при упругом закреплении, не подчиняющемся закону Гука, когда натяжение на конце является нелинейной функцией смещения $u(l, t)$, так что

$$u_x(l, t) = \frac{1}{k} F[u(l, t)]. \tag{56}$$

Это граничное условие в отличие от рассмотренных выше является нелинейным. Возможны, далее, соотношения между смещениями и натяжениями на разных концах системы. Например, в задачах о колебании кольца, когда $x = 0$ и $x = l$ представляют одну и ту же физическую точку, граничные условия принимают вид

$$u(l, t) = u(0, t); \quad u_x(0, t) = u_x(l, t), \tag{57}$$

т. е. сводятся к требованиям непрерывности u и u_x. Производные по t могут также входить в граничные условия. Если конец пружины испытывает сопротивление среды, пропорциональное скорости его движения (к концу пружины прикреплена пластинка, плоскость которой перпендикулярна оси пружины), то граничное условие принимает вид

$$ku_x(l, t) = -\alpha u_t(l, t). \tag{58}$$

Если к концу $x = l$ пружины прикреплен груз массы m, то при $x = l$ должно выполняться условие

$$mu_{tt}(l, t) = -ku_x(l, t) + mg. \tag{59}$$

Для поперечных колебаний струны все граничные условия записываются в той же форме с заменой k на T_0.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением трех простейших типов граничных условий, проводя основное изложение на примере первого типа граничного условия и отмечая лишь попутно особенности, связанные со вторым и третьим условиями.

Сформулируем первую краевую задачу для уравнения (5):

найти функцию $u(x,t)$, *определенную в области* $0 \leqslant x \leqslant l$, $t \geqslant 0$, *удовлетворяющую уравнению*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \quad \text{для } 0 < x < l, \ t > 0,$$

граничным

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t), \end{aligned}\right\} \quad (t > 0)\,^{1)}, \tag{60'}$$

и начальным условиям:

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \quad (0 < x < l). \tag{60''}$$

Аналогично ставится задача для уравнения (11).

Если на обоих концах берутся граничные условия 2-го или 3-го рода, то соответствующие задачи называются второй или третьей краевыми задачами. Если граничные условия при $x = 0$ и $x = l$ имеют различные типы, то такие краевые задачи называют смешанными, не проводя более подробной их классификации.

Обратимся теперь к рассмотрению предельных случаев поставленной задачи. Влияние граничных условий в точке M_0, достаточно удаленной от границы, на которой они заданы, сказывается через достаточно большой промежуток времени.

---

[1]) Мы не останавливаемся на случае, когда граничные условия заданы на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_0$.

Если нас интересует явление в течение малого промежутка времени, когда влияние границ еще несущественно, то вместо полной задачи можно рассматривать предельную задачу с начальными условиями для неограниченной области: *найти решение уравнения*

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad \text{для} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

с начальными условиями

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad -\infty < x < \infty. \tag{61}$$

Эту задачу часто называют задачей Коши.

Если же мы изучаем явление вблизи одной границы и влияние граничного режима на второй границе не имеет существенного значения на протяжении интересующего нас промежутка времени, то мы приходим к постановке задачи на полуограниченной прямой $0 \leqslant x < \infty$, когда помимо уравнения даны дополнительные условия:

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= \mu(t), & & t \geqslant 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), & & \multirow{2}{*}{} \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) & & 0 \leqslant x < \infty. \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

Характер явления для моментов времени, достаточно удаленных от начального момента $t = 0$, вполне определяется граничными значениями, так как влияние начальных условий благодаря трению, присущему всякой реальной системе, с течением времени ослабевает[1]). Задачи этого типа встречаются особенно часто в случаях, когда система возбуждается периодическим граничным режимом, действующим длительное время. Такие задачи «без начальных условий» (на установившийся режим) формулируются следующим образом:

найти решение изучаемого уравнения для $0 \leqslant x \leqslant l$ и $t > -\infty$ *при граничных условиях*

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t). \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Аналогично ставится задача без начальных условий для полуограниченной прямой.

---

[1]) Уравнение колебаний с учетом трения, пропорционального скорости, имеет вид

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - \alpha u_t \qquad (\alpha > 0).$$

Подробнее о постановке задач без начальных условий при $\alpha = 0$ см. п. 7 § 3.

В дальнейшем мы будем рассматривать помимо основных краевых задач также предельные задачи:

1. Задачи в бесконечной области, когда одна или обе границы находятся в бесконечности.

2. Задачи без начальных условий (на установившийся режим), когда рассматривается решение, определенное в течение бесконечного промежутка времени.

8. Редукция общей задачи. При решении сложной задачи естественно стремиться свести ее решение к решению более простых задач. С этой целью представим решение общей краевой задачи в виде суммы решений ряда частных краевых задач.

Пусть $u_i(x,t)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ — функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}+f^i(x,t) \tag{64}$$

при $0<x<l$, $t>0$ и дополнительным условиям

$$\left.\begin{aligned} u_i(0,t)&=\mu_1^i(t),\\ u_i(l,t)&=\mu_2^i(t);\\ u_i(x,0)&=\varphi^i(x),\\ \frac{\partial u_i}{\partial t}(x,0)&=\psi^i(x).\end{aligned}\right\}$$

Очевидно, что имеет место суперпозиция решений, т. е. функция

$$u^{(0)}(x,t)=\sum_{i=1}^{n}u_i(x,t) \tag{66}$$

удовлетворяет аналогичному уравнению с правой частью

$$f^{(0)}(x,t)=\sum_{i=1}^{n}f^i(x,t) \tag{67}$$

и дополнительным условиям, правые части которых суть функции

$$\left.\begin{aligned} \mu_k^{(0)}(t)&=\sum_{i=1}^{n}\mu_k^i(t)\quad(k=1,\ 2),\\ \varphi^{(0)}(x)&=\sum_{i=1}^{n}\varphi^i(x),\\ \psi^{(0)}(x)&=\sum_{i=1}^{n}\psi^i(x).\end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Указанный принцип суперпозиции относится, очевидно, не только к данной задаче, но и к любому линейному уравнению с линейными дополнительными условиями. Этим свойством мы в дальнейшем неоднократно будем пользоваться.

Решение общей краевой задачи

$$\left.\begin{array}{c} u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,\ t) \\ (0<x<l,\ t>0); \\ u(0,\ t)=\mu_1(t), \\ u(l,\ t)=\mu_2(t); \\ u(x,\ 0)=\varphi(x), \\ u_t(x,\ 0)=\psi(x) \end{array}\right\} \qquad (69)$$

может быть представлено в виде суммы

$$u(x,\ t)=u_1(x,\ t)+u_2(x,\ t)+u_3(x,\ t)+u_4(x,\ t), \qquad (70)$$

где u_1, u_2, u_3, u_4 — решения следующих частных краевых задач:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} \quad (i=1,\ 2,\ 3), \\ \dfrac{\partial^2 u_4}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u_4}{\partial x^2}+f(x,t), \end{array}\right. \quad (0<x<l,\ t>0),$$

$$\left.\begin{array}{llll} u_1(0,\ t)=0, & u_2(0,\ t)=\mu_1(t), & u_3(0,\ t)=0, & u_4(0,\ t)=0, \\ u_1(l,\ t)=0; & u_2(l,\ t)=0; & u_3(l,\ t)=\mu_2(t); & u_4(l,\ t)=0; \\ u_1(x,\ 0)=\varphi(x), & u_2(x,\ 0)=0, & u_3(x,\ 0)=0, & u_4(x,\ 0)=0, \\ u_{1t}(x,\ 0)=\psi(x), & u_{2t}(x,\ 0)=0; & u_{3t}(x,\ 0)=0; & u_{4t}(x,0)=0. \end{array}\right\} \qquad (71)$$

Мы ограничимся здесь этой формальной редукцией для того, чтобы характеризовать частные краевые задачи, составляющие основные этапы при решении общей задачи. Аналогичная редукция может быть произведена и для предельных случаев общей краевой задачи.

9. Постановка краевых задач для случая многих переменных. Мы подробно рассмотрели постановку краевых задач для случая одной независимой геометрической переменной x (и времени t). Если число геометрических переменных $n>1$ (например, $n=3$), то первая краевая задача ставится совершенно сходным образом:

требуется найти функцию $u(M,t)=u(x,y,z,t)$, определенную при $t\geqslant 0$ внутри заданной области T с границей Σ, удовлетворяющую при $t>0$ внутри T уравнению

$$u_{tt}=a^2\Delta u+f(M,\ t) \quad (M(x,\ y,\ z)\in T,\ t>0), \qquad (72)$$

граничному условию на Σ

$$u|_\Sigma = \mu(P, t) \quad (P(x, y, z) \in \Sigma, \; t \geqslant 0) \tag{73}$$

($\mu(x, y, z, t)$ *есть функция, заданная на* Σ) и *начальным условиям*

$$\left.\begin{aligned} u(M, 0) &= \varphi(M), \\ u_t(M, 0) &= \psi(M) \end{aligned}\right\} \quad (M(x, y, z) \in T). \tag{74}$$

Разложение общей краевой задачи на ряд более простых происходит аналогично предшествующему. Отметим, что возможна также постановка предельных краевых задач для неограниченной области, полупространства и т. д.

10. Теорема единственности. При решении краевых задач:

1) надо убедиться в том, что дополнительные условия достаточны для выделения однозначного решения; это достигается доказательством теоремы единственности;

2) надо убедиться в том, что дополнительные условия не переопределяют задачу, т. е. среди них нет несовместных условий; это достигается доказательством теоремы существования; доказательство существования решения обычно тесно связано с методом нахождения решения.

В настоящем пункте нами будет доказана следующая теорема единственности:

Возможно существование только одной функции $u(x, t)$, *определенной в области* $0 \leqslant x \leqslant l$, $t \geqslant 0$ *и удовлетворяющей уравнению*

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + F(x, t) \quad (\rho(x) > 0, \; k(x) > 0),$$
$$0 < x < l, \quad t > 0, \tag{75}$$

начальным и граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), & u_t(x, 0) &= \psi(x), \\ u(0, t) &= \mu_1(t), & u(l, t) &= \mu_2(t), \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

если выполнены условия:

1) *функция* $u(x, t)$ *и производные, входящие в уравнение* (75), *а также производная* u_{xt} *непрерывны на отрезке* $0 \leqslant x \leqslant l$ при $t \geqslant 0$;

2) *коэффициенты* $\rho(x)$ *и* $k(x)$ *непрерывны на отрезке* $0 \leqslant x \leqslant l$.

Допустим, что существует два решения рассматриваемой задачи:

$$u_1(x, t), \quad u_2(x, t),$$

и рассмотрим разность $v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$.

Функция $v(x,t)$, очевидно, удовлетворяет однородному уравнению

$$\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{77}$$

и однородным дополнительным условиям

$$\left.\begin{aligned} v(x,\ 0)&=0, & v(0,\ t)&=0,\\ v_t(x,\ 0)&=0; & v(l,\ t)&=0,\end{aligned}\right\} \tag{78}$$

а также условию 1) теоремы.

Докажем, что функция $v(x,t)$ тождественно равна нулю.

Рассмотрим функцию

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^l \{k(v_x)^2+\rho(v_t)^2\}\,dx \tag{79}$$

и покажем, что она не зависит от t. Физический смысл функции $E(t)$ очевиден: это полная энергия струны в момент времени t. Продифференцируем $E(t)$ по t, выполняя при этом дифференцирование под знаком интеграла[1])

$$\frac{dE(t)}{dt}=\int_0^l (kv_xv_{xt}+\rho v_tv_{tt})\,dx.$$

Интегрируя по частям первое слагаемое правой части, будем иметь:

$$\int_0^l kv_xv_{xt}\,dx=[kv_xv_t]_0^l-\int_0^l v_t(kv_x)_x\,dx. \tag{80}$$

Подстановка обращается в нуль в силу граничных условий (из $v(0,t)=0$ следует $v_t(0,t)=0$ и аналогично для $x=l$). Отсюда следует, что

$$\frac{dE(t)}{dt}=\int_0^l [\rho v_tv_{tt}-v_t(kv_x)_x]\,dx=\int_0^l v_t[\rho v_{tt}-(kv_x)_x]\,dx=0,$$

т. е. $E(t)=\text{const}$. Учитывая начальные условия, получаем:

$$E(t)=\text{const}=E(0)=\frac{1}{2}\int_0^l [k(v_x)^2+\rho(v_t)^2]_{t=0}\,dx=0, \tag{81}$$

[1]) Для дифференцирования под знаком интеграла достаточно, чтобы получаемое при этом подынтегральное выражение было непрерывно на отрезке $0\leqslant x\leqslant l$ при $t\geqslant 0$. Это требование в нашем случае выполнено, так как функция $v(x,t)$ удовлетворяет условию 1) теоремы, а $\rho(x)$ и $k(x)$ — условию 2).

так как
$$v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = 0.$$
Пользуясь формулой (81) и положительностью k и ρ, заключаем, что
$$v_x(x, t) \equiv 0, \quad v_t(x, t) \equiv 0,$$
откуда и следует тождество
$$v(x, t) = \text{const} = C_0. \tag{82}$$
Пользуясь начальным условием, находим:
$$v(x, 0) = C_0 = 0;$$
тем самым доказано, что
$$v(x, t) \equiv 0. \tag{83}$$
Следовательно, если существуют две функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, удовлетворяющие всем условиям теоремы, то $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$.

Для второй краевой задачи функция $v = u_1 - u_2$ удовлетворяет граничным условиям
$$v_x(0, t) = 0, \quad v_x(l, t) = 0, \tag{84}$$
и подстановка в формуле (80) также обращается в нуль. Дальнейшая часть доказательства теоремы естается без именений.

Для третьей краевой задачи доказательство требует некоторого видоизменения. Рассматривая по-прежнему два решения u_1 и u_2, получаем для их разности $v(x, t) = u_1 - u_2$ уравнение (77) и граничные условия
$$\left.\begin{aligned} v_x(0, t) - h_1 v(0, t) &= 0 \quad (h_1 \geqslant 0), \\ v_x(l, t) + h_2 v(l, t) &= 0 \quad (h_2 \geqslant 0). \end{aligned}\right\} \tag{85}$$
Представим подстановку в (80) в виде
$$[kv_x v_t]_0^l = -\frac{k}{2}\frac{\partial}{\partial t}[h_2 v^2(l, t) + h_1 v^2(0, t)].$$
Интегрируя $\frac{dE}{dt}$ в пределах от нуля до t, получим:
$$E(t) - E(0) = \int_0^t \int_0^l v_t[\rho v_{tt} - (kv_x)_x]\,dx\,dt -$$
$$- \frac{k}{2}\{h_2[v^2(l, t) - v^2(l, 0)] + h_1[v^2(0, t) - v^2(0, 0)]\},$$
откуда в силу уравнения и начальных условий следует:
$$E(t) = -\frac{k}{2}[h_2 v^2(l, t) + h_1 v^2(0, t)] \leqslant 0. \tag{86}$$

Так как в силу неотрицательности подинтегральной функции $E(t) \geqslant 0$, то

$$E(t) \equiv 0, \tag{87}$$

а следовательно, и

$$v(x, t) \equiv 0. \tag{88}$$

Изложенный здесь метод доказательства теоремы единственности, основанный на использовании выражения полной энергии, широко применяется при доказательстве теорем единственности в различных областях математической физики, например, в теории электромагнитных полей, теории упругости и гидродинамике.

Доказательство единственности других краевых задач (задачи Коши и задачи без начальных условий) будет дано в дальнейшем в соответствующем месте.

Задачи

1. Доказать, что уравнение малых крутильных колебаний стержня имеет вид

$$\Theta_{tt} = a^2\Theta_{xx}, \quad a = \sqrt{\frac{GJ}{k}},$$

где Θ есть угол поворота сечения стержня с абсциссой x, G — модуль сдвига, J — полярный момент инерции поперечного сечения, а k — момент инерции единицы длины стержня. Дать физическую интерпретацию граничных условий 1-го, 2-го и 3-го рода для этого уравнения.

2. Абсолютно гибкая однородная нить закреплена на одном из концов и под действием своего веса находится в вертикальном положении равновесия. Вывести уравнение малых колебаний нити.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right], \quad a^2 = g,$

где $u(x, t)$ — смещение точки, l — длина нити, g — ускорение силы тяжести.

3. Тяжелая однородная нить длины l, прикрепленная верхним концом ($x = 0$) к вертикальной оси, вращается вокруг этой оси с постоянной угловой скоростью ω. Вывести уравнение малых колебаний нити около своего вертикального положения равновесия.

Ответ: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left[(l-x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right] + \omega^2 u$, где $a^2 = g$.

4. Вывести уравнение поперечных колебаний струны в среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости.

Ответ: $v_{tt} = a^2 v_{xx} - h^2 v_t, \; a^2 = \sqrt{\dfrac{T_0}{\rho}}.$

5. Вывести граничные условия для уравнения продольных колебаний упругого стержня (пружины) в случае, когда верхний конец стержня закреплен жестко, а к нижнему прикреплен груз P, если:

а) за положение равновесия принимается напряженное состояние стержня под действием неподвижного груза P, подвешенного к нижнему концу (статическое растяжение);

б) за положение равновесия принимается ненапряженное состояние стержня (например, в начальный момент из-под груза убирается подставка, и груз начинает растягивать стержень).

6. Написать уравнение и условия, определяющие процесс крутильных колебаний стержня, к обоим концам которого прикреплены шкивы.

Ответ: При $x = 0$, $x = l$ должны выполняться граничные условия вида

$$\Theta_{tt}(0, t) = \alpha_1^2\Theta_x(0, t), \quad \Theta_{tt}(l, t) = -\alpha_2^2\Theta_x(l, t).$$

7. В некоторой точке $x = x_0$ струны $(0 \leqslant x \leqslant l)$ подвешен груз массы M. Вывести условия сопряжения в точке $x = x_0$.

8. К концу $x = l$ упругого стержня, упруго закрепленного в точке $x=0$, подвешен груз массы M. Написать уравнение и условия, определяющие продольные колебания стержня, предполагая, что на него, кроме того, действует внешняя сила. Рассмотреть два случая:

а) сила распределена по стержню с плотностью $F(x, t)$;

б) сила сосредоточена в точке $x = x_0$ и равна $F_0(t)$.

9. Рассмотреть процесс малых колебаний идеального газа в цилиндрической трубке. Вывести сначала основные уравнения гидродинамики, а затем, предполагая процесс адиабатическим, вывести дифференциальное уравнение для: 1) плотности ρ, 2) давления p, 3) потенциала U скорости частиц газа, 4) скорости v, 5) смещения u частиц. Привести примеры реализации граничных условий 1-го, 2-го и 3-го типов для этих уравнений.

10. Установить соотношения подобия между процессами механических, акустических и электрических колебаний (см. приложение VI к гл. II).

11. Привести примеры граничных условий 1-го, 2-го и 3-го рода для телеграфных уравнений.

12. Рассмотреть задачу о продольных колебаниях неоднородного стержня ($k = k_1$ при $x < x_0$, $k = k_2$ при $x > x_0$) и вывести условия сопряжения в точке стыка неоднородных частей стержня (при $x = x_0$).

13. Дать физическую интерпретацию граничного условия

$$\alpha u_x(0, t) + \beta u_t(0, t) = 0.$$

14. Привести пример механической модели, для которой реализовалось бы уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + b u_t + c u.$$

§ 2. Метод распространяющихся волн

1. Формула Даламбера. Изучение методов построения решений краевых задач для уравнений гиперболического типа мы начинаем с задачи с начальными условиями для неограниченной струны:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Преобразуем это уравнение к каноническому виду, содержащему смешанную производную (см. гл. I). Уравнение характеристик

$$dx^2 - a^2\,dt^2 = 0$$