

б) за положение равновесия принимается ненапряженное состояние стержня (например, в начальный момент из-под груза убирается подставка, и груз начинает растягивать стержень).

6. Написать уравнение и условия, определяющие процесс крутильных колебаний стержня, к обоим концам которого прикреплены шкивы.

Ответ: При $x = 0$, $x = l$ должны выполняться граничные условия вида

$$\Theta_{tt}(0, t) = \alpha_1^2 \Theta_x(0, t), \quad \Theta_{tt}(l, t) = -\alpha_2^2 \Theta_x(l, t).$$

7. В некоторой точке $x = x_0$ струны ($0 \leq x \leq l$) подвешен груз массы M . Вывести условия сопряжения в точке $x = x_0$.

8. К концу $x = l$ упругого стержня, упруго закрепленного в точке $x=0$, подвешен груз массы M . Написать уравнение и условия, определяющие продольные колебания стержня, предполагая, что на него, кроме того, действует внешняя сила. Рассмотреть два случая:

а) сила распределена по стержню с плотностью $F(x, t)$;

б) сила сосредоточена в точке $x = x_0$ и равна $F_0(t)$.

9. Рассмотреть процесс малых колебаний идеального газа в цилиндрической трубке. Вывести сначала основные уравнения гидродинамики, а затем, предполагая процесс адиабатическим, вывести дифференциальное уравнение для: 1) плотности ρ , 2) давления p , 3) потенциала U скорости частиц газа, 4) скорости v , 5) смещения u частиц. Привести примеры реализации граничных условий 1-го, 2-го и 3-го типов для этих уравнений.

10. Установить соотношения подобия между процессами механических, акустических и электрических колебаний (см. приложение VI к гл. II).

11. Привести примеры граничных условий 1-го, 2-го и 3-го рода для телеграфных уравнений.

12. Рассмотреть задачу о продольных колебаниях неоднородного стержня ($k = k_1$ при $x < x_0$, $k = k_2$ при $x > x_0$) и вывести условия сопряжения в точке стыка неоднородных частей стержня (при $x = x_0$).

13. Дать физическую интерпретацию граничного условия

$$a u_x(0, t) + b u_t(0, t) = 0.$$

14. Привести пример механической модели, для которой реализовалось бы уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + b u_t + c u.$$

§ 2. Метод распространяющихся волн

1. **Формула Даламбера.** Изучение методов построения решений краевых задач для уравнений гиперболического типа мы начинаем с задачи с начальными условиями для неограниченной струны:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Преобразуем это уравнение к каноническому виду, содержащему смешанную производную (см. гл. I). Уравнение характеристик

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0$$

распадается на два уравнения:

$$dx - a dt = 0, \quad dx + a dt = 0,$$

интегралами которых являются прямые

$$x - at = C_1, \quad x + at = C_2.$$

Вводя, как обычно, новые переменные

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at,$$

уравнение колебаний струны преобразуем к виду:

$$u_{\xi\eta} = 0. \quad (3)$$

Найдем общий интеграл последнего уравнения. Очевидно, для всякого решения уравнения (3)

$$u_{\eta}(\xi, \eta) = f^*(\eta),$$

где $f^*(\eta)$ — некоторая функция только переменного η . Интегрируя это равенство по η при фиксированном ξ , получим:

$$u(\xi, \eta) = \int f^*(\eta) d\eta + f_1(\xi) = f_1(\xi) + f_2(\eta), \quad (4)$$

где f_1 и f_2 являются функциями только переменных ξ и η . Обратно, каковы бы ни были дважды дифференцируемые функции f_1 и f_2 , функция $u(\xi, \eta)$, определяемая формулой (4), представляет собой решение уравнения (3). Так как всякое решение уравнения (3) может быть представлено в виде (4) при соответствующем выборе f_1 и f_2 , то формула (4) является общим интегралом этого уравнения. Следовательно, функция

$$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at) \quad (5)$$

является общим интегралом уравнения (1).

Допустим, что решение рассматриваемой задачи существует; тогда оно дается формулой (5). Определим функции f_1 и f_2 таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия:

$$u(x, 0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \quad (6)$$

$$u_t(x, 0) = af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x). \quad (7)$$

Интегрируя второе равенство, получим:

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + C,$$

где x_0 и C — постоянные. Из равенств

$$f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x),$$

$$f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + C$$

находим:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha + \frac{C}{2}, \\ f_2(x) &= \frac{1}{2} \varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha - \frac{C}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Таким образом, мы определили функции f_1 и f_2 через заданные функции φ и ψ , причем равенства (8) должны иметь место для любого значения аргумента¹⁾. Подставляя в (5) найденные значения f_1 и f_2 , получим:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \left\{ \int_{x_0}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha - \int_{x_0}^{x-at} \psi(\alpha) d\alpha \right\}$$

или

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha. \quad (9)$$

Формулу (9), называемую формулой Даламбера, мы получили, предполагая существование решения поставленной задачи. Эта формула доказывает единственность решения. В самом деле, если бы существовало второе решение задачи (1)—(2), то оно представлялось бы формулой (9) и совпадало бы с первым решением.

Нетрудно проверить, что формула (9) удовлетворяет (в предположении двукратной дифференцируемости функции φ и однократной дифференцируемости функции ψ) уравнению и начальным условиям. Таким образом, изложенный метод доказывает как единственность, так и существование решения поставленной задачи.

2. Физическая интерпретация. Функция $u(x, t)$, определяемая формулой (9), представляет процесс распространения началь-

¹⁾ В формуле (5) функции f_1 и f_2 определены неоднозначно. Если от f_1 отнять, а к f_2 прибавить некоторую постоянную C_1 , то u не изменится. В формуле (8) постоянная C не определяется через φ и ψ , однако мы можем ее отбросить, не меняя значения u . При сложении f_1 и f_2 слагаемые $C/2$ и $-C/2$ взаимно уничтожаются.

ного отклонения и начальной скорости. Если фиксировать $t = t_0$, то функция $u(x, t_0)$ дает профиль струны в момент t_0 ; фиксируя $x = x_0$, получим функцию $u(x_0, t)$, дающую процесс движения точки x_0 (рис. 4). Предположим, что наблюдатель,

находившийся в точке $x = 0$ в момент $t = 0$, движется со скоростью a в положительном направлении. Введем систему координат, связанную с наблюдателем, полагая $x' = x - at$, $t' = t$. В этой подвижной системе координат функция $u(x, t) = f(x - at)$ будет определяться формулой $u = f(x')$ и наблюдатель все время будет видеть тот же профиль, что и в начальный момент. Следовательно, функция $u(x, t) = f(x - at)$ представляет неизменный профиль $f(x)$, перемещающийся вправо (в положительном направлении

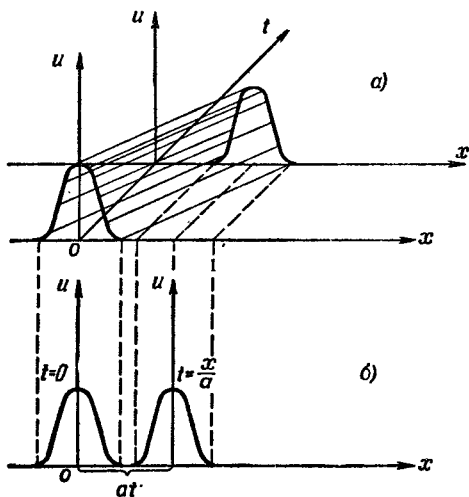


Рис. 4.

оси x) со скоростью a (распространяющуюся или бегущую волну). Функция $f(x + at)$ представляет, очевидно, волну, распространяющуюся влево (в отрицательном направлении оси x) со скоростью a . Таким образом, общее решение (9) задачи Коши для бесконечной струны есть суперпозиция двух волн $f_1(x + at) + f_2(x - at)$, одна из которых распространяется вправо со скоростью a , а вторая — влево с той же скоростью. При этом

$$\begin{aligned} f_1(x + at) &= \frac{1}{2} \varphi(x + at) + \Psi(x + at), \quad f_2(x - at) = \\ &= \frac{1}{2} \varphi(x - at) - \Psi(x - at), \end{aligned}$$

где

$$\Psi(x) = \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\alpha) d\alpha.$$

Для выяснения характера решения (9) удобно пользоваться плоскостью состояний (x, t) или «фазовой плоскостью». Прямые $x - at = \text{const}$ и $x + at = \text{const}$ являются характеристиками уравнения (1). Функция $u = f(x - at)$ вдоль характеристики

$x - at = \text{const}$ сохраняет постоянное значение, функция $u = f(x + at)$ постоянна вдоль характеристики $x + at = \text{const}$.

Предположим, что $f(x)$ отлична от нуля только в интервале (x_1, x_2) и равна нулю вне этого интервала. Проведем характеристики $x - at = x_1$ и $x - at = x_2$ через точки $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$; они разбивают полуплоскость $(x, t > 0)$ на три области I, II и III (рис. 5, а). Функция $u = f(x - at)$ отлична от нуля только в области II, где $x_1 < x - at < x_2$ и характеристики $x - at = x_1$ и $x - at = x_2$ представляют передний и задний фронты распространяющейся направо волны.

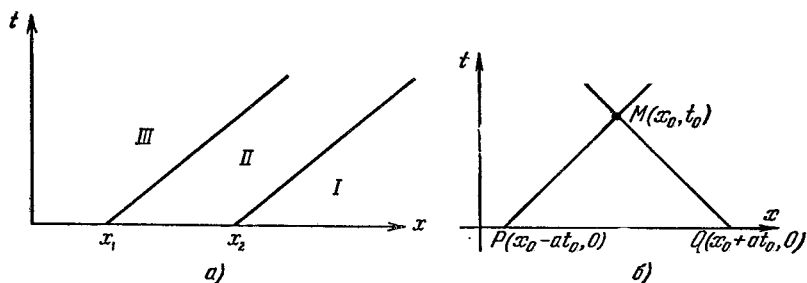


Рис. 5.

Рассмотрим теперь некоторую фиксированную точку (x_0, t_0) и проведем из нее обе характеристики $x - at = x_0 - at_0$ и $x + at = x_0 + at_0$, которые пересекут ось x в точках $x_1 = x_0 - at_0$, $t = 0$ и $x_2 = x_0 + at_0$, $t = 0$. Значение функции $u = f_1(x - t) + f_2(x + at)$ в точке (x_0, t_0) равно $u(x_0, t_0) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$, т. е. определяется значениями функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в точках $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$, являющихся вершинами треугольника MPQ (рис. 5, б), образованного двумя характеристиками и осью x . Этот треугольник называется характеристическим треугольником точки (x_0, t_0) . Из формулы (9) видно, что отклонение $u(x_0, t_0)$ точки струны в момент t_0 зависит только от значений начального отклонения в вершинах $P(x_0 - at_0, 0)$ и $Q(x_0 + at_0, 0)$ характеристического треугольника MPQ и от значений начальной скорости на стороне PQ . Это становится особенно ясным, если формулу (9) записать в виде

$$u(M) = \frac{\varphi(P) + \varphi(Q)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{PQ} \psi(\alpha) d\alpha. \quad (10)$$

Начальные данные, заданные вне PQ , не оказывают влияния на значения $u(x, t)$ в точке $M(x_0, t_0)$. Если начальные условия заданы не на всей бесконечной прямой, а на отрезке P_1Q_1 ,

то они однозначно определяют решение внутри характеристического треугольника, основанием которого является отрезок P_1Q_1 .

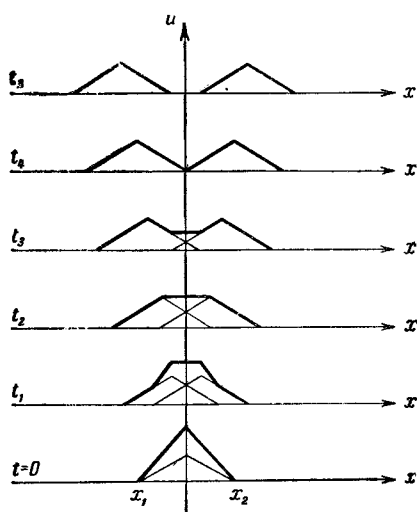
3. Примеры. Решение (9) можно представить в виде суммы $u = u_1(x, t) + u_2(x, t)$, где

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x - at) + \varphi(x + at)], \quad (11)$$

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= \\ &= \Psi(x + at) - \Psi(x - at) = \\ &= \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(a) da. \quad (12) \end{aligned}$$

Если начальная скорость равна нулю ($\psi(x) = 0$), то отклонение $u = u_1(x, t)$ есть сумма левой и правой бегущих волн, причем начальная форма каждой волны определяется функцией $0,5\varphi(x)$, равной половине начального отклонения. Если же $\varphi(x) = 0$, то $u = u_2(x, t)$ представляет возмущение струны, создаваемое начальной скоростью.

Пример 1. Рассмотрим распространение начального отклонения, заданного в виде равнобедренного треугольника. Такой начальный профиль можно получить, если оттянуть струну в середине отрезка $[x_1, x_2]$. На рис. 6 даны последовательные положения струны через промежутки времени $\Delta t = (x_2 - x_1)/8a$.



$$\Delta t = t_{i+1} - t_i = \frac{x_2 - x_1}{8a}$$

Рис. 6.

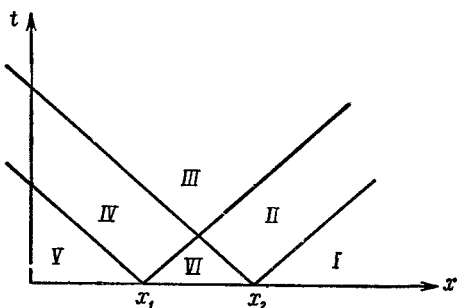


Рис. 7.

Наглядное представление о характере процесса распространения можно получить с помощью фазовой плоскости (x, t) . Проведем характеристики через точки $P(x_1, 0)$ и $Q(x_2, 0)$; они разобьют полуплоскость $(-\infty < x < \infty, t \geq 0)$ на шесть областей (рис. 7). Отклонение $u_1(x, t)$ в любой точке (x, t) дается формулой (11). Поэтому в областях I, III, V отклонение равно нулю, так как характеристический треугольник любой точки

из этих областей не имеет общих точек с отрезком $[x_1, x_2]$, на котором заданы начальные условия. В области II решением является «правая волна» $u = 0,5\varphi(x - at)$, в области IV — «левая волна» $u = 0,5\varphi(x + at)$, а в области VI решение есть сумма «левой» и «правой» волн.

Пример 2. Пусть начальное отклонение $\varphi(x) \equiv 0$, а начальная скорость отлична от нуля только на отрезке $[x_1, x_2]$, где она принимает постоянное значение ψ_0 : $\psi(x) = \psi_0$ при $x_1 \leq x \leq x_2$, $\psi(x) = 0$ при $x > x_2$ и $x < x_1$. В этом случае решением является функция $u_2(x, t)$. Вычислим функцию $\Psi(x)$, выбрав при этом $x_0 = 0$ (рис. 8):

$$\Psi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\alpha) d\alpha = \begin{cases} 0 & \text{при } x < x_1, \\ (x - x_1)\psi_0/2a & \text{при } x_1 \leq x \leq x_2, \\ (x_2 - x_1)\psi_0/2a & \text{при } x > x_2. \end{cases} \quad (13)$$

Решение $u_2(x, t)$ есть разность правой и левой волн с профилем $\Psi(x)$. Последовательные положения этих волн через промежутки времени $\Delta t = (x_2 - x_1)/8a$ изображены на рис. 9. Профиль струны для $t \geq 4\Delta t$ имеет форму трапеции, расширяющейся равномерно с течением времени. Если $\psi(x)$ отлично от постоянной на $[x_1, x_2]$, то изменится лишь профиль $\Psi(x)$.

Для выяснения характера решения воспользуемся фазовой плоскостью (x, t) (рис. 7). Напишем выражения для $u(x, t)$ в различных областях фазовой плоскости.

В области I ($x - at > x_2$) $\Psi(x + at) = \Psi(x - at) = \text{const}$, $u(x, t) = 0$.

В области V ($x + at < x_1$) $\Psi(x - at) = \Psi(x + at) = 0$, $u(x, t) = 0$.

В области III ($x - at < x_1, x + at > x_2$)

$$\Psi(x + at) = \text{const} = \frac{x_2 - x_1}{2a} \psi_0,$$

$$\Psi(x - at) = 0, \quad u(x, t) = \frac{x_2 - x_1}{2a} \psi_0.$$

В области II ($x_1 < x - at < x_2, x + at > x_2$)

$$\Psi(x + at) = \frac{x_2 - x_1}{2a} \psi_0,$$

$$\Psi(x - at) = \frac{x - at - x_1}{2a} \psi_0, \quad u(x, t) = \frac{x_2 - (x - at)}{2a} \psi_0.$$

В области IV ($x_1 < x + at < x_2, x - at < x_1$)

$$\Psi(x + at) = \frac{x + at - x_1}{2a} \psi_0, \quad \Psi(x - at) = 0, \quad u(x, t) = \frac{x + at - x_1}{2a} \psi_0.$$

В области $VI (x - at > x_1, x + at < x_2)$

$$\Psi(x + at) = \frac{x + at - x_1}{2a} \psi_0,$$

$$\Psi(x - at) = \frac{x - at - x_1}{2a} \psi_0, \quad u(x, t) = t\psi_0.$$

Пример 3. Рассмотрим задачу о колебаниях струны под действием сосредоточенного импульса. Сообщая в начальный момент точкам струны $(x, x + \Delta x)$ постоянную скорость ψ_0 (например, ударяя струну молоточком), мы прикладываем к этому участку импульс I , равный изменению количества движения при $t = 0$, так что $I = \rho \Delta x \psi_0$, где ρ — линейная плотность струны. Таким образом, мы должны решить задачу о колебаниях струны с нулевым начальным отклонением и начальной скоростью $\psi = I_0/\rho = \psi_0$ на интервале $(x, x + \Delta x)$, $\psi = 0$ вне этого интервала; здесь $I_0 = I/\Delta x$ — плотность импульса. Анализ решения этой задачи был дан выше при решении примера 2.

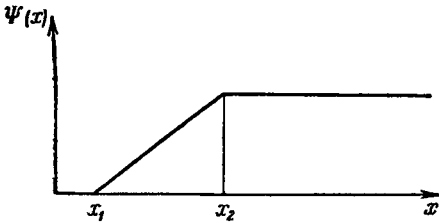


Рис. 8.

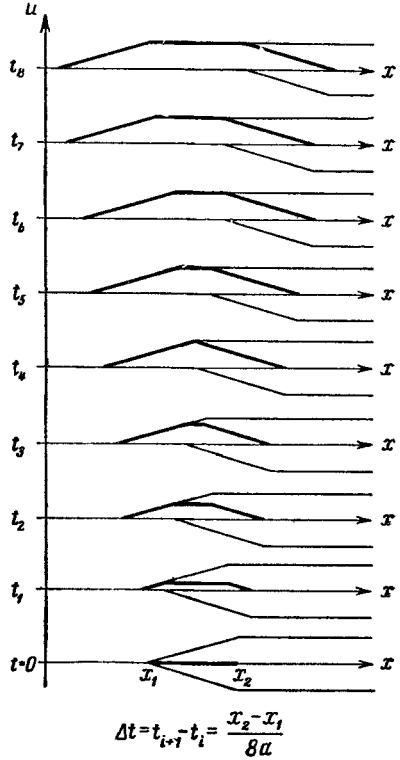


Рис. 9.

Отклонение, вызываемое импульсом, распределенным на интервале $(x, x + \Delta x)$, представляет собой при $t > \Delta x/2a$ трапецию с нижним основанием $2at + \Delta x$ и верхним $2at - \Delta x$. Совершая предельный переход при $\Delta x \rightarrow 0$ $I_0 = \text{const}$, видим, что отклонения будут равны нулю вне $(x - at, x + at)$ и $I/2a\rho$ внутри этого интервала. Можно условно говорить, что эти отклонения вызываются точечным импульсом I .

Рассмотрим фазовую плоскость (x, t) и проведем через точку (x_0, t_0) обе характеристики:

$$x - at = x_0 - at_0, \quad x + at = x_0 + at_0$$

(рис. 10). Они определяют два угла α_1 и α_2 , называемые верхним и, соответственно, нижним характеристическими углами для точки (x_0, t_0) .

Действие точечного импульса в точке (x_0, t_0) вызывает отклонение, равное $\frac{1}{2a} \frac{I_0}{\rho}$ внутри верхнего характеристического угла и нулю вне его.

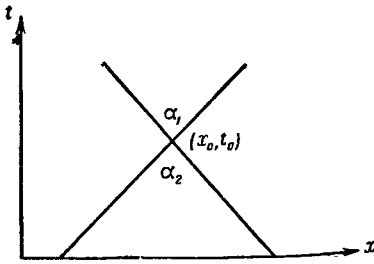


Рис. 10.

4. Неоднородное уравнение.

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения колебаний

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{a^2} u_{tt} &= u_{xx} + f(x, t), \\ -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \\ -\infty < x < \infty. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Пусть $w_f(x, t; \tau)$ — решение вспомогательной задачи Коши

$$\frac{1}{a^2} (w_f)_{tt} = (w_f)_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > \tau \quad (15)$$

$$w_f(x, \tau; \tau) = 0, \quad \frac{\partial w_f}{\partial t}(x, \tau; \tau) = f(x, \tau), \quad t = \tau, \quad -\infty < x < \infty. \quad (16)$$

Формула Даламбера (9) дает

$$w_f(x, t; \tau) = w_f(x, t - \tau; \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi. \quad (17)$$

Перепишем формулу Даламбера (9) в виде

$$u(x, t) = \frac{\partial w_\varphi}{\partial t}(x, t; 0) + w_\psi(x, t; 0), \quad (18)$$

где

$$w_\psi(x, t; 0) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi, \quad w_\varphi(x, t; 0) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi) d\xi$$

являются решениями задачи (15), (16) при $\tau = 0$ и $f = \psi(x)$, $f = \varphi(x)$ соответственно, так как непосредственное дифферен-

цирование показывает, что

$$\frac{\partial w_\varphi}{\partial t}(x, t; 0) = \frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \varphi(\xi) d\xi = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2}.$$

Докажем, что справедлива следующая лемма:

Решение неоднородного уравнения (14) с нулевыми начальными данными $u_t(x, 0) = 0$, $u(x, 0) = 0$ имеет вид

$$u(x, t) = a^2 \int_0^t w_f(x, t; \tau) d\tau. \quad (19)$$

Дифференцируя функцию (19) и учитывая условия (16) для $w_f(x, t; \tau)$, находим:

$$u_t(x, t) = a^2 w_f(x, t; t) + a^2 \int_0^t \frac{\partial w_f}{\partial t}(x, t; \tau) d\tau = a^2 \int_0^t \frac{\partial w_f}{\partial t}(x, t; \tau) d\tau, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= a^2 \frac{\partial w_f}{\partial t}(x, t; t) + a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}(x, t; \tau) d\tau = \\ &= a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}(x, t; \tau) d\tau + a^2 f(x, t), \end{aligned}$$

$$u_{xx} = a^2 \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial x^2}(x, t; \tau) d\tau = \int_0^t \frac{\partial^2 w_f}{\partial t^2}(x, t; \tau) d\tau.$$

Отсюда видно, что функция (19) удовлетворяет уравнению (14). Из формул (19) и (20) сразу следует:

Решение задачи (14), в силу (18) и (19), можно представить в виде

$$u(x, t) = \frac{\partial w_\varphi}{\partial t}(x, t; 0) + w_\psi(x, t; 0) + a^2 \int_0^t w_f(x, t; \tau) d\tau. \quad (21)$$

Пользуясь выражением (17) для w_f , получим:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{a}{2} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (22) \end{aligned}$$

Прямая подстановка (22) в (14) показывает, что функция (22) в самом деле является решением задачи (14), если существуют производные $\varphi''(x)$, $\psi'(x)$ и df/dx .

Из формулы (17) следует, что функция ω_f удовлетворяет уравнению при $t = \tau$, если f дифференцируема по x , т. е. представление (21) возможно при тех же условиях, при которых решение задачи Коши существует.

Формула (21) показывает, что решение общей задачи (14) может быть сразу написано, если имеется решение вспомогательной задачи (15)–(16). Аналогичная формула имеет место и для решения задачи Коши в неограниченном пространстве (см. гл. V).

5. Устойчивость решений. Решение уравнения (1) однозначно определено начальными условиями (2). Докажем, что это решение меняется непрерывно при непрерывном изменении начальных условий.

Каков бы ни был промежуток времени $[0, t_0]$ и какова бы ни была степень точности ε , найдется такое $\delta(\varepsilon, t_0)$, что всякие два решения уравнения (1) $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ в течение промежутка времени t_0 будут различаться между собой меньше чем на ε :

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| < \varepsilon \quad (0 \leq t \leq t_0),$$

если только начальные значения

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(x, 0) = \varphi_1(x), \\ \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) = \psi_1(x) \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_2(x, 0) = \varphi_2(x), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0) = \psi_2(x) \end{array} \right.$$

отличаются друг от друга меньше чем на δ :

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta; \quad |\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta_0$$

Доказательство этой теоремы чрезвычайно просто. Функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ связаны со своими начальными значениями формулой (9) так что

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \frac{|\varphi_1(x+at) - \varphi_2(x+at)|}{2} + \\ + \frac{|\varphi_1(x-at) - \varphi_2(x-at)|}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} |\psi_1(\alpha) - \psi_2(\alpha)| d\alpha,$$

откуда получаем:

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2a} \delta \cdot 2at \leq \delta(1+t_0),$$

что и доказывает наше утверждение, если положить

$$\delta = \frac{\varepsilon}{1+t_0}.$$

Всякий физически определенный процесс, развивающийся во времени, должен характеризоваться функциями, непрерывно зависящими от начальных данных. Если бы не было этой непрерывной зависимости, то два существенно различных процесса могли бы соответствовать практически одинаковым системам начальных условий (различие которых лежит в пределах точности измерений). Процессы такого типа нельзя считать определенными (физически) такими начальными условиями. Из предыдущей теоремы следует, что процесс колебаний струны не только математически, но и физически определен начальными условиями.

Если решение математической задачи непрерывно зависит от дополнительных условий (от начальных, граничных данных и от правой части уравнений — от исходных данных задачи), то говорят, что задача устойчива.

В связи с изучением физически детерминированных явлений вводится понятие корректности. Говорят, что математическая задача поставлена корректно, если 1) решение задачи существует, 2) задача имеет единственное решение, 3) решение задачи непрерывно зависит от исходных данных (устойчиво).

Отметим, что некорректно поставленные задачи часто встречаются в приложениях и к их числу относятся многие хорошо известные математические задачи.

Приведем пример некорректно поставленной задачи, решение которой неустойчиво.

Функция $u(x, y)$, являющаяся решением уравнения Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$, однозначно определяется своими начальными условиями¹⁾ $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u_y(x, 0) = \psi(x)$. Рассмотрим функции $u^{(1)}(x, y) \equiv 0$ и $u^{(2)}(x, y) = \frac{1}{\lambda} \sin \lambda x \cdot \operatorname{ch} \lambda y$, удовлетворяющие уравнению Лапласа. Функция $u^{(2)}(x, y)$ зависит от λ , как от параметра. Начальные значения

$$u^{(1)}(x, 0) = 0, \quad u^{(2)}(x, 0) = \varphi(x) = \frac{1}{\lambda} \sin \lambda x,$$

$$u_y^{(1)}(x, 0) = 0, \quad u_y^{(2)}(x, 0) = \psi(x) = 0$$

различаются сколь угодно мало при достаточно больших λ . Однако при этом решение $u^{(2)}(x, y)$ может стать сколь угодно большим, каково бы ни было фиксированное значение y . Следовательно, задача с начальными условиями для уравнения Лапласа является некорректно поставленной.

¹⁾ Эти условия математически однозначно определяют решение уравнения Лапласа. В самом деле, задание $u_y(x, 0)$ эквивалентно $v_x(x, 0)$, где $v(x, y)$ — функция гармонически сопряженная для $u(x, y)$. Этим с точностью до постоянной однозначно определяется аналитическая функция, действительной частью которой является функция $u(x, y)$ (см. гл. IV, § 1, п. 5).

Естественно возникает вопрос о том, могут ли некорректно поставленные задачи вообще соответствовать каким-либо задачам, представляющим интерес для физики? А также, какую научную ценность может представлять приближенное решение некорректно поставленных задач, поскольку малым ошибкам в условиях задач могут соответствовать большие ошибки решения?

Подобные сомнения возникают в связи с тем, что в сказанном выше подразумевается, что в качестве приближенного решения задачи берется точное решение задачи, соответствующее приближенным условиям.

Приведем пример некорректно поставленной задачи, имеющей важное практическое значение.

Рассмотрим задачу о нахождении производной $z(x) = \frac{df}{dx}$ по равномерным приближенным значениям для $f(x)$. Пусть мера точности при задании $\tilde{f}(x)$ и определении $\tilde{z}(x)$ определена как

$$\max |\tilde{f}(x) - f(x)| \quad \text{и} \quad \max |\tilde{z}(x) - z(x)|.$$

Очевидно, что эта задача с точки зрения приведенной выше терминологии неустойчива (поставлена некорректно). В самом деле, если $\tilde{f}(x) = f(x) + \delta \cos \omega x$, то $\max |\tilde{f}(x) - f(x)| = \delta$ при малом δ . Однако если мы в качестве приближенного значения $\tilde{z}(x)$ выбрали бы точную производную для функции $\tilde{f}(x)$, то

$$\tilde{z}'(x) = \tilde{f}'(x) = \delta \omega \sin \omega x \quad \text{и} \quad \max |\tilde{z}(x) - z(x)| = \delta \omega;$$

$\delta \omega$ при фиксированном δ и большом ω может быть как угодно большим числом. Однако хорошо известно, что в качестве приближенного значения производной берется разностное отношение $\frac{\tilde{f}(x+h) - \tilde{f}(x)}{h}$, которое пред-

ставляет искомую производную с как угодно малой погрешностью, если только h и δ/h достаточно малы. Понятно при этом, что для получения хорошего приближения для df/dx по приближенному значению для $\tilde{f}(x)$ погрешность δ должна быть достаточно мала.

Итак, в рассматриваемом примере, несмотря на неустойчивость задачи, можно указать метод получения сколь угодно точных приближений для искомого решения по достаточно точным приближенным условиям задачи.

Подобное положение типично для многих некорректно поставленных задач¹⁾.

Некорректно поставленные задачи часто встречаются в физике при изучении объектов, недоступных непосредственному исследованию (измерению). В этих случаях приходится делать заключения о характеристиках « z » таких объектов по их косвенным (физически детерминированным) проявлениям « u », доступным для экспериментальных измерений и связанным с « z » функциональной зависимостью вида $A_z = u$. В результате мы приходим к задаче обработки наблюдений, которая является обратной задачей и состоит в определении характеристик « z » объектов по данным « u » эксперимента. Многие из

¹⁾ М. М. Лаврентьев, О некорректных задачах математической физики, Изд. Сиб. отдел. АН СССР, Новосибирск, 1962; А. Н. Тихонов, Решение некорректно поставленных задач и метод регуляризации, ДАН СССР 151, № 3, 501—504 (1963); «О регуляризации некорректно поставленных задач», ДАН СССР 153, № 1, 45—52 (1963); «О нелинейных уравнениях первого рода», ДАН СССР 161, № 5, 1023—1027 (1965).

этих задач являются некорректно поставленными. В частности, приведенная выше задача Коши для уравнения Лапласа имеет непосредственное отношение к обратной задаче гравиметрии (об определении формы тела по создаваемой им аномалии силы тяжести). Приведенный выше пример о вычислении производной по приближенным значениям функции типичен для многих экспериментов, где измерения проводятся по принципу накопления.

Отметим теперь следующее обстоятельство. Очевидно, что функция $u(x, t)$, определяемая формулой (9), может быть решением уравнения (1) только в том случае, если функция $\psi(x)$ дифференцируема, а функция $\varphi(x)$ дифференцируема дважды. Из сказанного ясно, что функции, изображенные на рис. 11 и 12, не могут являться решением уравнения (1), так как они не всюду дважды дифференцируемы. Более того, можно утверждать, что решения уравнения колебаний, удовлетворяющего

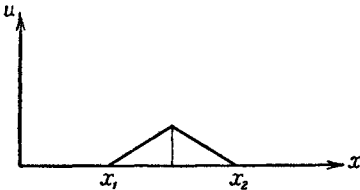


Рис. 11.

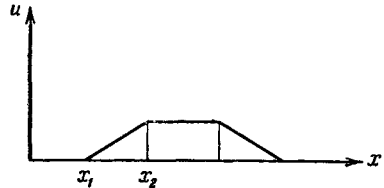


Рис. 12.

условиям (2), не существует, если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ не имеют нужных производных. Действительно, повторяя рассуждения, приведшие нас к формуле (9), мы можем утверждать, что если существует решение уравнения колебаний, то оно должно представляться формулой (9). Если же функции φ , ψ не дифференцируемы достаточное число раз, то формула (9) определяет функцию, не удовлетворяющую уравнению (1), т. е. не существует решения этой задачи.

Однако если немного изменить начальные условия, заменив их дифференцируемыми функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, то этим начальным функциям уже будет соответствовать решение уравнения (1). Кроме того, заметим, что при доказательстве теоремы настоящего пункта мы фактически доказали, что функции, определяемые формулой (9), непрерывно зависят от начальных функций φ и ψ (независимо от того, дифференцируемы эти функции или нет). Таким образом, если некоторым функциям φ , ψ не соответствует решение уравнения колебаний, удовлетворяющее условиям (2), то функция, определяемая формулой (9), является пределом решений уравнения колебаний с немного сглаженными начальными условиями.

Полученные таким предельным переходом функции называются обобщенными решениями. Понятие обобщенных

решений играет большую роль в физике и было введено С. Л. Соболевым¹⁾.

6. Полуограниченная прямая и метод продолжений. Рассмотрим задачу о распространении волн на полуограниченной прямой $x \geq 0$. Эта задача имеет особенно важное значение при изучении процессов отражения волн от конца и ставится следующим образом:

найти решение уравнения колебаний

$$a^2 u_{xx} = u_{tt} \quad \text{при } 0 < x < \infty, t > 0,$$

удовлетворяющее граничному условию

$$u(0, t) = \mu(t) \quad (\text{или } u_x(0, t) = \nu(t)) \quad (t \geq 0)$$

и начальным условиям

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad (0 \leq x < \infty).$$

Рассмотрим сначала случай однородного граничного условия

$$u(0, t) = 0 \quad (\text{или } u_x(0, t) = 0),$$

т. е. задачу о распространении начального возмущения на струне с закрепленным концом $x = 0$ (или свободным концом).

Отметим следующие две леммы о свойствах решений уравнений колебаний, определенных на бесконечной прямой.

1. Если начальные данные в задаче о распространении колебаний на неограниченной прямой (задача (1)–(2)) являются нечетными функциями относительно некоторой точки x_0 , то соответствующее решение в этой точке x_0 равно нулю.

2. Если начальные данные в задаче о распространении колебаний на неограниченной прямой (задача (1)–(2)) являются четными функциями относительно некоторой точки x_0 , то производная по x соответствующего решения в этой точке равна нулю.

Докажем лемму 1. Примем x_0 за начало координат, $x_0 = 0$. В этом случае условия нечетности начальных данных запишутся в виде

$$\varphi(x) = -\varphi(-x); \quad \psi(x) = -\psi(-x).$$

Функция $u(x, t)$, определяемая формулой (9), при $x = 0$ и $t > 0$ равна

$$u(0, t) = \frac{\varphi(at) + \varphi(-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \psi(\alpha) d\alpha = 0,$$

¹⁾ См. подробнее С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1954, а также И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, 1961.

так как первое слагаемое равно нулю в силу нечетности $\varphi(x)$, а второе равно нулю, поскольку интеграл от нечетной функции в пределах, симметричных относительно начала координат, всегда равен нулю.

Аналогично доказывается лемма 2. Условия четности начальных данных имеют вид

$$\varphi(x) = \varphi(-x); \quad \psi(x) = \psi(-x).$$

Заметим, что производная четной функции является функцией нечетной

$$\varphi'(x) = -\varphi'(-x).$$

Из формулы (9) следует:

$$u_x(0, t) = \frac{\varphi'(at) + \varphi'(-at)}{2} + \frac{1}{2a} [\psi(at) - \psi(-at)] = 0, \quad t > 0,$$

так как первое слагаемое равно нулю в силу нечетности $\varphi'(x)$, а второе — в силу четности $\psi(x)$ ¹⁾.

Приведенное выше доказательство фактически опирается на формулу Даламбера и не связано с двукратной дифференцируемостью функции $u(x, t)$. Тем самым доказано, что лемма 1 верна для любых функций, представимых формулой Даламбера, а лемма 2 — для функций того же вида с дифференцируемой функцией $\psi(x)$, т. е. для обобщенных решений задачи (1) — (2).

При помощи этих двух лемм можно решить следующие задачи:

требуется найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} 0 < x < \infty, \quad (2')$$

и граничному условию

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0$$

(первая краевая задача).

Рассмотрим функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$, являющиеся нечетным продолжением $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, входящих в условие (2'):

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{для } x > 0, \\ -\varphi(-x) & \text{для } x < 0, \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{для } x > 0, \\ -\psi(-x) & \text{для } x < 0. \end{cases}$$

¹⁾ Эти две леммы являются следствием того, что если начальные условия четны (или нечетны), то и при $t > 0$ функция $u(x, t)$, определяемая формулой Даламбера, обладает тем же свойством (предоставляем читателю доказать это). Геометрически очевидно, что нечетная непрерывная функция и производная четной дифференцируемой функции равны нулю при $x = 0$.

Функция

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha) d\alpha$$

определена для всех x и $t > 0$. В силу леммы 1

$$u(0, t) = 0.$$

Кроме того, эта функция удовлетворяет при $t = 0$ и $x > 0$ следующим начальным условиям:

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \Phi(x) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \Psi(x) = \psi(x), \end{aligned} \right\} x > 0.$$

Таким образом, рассматривая полученную функцию $u(x, t)$ только для $x \geq 0$, $t \geq 0$, мы получим функцию, удовлетворяющую всем условиям поставленной задачи.

Возвращаясь к прежним функциям, можно написать:

$$u(x, t) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \\ \quad + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha \quad \text{для } t < \frac{x}{a}, \quad x > 0 \\ \frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \\ \quad + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha \quad \text{для } t > \frac{x}{a}, \quad x > 0. \end{array} \right\} \quad (23)$$

В области $t < x/a$ влияние граничных условий не сказывается, и выражение для $u(x, t)$ совпадает с решением (9) для бесконечной прямой.

Аналогично, если при $x = 0$ мы имеем *свободный конец*

$$u_x(0, t) = 0,$$

то, беря четное продолжение функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$,

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{для } x > 0, \\ \varphi(-x) & \text{для } x < 0; \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{для } x > 0, \\ \psi(-x) & \text{для } x < 0, \end{cases}$$

получим решение уравнения колебаний

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha) d\alpha$$

ИЛИ

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha & \text{для } t < \frac{x}{a}, \\ \frac{\varphi(x+at) + \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \left\{ \int_0^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha + \int_0^{at-x} \psi(\alpha) d\alpha \right\} & \text{для } t > \frac{x}{a}, \end{cases}$$

удовлетворяющие в области $x \geq 0$ начальным условиям (2) и граничному условию $u_x(0, t) = 0$.

В дальнейшем при решении различных задач нам часто придется пользоваться методом продолжения на бесконечную область начальных данных, определенных на некоторой части этой области.

Поэтому мы еще раз сформулируем полученные результаты в виде двух следующих правил.

Для решения задачи на полуограниченной прямой с граничным условием $u(0, t) = 0$ начальные данные надо продолжить на всю прямую нечетно.

Для решения задачи на полуограниченной прямой с граничным условием $u_x(0, t) = 0$ начальные данные надо продолжить на всю прямую четно.

Рассмотрим два примера. Пусть начальные данные на полуограниченной прямой, закрепленной при $x = 0$, отличны от нуля только в интервале (a, b) , $0 < a < b$, в котором начальное отклонение, даваемое функций $\varphi(x)$, изображается равнобедренным треугольником, а $\psi(x) = 0$. Решение этой задачи будет полу-

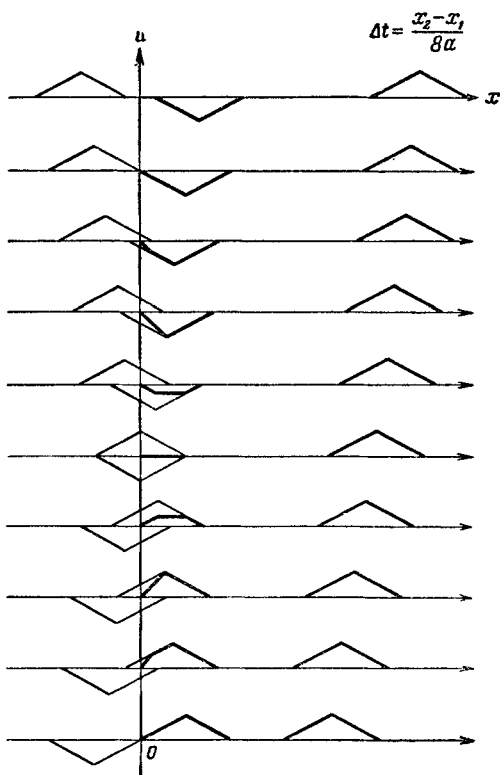


Рис. 13.

Решение этой задачи будет полу-

чено, если начальные данные нечетно продолжить на бесконечную прямую. Процесс распространения волн изображен на рис. 13. Вначале процесс происходит так же, как и на неограниченной прямой. Заданное отклонение разбивается на две волны, движущиеся в разные стороны с постоянной скоростью, причем это продолжается до тех пор, пока полуволна, идущая налево, не дойдет до точки $x = 0$ (рис. 13). В этот момент с левой стороны ($x \leq 0$), на которой происходили аналогичные процессы,

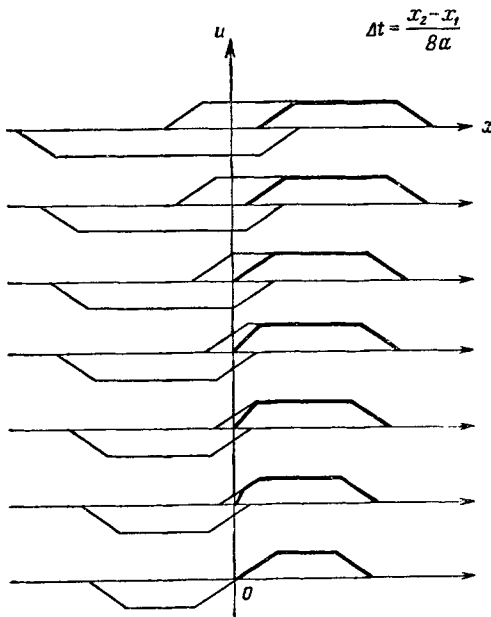


Рис. 14.

к точке $x = 0$ подходит полуволна с «обратной фазой». В последующие моменты происходит отражение полуволны от закрепленного конца. Это изображено в деталях на рис. 13. Профиль отражающейся волны укорачивается, отклонения исчезают, затем отклонения появляются с обратным знаком и, наконец, отраженная полуволна пойдет вправо за ушедшей туда полуволной с той же скоростью. Таким образом, при отражении волны от закрепленного конца струны, ее отклонение меняет знак.

Рассмотрим второй пример. Пусть на полуограниченной прямой $x \geq 0$, закрепленной при $x = 0$, начальное отклонение всюду равно нулю, а начальная скорость $\psi(x)$ отлична от нуля только в интервале (x_1, x_2) ($0 < x_1 < x_2$), причем здесь $\psi(x) = \text{const}$. Продолжим нечетно начальные данные. От каждого интервала (x_1, x_2) и $(-x_1, -x_2)$ распространяются отклонения, подобные отклонениям, изображенным на рис. 14. Как видно из рисунка, в начальной стадии в области $x > 0$ процесс происходит так же, как и на бесконечной прямой. Затем происходит отражение от закрепленного конца и, наконец, волна с профилем в виде равнобедренной трапеции с постоянной скоростью двинется вправо.

Изучение отражения от свободного конца проводится аналогично, только начальные данные нужно продолжать четно,

так что отражение волны от свободного конца будет происходить не с измененной, а с той же фазой.

Мы рассмотрели задачи с однородными граничными условиями

$$u(0, t) = \mu(t) = 0$$

или

$$u_x(0, t) = \nu(t) = 0.$$

В общем случае неоднородных граничных условий решение представляется в виде суммы, каждое слагаемое которой удовлетворяет только одному из поставленных условий (либо граничному, либо начальному).

Обратимся теперь к решению уравнения при нулевых начальных и заданном граничном условии

$$\bar{u}(x, 0) = 0, \quad \bar{u}_t(x, 0) = 0,$$

$$\bar{u}(0, t) = \mu(t), \quad t > 0.$$

Очевидно, что граничный режим вызовет волну, распространяющуюся вдоль струны направо со скоростью a , что подсказывает нам аналитическую форму решения:

$$\bar{u}(x, t) = f(x - at).$$

Определим функцию f из граничного условия

$$\bar{u}(0, t) = f(-at) = \mu(t),$$

откуда

$$f(z) = \mu\left(-\frac{z}{a}\right),$$

так что

$$\bar{u}(x, t) = \mu\left(-\frac{x - at}{a}\right) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

Однако эта функция определена лишь в области $x - at \leq 0$, так как $\mu(t)$ определена для $t \geq 0$. На рис. 15 эта область изображается заштрихованной частью фазовой плоскости.

Чтобы найти $\bar{u}(x, t)$ для всех значений аргументов, продолжим функцию $\mu(t)$ на отрицательные значения t , полагая $\mu(t) = 0$ для $t < 0$. Тогда функция

$$\bar{u}(x, t) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

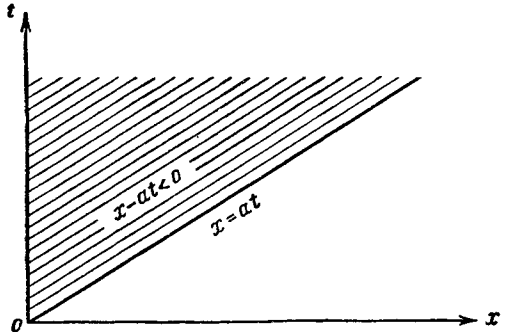


Рис. 15.

будет определена для всех значений аргументов и будет удовлетворять нулевым начальным условиям.

Сумма этой функции и функции (23), определенной в начале настоящего пункта, представляет решение первой краевой задачи для однородного уравнения колебаний. Для полуграниченной струны:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \\ \quad + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha \quad \text{для } t < \frac{x}{a}, \\ \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{\varphi(x+at) - \varphi(at-x)}{2} + \\ \quad + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\alpha) d\alpha \quad \text{для } t > \frac{x}{a}. \end{cases} \quad (24)$$

Аналогично может быть построено решение второй краевой задачи. О третьей краевой задаче см. п. 9, стр. 79.

Мы ограничимся здесь решением краевой задачи для однородного уравнения колебаний.

Решение неоднородного уравнения см. в п. 9.

7. Задачи для ограниченного отрезка. Рассмотрим краевые задачи для ограниченного отрезка $(0, l)$. Будем искать решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t) \end{aligned} \right\} t \geq 0$$

и начальным условиям

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} 0 \leq x \leq l.$$

Рассмотрим предварительно случай однородных граничных условий

$$u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Будем искать решение задачи в этом случае методом продолжения, предполагая возможность следующего представления:

$$u(x, t) = \frac{\Phi(x+at) + \Phi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\alpha) d\alpha,$$

где Φ и Ψ — функции, подлежащие определению. Начальные условия

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \Phi(x) = \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \Psi(x) = \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq x \leq l$$

определяют значения Φ и Ψ в интервале $(0, l)$.

Чтобы удовлетворить нулевым граничным условиям, наложим на функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ требования нечетности относительно точек $x = 0$, $x = l$:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= -\Phi(-x), & \Phi(x) &= -\Phi(2l-x), \\ \Psi(x) &= -\Psi(-x), & \Psi(x) &= -\Psi(2l-x). \end{aligned}$$

Сопоставляя эти равенства, получим:

$$\Phi(x') = \Phi(x' + 2l) \quad (x' = -x)$$

и аналогично для $\Psi(x)$, т. е. Φ и Ψ являются периодическими функциями с периодом $2l$.

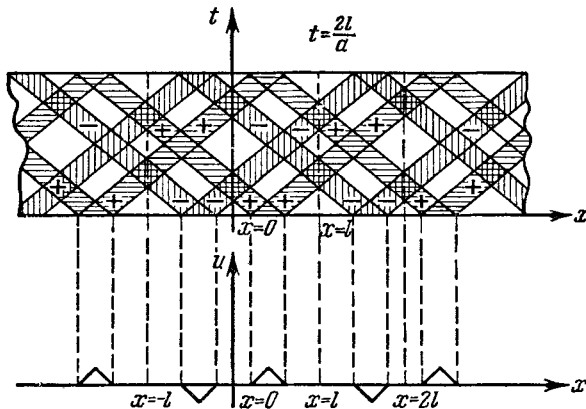


Рис. 16.

Нетрудно видеть, что условия нечетности относительно начала координат и условия периодичности определяют продолжение $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ на всей прямой $-\infty < x < \infty$. Подставляя их в формулу (9), получаем решение задачи.

На рис. 16 совмещены фазовая плоскость (x, t) и плоскость (x, u) , в которой дано начальное отклонение и его продолжение. На фазовой плоскости штриховкой выделены полосы, внутри которых отклонение отлично от нуля (см. рис. 7). Знаки плюс и минус, стоящие в этих полосах, указывают на знак (фазу) отклонения (в виде равнобедренного треугольника).

Пользуясь этим рисунком, легко представить себе профиль отклонения в любой момент t . Так, в момент $t = 2l/a$ мы получим отклонения, совпадающие с начальными. Таким образом, функция $u(x, t)$ будет периодической функцией t с периодом $T = 2l/a$ (см. стр. 92).

Рассмотрим теперь задачу о распространении граничного режима. Будем искать решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

с нулевыми начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x) = 0,$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = 0$$

и граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= \mu(t), \\ u(l, t) &= 0 \end{aligned} \right\} t > 0.$$

Из результатов п. 6 вытекает, что при $t < l/a$ решением служит функция

$$u(x, t) = \bar{\mu}\left(t - \frac{x}{a}\right), \quad \text{где } \bar{\mu}(t) = \begin{cases} \mu(t), & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Однако эта функция не удовлетворяет граничному условию

$$u(l, t) = 0 \quad \text{при } t > l/a.$$

Рассмотрим «отраженную» волну, идущую налево и имеющую при $x = l$ отклонение, равное $\bar{\mu}\left(t - \frac{l}{a}\right)$. Ее аналитическое выражение дается формулой

$$\bar{\mu}\left(t - \frac{l}{a} - \frac{l-x}{a}\right) = \mu\left(t - \frac{2l}{a} + \frac{x}{a}\right).$$

Легко проверить, что разность двух волн

$$\bar{\mu}\left(t - \frac{x}{a}\right) - \bar{\mu}\left(t - \frac{2l}{a} + \frac{x}{a}\right)$$

есть решение уравнения при $t < 2l/a$.

Продолжая этот процесс далее, получим решение в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\mu}\left(t - \frac{2nl}{a} - \frac{x}{a}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}\left(t - \frac{2nl}{a} + \frac{x}{a}\right), \quad (25)$$

содержащего (для каждого фиксированного t) только конечное число отличных от нуля членов, ибо с каждым новым отражением аргумент уменьшается на $2l/a$, а функция $\bar{\mu}(t) = 0$

для $t < 0$. Выполнение граничных условий проверяется непосредственно. В самом деле, положим $x = 0$ и выделим из первой суммы отдельно первое слагаемое при $n = 0$, равное $\mu(t)$. Остальные слагаемые первой и второй сумм, соответствующие одинаковым значениям n , взаимно уничтожаются; это показывает, что $u(0, t) = \mu(t)$.

Заменяя n на $n - 1$ и изменяя в связи с этим пределы суммирования, преобразуем первую сумму к виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu} \left(t - \frac{2nl}{a} + \frac{2l-x}{a} \right).$$

Полагая теперь $x = l$, непосредственно убеждаемся в том, что слагаемые первой и второй сумм взаимно уничтожаются¹⁾.

Формула (25) имеет простой физический смысл. Функция

$$\bar{\mu} \left(t - \frac{x}{a} \right)$$

представляет собой волну, возбуждаемую граничным режимом при $x = 0$, независимо от влияния конца $x = l$, как если бы струна была бесконечна ($0 < x < \infty$). Следующие слагаемые представляют собой последовательные отражения от закрепленного края $x = l$ (вторая сумма) и от края $x = 0$ (первая сумма).

Аналогично, функция

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\mu} \left(t - \frac{(2n+1)l}{a} + \frac{x}{a} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\mu} \left(t - \frac{(2n+1)l}{a} - \frac{x}{a} \right)$$

дает решение однородного уравнения с нулевыми начальными условиями $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = 0$ и граничными условиями $u(0, t) = 0$ и $u(l, t) = \mu(t)$. На доказательстве единственности рассмотренной задачи и непрерывной зависимости решения от начальных и граничных условий мы не останавливаемся.

8. Дисперсия волн. Уравнение колебаний струны $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ допускает решение в виде бегущей волны $u = f(x \pm at)$ произвольной формы. Общее уравнение гиперболического типа с постоянными коэффициентами

$$\bar{u}_{tt} - a^2 \bar{u}_{xx} + b_1 \bar{u}_t + b_2 \bar{u}_x + c \bar{u} = 0 \quad (26)$$

с помощью указанной в гл. I подстановки $\bar{u} = ue^{\lambda x + \mu t}$, где $\mu = -0,5 b_1$, $\lambda = -0,5 b_2/a^2$, сводится к уравнению

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} + cu = 0, \quad (27)$$

¹⁾ Начальные условия также проверяются непосредственно, так как аргументы всех функций отрицательны при $t = 0$ и выражение (25) при $t = 0$ равно нулю.

где $c = \bar{c} + (b_1/2)^2 - (b_2/2a)^2$. Покажем, что уравнение (27) не допускает решений в виде произвольной бегущей волны при $c \neq 0$. В самом деле, подставляя $u = f(x - at)$ в (27), находим $a^2 f'' - a^2 f'' + cf = 0$, откуда, в силу произвольности f , следует $c = 0$.

Импульс или сигнал произвольной формы может быть разложением в интеграл Фурье представлен в виде суперпозиции гармонических волн вида

$$u(x, t) = e^{i(\omega t - kx)},$$

где ω — частота, $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны.

Скорость, с которой фаза волны $\alpha = \omega t - kx$ перемещается в пространстве, называется фазовой скоростью волны и равна, очевидно, $v = \omega/k$. Если фазовая скорость гармонической волны зависит от частоты, то говорят о дисперсии волн. В этом случае гармонические составляющие сигнала смещаются друг относительно друга, в результате чего профиль сигнала искажается.

Очевидно, что если уравнение не допускает решений в виде волн произвольной формы, то фазовая скорость гармонической волны зависит от частоты, т. е. имеет место дисперсия.

Покажем, что для уравнения (27) имеет место дисперсия при $c \neq 0$. Подставляя в (27) $u = e^{i(\omega t - kx)}$, получаем уравнение, связывающее ω и k :

$$\omega^2 - a^2 k^2 + c = 0.$$

Отсюда следует, что фазовая скорость

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + c}} a$$

зависит от частоты. При условии $c = 0$, т. е. для уравнения колебаний струны $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $v = a$ не зависит от частоты и дисперсия отсутствует. Условие $c = 0$ называют также условием отсутствия искажения.

В качестве примера рассмотрим телеграфное уравнение (см. § 1, п. 4)

$$i_{xx} = CLi_{tt} + (CR + LG)i_t + GRi.$$

Полагая $i = ue^{-\mu t}$, где $\mu = 0,5(CR + GL)/CL$, получаем для u уравнение

$$u_{xx} = CLu_{tt} + \bar{c}u,$$

где $\bar{c} = -(CR - LG)^2/4CL$. Отсюда видно, что при $CR \neq LG$ сигнал по кабелю распространяется с искажением, так как имеет место дисперсия волн. Условие

$$CR = LG \quad \text{или} \quad \frac{R}{L} = \frac{G}{C}$$

называется условием отсутствия искажения в линии. В этом случае телеграфное уравнение допускает решение в виде затухающей волны

$$i(x, t) = e^{-\gamma t} f(x - at), \quad \gamma = \frac{R}{L} = \frac{G}{C}, \quad a = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

где f — произвольная функция.

Отсутствие искажения волны при их распространении по кабелю имеет особо важное значение для телефонной и телеграфной связи на больших расстояниях.

9. Интегральное уравнение колебаний. При выводе дифференциального уравнения колебаний (5) в § 1 мы исходили из закона сохранения количества движения, который привел нас к уравнению колебаний в интегральной форме (3). Для того чтобы от интегрального уравнения перейти к дифференциальному, мы предположили, что функция $u(x, t)$ имеет вторые производные. Всякое предположение об ограничении класса рассматриваемых функций некоторым свойством означает отказ от изучения функций, не обладающих предполагаемым свойством. Таким образом, переходя от интегрального уравнения колебаний к дифференциальному, мы исключаем из рассмотрения процессы колебаний, не удовлетворяющие требованию двукратной дифференцируемости.

Покажем, что всю теорию можно развить в классе непрерывных кусочно-дифференцируемых функций, исходя из интегрального уравнения колебаний

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t_2} - \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{t_1} \right] \rho \, d\xi = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_2} - \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x_1} \right] d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F \, d\xi \, d\tau. \quad (28)$$

Этому уравнению можно придать следующую форму. Рассмотрим в плоскости (x, t) область G , ограниченную кусочно-гладкой кривой C , и покажем, что для этой области имеет место интегральное соотношение

$$\int_C \left(\rho \frac{\partial u}{\partial t} dx + k \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) + \iint_G F \, dx \, dt = 0. \quad (29)$$

Для однородной среды эта формула принимает вид

$$\int_C \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) + \iint_G f \, dx \, dt = 0 \quad \left(f = \frac{F}{\rho} \right). \quad (29')$$

Если кривая C является контуром прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, то формула (29) совпадает с формулой (28). Если кривая C состоит из кусков, параллельных осям, то область G можно представить как сумму прямоугольников. Суммируя контурные интегралы, соответствующие отдельным слагаемым, мы получим, что слагаемые, относящиеся к внутренним границам, взаимно уничтожаются, так как интегрирование производится в противоположных направлениях, а остающиеся слагаемые дадут формулу (29). Пусть, далее, кривая C содержит дуги C ,

не параллельные осям и не являющиеся линиями разрыва подынтегральной функции. Возьмем сетку со сторонами, параллельными осям координат, и рассмотрим ячейки сетки, пересекающиеся с областью G . Обозначим через G^* совокупность этих ячеек и через C^* — границу области G^* . Формула (29) применима к G^* . Переходя к пределу при уменьшающихся размерах сетки, нетрудно убедиться в справедливости формулы (29) для предельной кривой C .

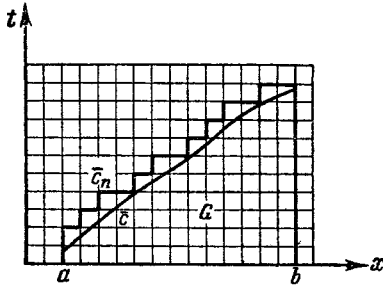


Рис. 17.

Пусть $t = t_n(x)$ — уравнение кривой \bar{C}_n и $t = t(x)$ — уравнение кривой \bar{C} . Очевидно, что $t_n(x)$ равномерно сходится к $t(x)$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \Phi [x, t_n(x)] dx = \int_a^b \Phi [x, t(x)] dx,$$

что и доказывает законность предельного перехода ¹⁾.

Если кривая C содержит дуги, являющиеся линиями разрыва подынтегральной функции, то формула (29) сохраняет силу, если брать в качестве значений подынтегральной функции ее предельные значения с внутренней стороны области G . Таким образом, справедливость интегральной формулы (29) доказана.

Рассмотрим следующую задачу:

найти функцию $u(x, t)$, определенную и кусочно-гладкую в области $-\infty < x < \infty, t \geq 0$, удовлетворяющую уравнению

$$\int_C \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) + \int_G f(x, t) dx dt = 0 \quad (29')$$

и начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x),$$

где $\varphi(x)$ — кусочно-гладкая функция, а $\psi(x)$ и $f(x, t)$ — кусочно-непрерывны. Здесь C — произвольный кусочно-гладкий контур, лежащий в области $t \geq 0$. Покажем, что эта задача имеет единственное решение, определяемое формулой Даламбера.

Допустим, что функция $u(x, t)$ представляет решение нашей задачи. Рассмотрим треугольник ABM (рис. 18), примыкающий к оси $t = 0$ с вершиной в точке $M(x, t)$, со сторонами, являющимися отрезками характеристик

¹⁾ Поскольку $dx = 0$ на вертикальных звеньях ломаной \bar{C}_n , то в этой формуле $t = t_n(x)$ есть уравнение горизонтальных звеньев кривой C_n .

$$\int_{\bar{C}_n} \Phi(x, t) dx \quad \text{или} \quad \int_{\bar{C}_n} \Phi(x, t) dt,$$

где $\Phi(x, t)$ — непрерывная функция и \bar{C}_n — дуга контура C^* , аппроксимирующая дугу \bar{C} (рис. 17).

В самом деле, первое слагаемое формулы (29), примененной к области G^* , состоит из слагаемых типа

$x - at = \text{const}$ и $x + at = \text{const}$ и применим к нему формулу (29'). Вдоль отрезка AM имеет место равенство $\frac{dx}{dt} = a$, так что

$$\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt = a \left(\frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = a du.$$

Вдоль отрезка MB имеет место равенство $\frac{dx}{dt} = -a$, так что

$$\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt = -a \left(\frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) = -a du.$$

Следовательно, подынтегральное выражение вдоль характеристик является полным дифференциалом. Производя интегрирование вдоль отрезков BM и MA , получим:

$$\int_B^M \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) = -a [u(M) - u(B)],$$

$$\int_M^A \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) = a [u(A) - u(M)],$$

так что формула (29') принимает вид:

$$u(M) = \frac{u(B) + u(A)}{2} + \frac{1}{2a} \int_A^B \frac{\partial u}{\partial t} dx + \frac{1}{2a} \iint_{ABM} f dx dt$$

ИЛИ

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi. \quad (30)$$

Таким образом, если решение поставленной задачи существует, то оно однозначно определяется своими начальными значениями. В случае однородного уравнения ($f = 0$) эта формула совпадает с формулой Даламбера. Отсюда следует теорема единственности для рассматриваемой задачи.

Нетрудно непосредственной подстановкой проверить, что функция типа

$$u(x, t) = f_1(x+at) + f_2(x-at) + \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_3(\xi, \tau) d\xi,$$

где f_1 и f_2 — кусочно-гладкие функции, а f_3 — кусочно-непрерывная функция удовлетворяет уравнению (28), а тем самым и уравнению (29'). Это доказывает теорему существования. Решения задач, рассмотренных в п. 3 в качестве примеров, являются кусочно-гладкими функциями и охватываются изложенной теорией.

Обратимся теперь к первой краевой задаче на полуограниченной прямой. Будем искать решение уравнения (29) в некоторой точке $M(x, t)$ для

$t > x/a$ (рис. 19), так как в области $t < x/a$ (под характеристикой $x = at$) влияние граничного режима не сказывается, и решение определяется формулой (30). Применим формулу (29') к четырехугольнику $MAA'B$, в котором MA ,

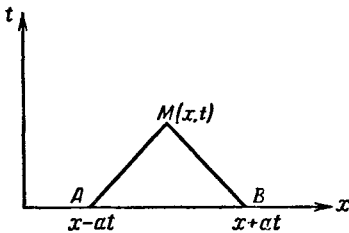


Рис. 18.

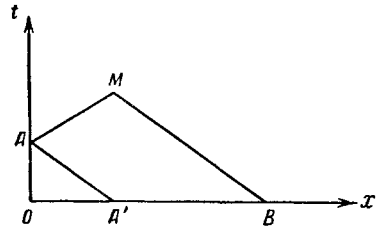


Рис. 19.

MB и AA' — отрезки характеристик. Выполняя интегрирование вдоль характеристик MA , AA' и BM , получим:

$$2au(M) = 2au(A) + au(B) - au(A') + \int_{A'}^B \frac{\partial u}{\partial t} dx + \iint_{MAA'B} f dx dt.$$

Подставляя сюда координаты точек M , A , B и A' , будем иметь:

$$u(x, t) = u\left(0, t - \frac{x}{a}\right) + \frac{u(x + at, 0) - u(at - x, 0)}{2} + \\ + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} dx + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{|x-a(t-\tau)|}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi,$$

или

$$u(x, t) = \mu\left(t - \frac{x}{a}\right) + \frac{\varphi(x + at) - \varphi(at - x)}{2} + \\ + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{|x-a(t-\tau)|}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi \quad \left(t > \frac{x}{a}\right). \quad (31)$$

Из (31) непосредственно следует единственность решения рассматриваемой задачи.

При $f = 0$ эта формула, как нетрудно заметить, совпадает с формулой (24) § 2, п. 6. Аналогичным способом изучается и вторая краевая задача, а также задачи для ограниченного отрезка.

При изучении первой краевой задачи мы видели, что задания двух начальных условий

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x)$$

и одного граничного условия

$$u(0, t) = \mu(t)$$

достаточно для полного определения решения. Отсюда следует, что должно существовать соотношение, связывающее функции φ , ψ , μ и ν , где $\nu(t) = = u_x(0, t)$. Дифференцируя формулу (31) по x и полагая $x = 0$, получаем:

$$\nu(t) = \frac{1}{a} \{\psi(at) - [\mu'(t) - a\varphi'(at)]\}, \quad (32)$$

где для простоты положено $f = 0$. Пользуясь формулой (32), можно, например, третью краевую задачу свести к первой краевой задаче.

10. Распространение разрывов вдоль характеристик. Обратимся к рассмотрению разрывов производных решений уравнения (29). Покажем, что линиями разрыва производных функций $u(x, t)$, удовлетворяющих уравнению (29), могут быть только линии семейств характеристик

$$x - at = \text{const}, \quad x + at = \text{const}.$$

В самом деле, пусть некоторая дифференцируемая кривая, определяемая уравнением

$$x = x(t),$$

является линией разрыва производных непрерывной, кусочно-дифференцируемой функции $u(x, t)$. Предположим для определенности, что $x(t)$ — возрастающая функция. Применим формулу (29') к прямоугольнику $ABCD$ (рис. 20):

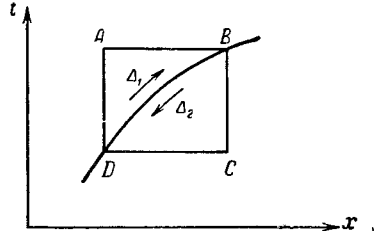


Рис. 20.

$$\int_{BA+AD} \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) + \int_{DC+CB} \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) = 0,$$

а также к криволинейным треугольникам $\Delta_1 = BAD$ и $\Delta_2 = BDC$:

$$\int_{BA+AD} \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) + \int_{DB} \left(\frac{\partial u}{\partial t} x' + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_1 dt = 0,$$

$$\int_{DC+CB} \left(\frac{\partial u}{\partial t} dx + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt \right) - \int_{DB} \left(\frac{\partial u}{\partial t} x' + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_2 dt = 0,$$

где скобки $()_{1,2}$ показывают, что надо брать предельные значения изнутри треугольников Δ_1 или Δ_2 . Вычитая из суммы последних двух равенств предшествующее, получим:

$$\int_{DB} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} x' + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_1 - \left(\frac{\partial u}{\partial t} x' + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_2 \right\} dt = 0$$

или в силу произвольной малости дуги DB

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] x' + a^2 \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0. \tag{33}$$

где, как обычно, скобками обозначается величина разрыва функции

$$[f] = f_2 - f_1.$$

Возьмем производную по t от значения функции $u(x, t)$ вдоль линии разрыва производных

$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i x' + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i \quad (i = 1, 2),$$

причем в качестве значения производных можно брать предельные значения как из Δ_1 , так и из Δ_2 . Разность правых частей при $i = 1$ и $i = 2$ дает:

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right] + x' \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0.$$

Сопоставляя это равенство с равенством (33) и предполагая, что по крайней мере один из разрывов $\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]$, $\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]$ отличен от нуля, видим, что эти равенства возможны одновременно, если детерминант этой системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} x' & a^2 \\ 1 & x' \end{vmatrix} = (x')^2 - a^2 = 0$$

или

$$x = \pm at + \text{const.}$$

Таким образом, линии разрыва производных решения уравнения колебаний являются характеристиками.

Задачи

1. Начертить профиль струны для различных моментов времени в следующих случаях:

I. Неограниченная струна ($-\infty < x < \infty$).

а) начальная скорость равна нулю ($\psi(x) = 0$), а начальный профиль струны задан в виде рис. 21;

б) начальное отклонение равно нулю, а начальная скорость имеет постоянное значение $u_t(x, 0) = \psi_0$ на участке струны (x_1, x_2) и равна нулю вне этого участка;

в) начальные условия имеют вид

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < c, \\ \frac{h}{2c^2} x(2c - x) & \text{при } c < x < 2c, \\ 0 & \text{при } x > 2c. \end{cases}$$

II. Полуограниченная струна ($0 \leq x < \infty$).

г) начальная скорость равна нулю ($\psi(x) = 0$), а начальное отклонение задано в виде треугольника, изображенного на рис. 21. Конец струны закреплен;

д) та же задача для струны со свободным концом $x = 0$;

е) начальные условия имеют вид

$$\varphi(x) = 0, \quad \psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < x < c, \\ \psi_0 = \text{const} & \text{при } c < x < 2c, \\ 0 & \text{при } x > 2c; \end{cases}$$

конец струны $x = 0$ закреплен;

ж) аналогичная задача для струны со свободным концом $x = 0$. Профиль струны для всех задач а) — ж) следует начертить для моментов времени

$$t_0 = 0, \quad t_k = \frac{c}{8a} k \quad (k = 1, 2, \dots, 8).$$

Отметить для задач а) — ж) на фазовой плоскости (x, t) зоны, соответствующие различным стадиям процесса.

2. Найти решение задачи 1а) для всех значений переменных x и t (формулы, выражающие функцию $u(x, t)$, различны для разных зон фазовой плоскости).

3. Определить отклонение в некоторой точке x_0, t_0 , пользуясь фазовой плоскостью (x, t) и плоскостью (x, u) , в которой (рис. 21) заданы начальные отклонения ($\psi = 0$), как для случая неограниченной струны, так и для случая полугограниченной струны с закрепленным (или свободным) концом.

4. В начале длинной цилиндрической трубки, заполненной газом, находится поршень, движущийся по произвольному закону $x = f(t)$, со скоростью $v = f'(t) < a$. Начальное смещение и скорость частиц газа равны нулю. Найти смещение газа в сечении с абсциссой x . Рассмотреть случай движения поршня с постоянной скоростью $c < a$. Что можно сказать о решении задачи, если начиная с некоторого момента скорость поршня $v > a$? (см. Приложение 5 к гл. II).

5. Пусть по неограниченной струне бежит волна $u(x, t) = f(x - at)$. Состояние струны в момент $t = 0$ принять за начальное и решить уравнение колебаний при соответствующих начальных условиях. Сравнить с задачей 1а).

6. Неограниченный упругий стержень получен соединением в точке $x=0$ двух стержней с характеристиками

$$k_1, \rho_1, a_1 = \sqrt{k_1/\rho_1} \text{ при } x < 0,$$

$$k_2, \rho_2, a_2 = \sqrt{k_2/\rho_2} \text{ при } x > 0.$$

а) Пусть из области $x < 0$ бежит волна

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right),$$

где f — заданная функция. Найти коэффициенты отражения и преломления волны при прохождении через точку стыка ($x = 0$). Установить, при каких условиях отраженная волна отсутствует.

б) Решить аналогичную задачу, если задано локальное начальное отклонение

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < x_1, \\ \varphi(x) & \text{при } x_1 < x < x_2 < 0, \\ 0 & \text{при } x > x_2, \end{cases}$$

а начальная скорость равна нулю.

7. Пусть в некоторой точке струны $x = x_0$ подвешен груз массы M и из области $x < 0$ бежит волна

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

Найти преломленную и отраженную волны.

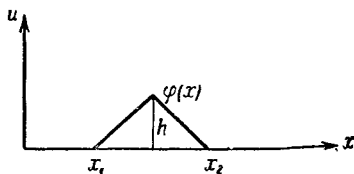


Рис. 21.

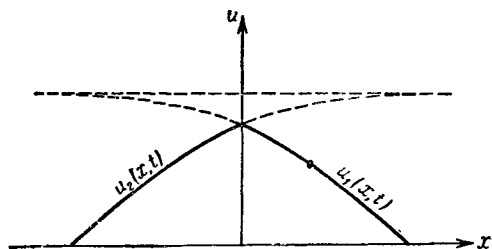


Рис. 22.

8. Полуограниченная трубка ($x > 0$), заполненная идеальным газом, имеет на одном конце, $x = 0$, свободно перемещающийся поршень массы M . В момент времени $t = 0$ поршню при помощи удара сообщают начальную скорость v_0 . Найти процесс распространения волны в газе, если известно что начальные отклонения и начальная скорость частиц газа равны нулю.

Указание. Рассмотреть решение уравнения колебаний в области $x > 0$. Использовать граничное условие

$$Mu_{tt}(0, t) = S\gamma p_0 u_x(0, t)$$

(p_0 — начальное давление газа, S — площадь поперечного сечения трубки, $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$) и начальные условия на границе $u(0, 0) = 0$, $u_t(0, 0) = v_0$.

9. Бесконечная струна, имеющая в точке $x = 0$ сосредоточенную массу M , находится в положении равновесия. В начальный момент времени $t = 0$ ударом молоточка массе M сообщается начальная скорость v_0 . Доказать, что в момент времени $t > 0$ возмущенная струна имеет вид, указанный на рис. 22, где $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ определяются формулами

$$u_1(x, t) = \begin{cases} \frac{Mav_0}{2T} \left[1 - e^{-\frac{2T}{Ma^2}(x-at)} \right] & \text{при } x - at < 0 \text{ (прямая волна),} \\ 0 & \text{при } x - at > 0; \end{cases}$$

$$u_2(x, t) = \begin{cases} \frac{Mav_0}{2T} \left[1 - e^{-\frac{2T}{Ma^2}(x+at)} \right] & \text{при } x + at < 0 \text{ (обратная волна),} \\ 0 & \text{при } x + at > 0. \end{cases}$$

Указание. Воспользоваться условием

$$M \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}(0, t) = M \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}(0, t) = T \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t) - T \frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t).$$

10. Решить задачу о распространении электрических колебаний в бесконечном проводе при условии

$$\frac{G}{C} = \frac{R}{L}$$

и при произвольных начальных условиях.

11. Найти решение интегрального уравнения колебаний для полуограниченной струны при граничных условиях третьего рода (см. п. 9).

12. На конце $x = 0$ полуограниченного стержня укреплена мембрана, оказывающая сопротивление продольным колебаниям стержня, пропорциональное скорости $u_t(0, t)$. Найти процесс колебания, если заданы начальные смещения и $u_t(x, 0) = \psi(x) = 0$.

§ 3. Метод разделения переменных

1. Уравнение свободных колебаний струны. Метод разделения переменных или метод Фурье, является одним из наиболее распространенных методов решения уравнений с частными производными. Изложение этого метода мы проведем для задачи о колебаниях струны, закрепленной на концах. Решение указанной задачи мы рассмотрим с исчерпы-