8. Полуограниченная трубка $(x > 0)$, заполненная идеальным газом, имеет на одном конце, $x = 0$, свободно перемещающийся поршень массы M. В момент времени $t = 0$ поршню при помощи удара сообщают начальную скорость v_0. Найти процесс распространения волны в газе, если известно что начальные отклонения и начальная скорость частиц газа равны нулю.

Указание. Рассмотреть решение уравнения колебаний в области $x > 0$. Использовать граничное условие

$$Mu_{tt}(0, t) = S\gamma p_0 u_x(0, t)$$

(p_0 — начальное давление газа, S — площадь поперечного сечения трубки, $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$) и начальные условия на границе $u(0, 0) = 0$, $u_t(0, 0) = v_0$.

9. Бесконечная струна, имеющая в точке $x = 0$ сосредоточенную массу M, находится в положении равновесия. В начальный момент времени $t = 0$ ударом молоточка массе M сообщается начальная скорость v_0. Доказать, что в момент времени $t > 0$ возмущенная струна имеет вид, указанный на рис. 22, где $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ определяются формулами

$$u_1(x, t) = \begin{cases} \dfrac{Mav_0}{2T}\left[1 - e^{\frac{2T}{Ma^2}(x-at)}\right] & \text{при} \quad x - at < 0 \text{ (прямая волна)}, \\ 0 & \text{при} \quad x - at > 0; \end{cases}$$

$$u_2(x, t) = \begin{cases} \dfrac{Mav_0}{2T}\left[1 - e^{-\frac{2T}{Ma^2}(x+at)}\right] & \text{при} \quad x - at < 0 \text{ (обратная волна)}, \\ 0 & \text{при} \quad x - at > 0. \end{cases}$$

Указание. Воспользоваться условием

$$M\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}(0, t) = M\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}(0, t) = T\frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t) - T\frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t).$$

10. Решить задачу о распространении электрических колебаний в бесконечном проводе при условии

$$\frac{G}{C} = \frac{R}{L}$$

и при произвольных начальных условиях.

11. Найти решение интегрального уравнения колебаний для полуограниченной струны при граничных условиях третьего рода (см. п. 9).

12. На конце $x = 0$ полуограниченного стержня укреплена мембрана, оказывающая сопротивление продольным колебаниям стержня, пропорциональное скорости $u_t(0, t)$. Найти процесс колебания, если заданы начальные смещения и $u_t(x, 0) = \psi(x) = 0$.

§ 3. Метод разделения переменных

1. Уравнение свободных колебаний струны. Метод разделения переменных или метод Фурье, является одним из наиболее распространенных методов решения уравнений с частными производными. Изложение этого метода мы проведем для задачи о колебаниях струны, закрепленной на концах. Решение указанной задачи мы рассмотрим с исчерпывающей подробностью и при дальнейшем изложении курса будем ссылаться на этот параграф, опуская повторения доказательств.

Итак, будем искать решение уравнения

$$u_{tt}=a^2u_{xx}, \tag{1}$$

удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$u(0, t)=0, \quad u(l, t)=0 \tag{2}$$

и начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0)&=\varphi(x), \\ u_t(x, 0)&=\psi(x). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Уравнение (1) линейно и однородно, поэтому сумма частных решений также является решением этого уравнения. Имея достаточно большое число частных решений, можно попытаться при помощи суммирования их с некоторыми коэффициентами найти искомое решение.

Поставим основную вспомогательную задачу: *найти решение уравнения*

$$u_{tt}=a^2u_{xx},$$

не равное тождественно нулю, удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} u(0, t)&=0, \\ u(l, t)&=0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

и представимое в виде произведения

$$u(x, t)=X(x)\,T(t), \tag{5}$$

где $X(x)$ — функция только переменного x, $T(t)$ — функция только переменного t.

Подставляя предполагаемую форму решения (5) в уравнение (1), получим:

$$X''T=\frac{1}{a^2}T''X$$

или, после деления на XT,

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}. \tag{6}$$

Чтобы функция (5) была решением уравнения (1), равенство (6) должно удовлетворяться тождественно, т. е. для всех значений независимых переменных $0<x<l$, $t>0$. Правая часть равенства (6) является функцией только переменного t, а левая — только x. Фиксируя, например, некоторое значение x и меняя t (или наоборот), получим, что правая и левая части равенства (6) при изменении своих аргументов сохраняют постоянное значение

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda, \tag{7}$$

где λ — постоянная, которую для удобства последующих выкладок берем со знаком минус, ничего не предполагая при этом о ее знаке.

Из соотношения (7) получаем обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций $X(x)$ и $T(t)$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad X(x) \not\equiv 0, \tag{8}$$

$$T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0, \qquad T(t) \not\equiv 0. \tag{9}$$

Граничные условия (4) дают:

$$u(0, t) = X(0)\,T(t) = 0,$$

$$u(l, t) = X(l)\,T(t) = 0.$$

Отсюда следует, что функция $X(x)$ должна удовлетворять дополнительным условиям

$$X(0) = X(l) = 0, \tag{10}$$

так как иначе мы имели бы

$$T(t) \equiv 0 \quad \text{и} \quad u(x, t) \equiv 0,$$

в то время как задача состоит в нахождении нетривиального решения. Для функции $T(t)$ в основной вспомогательной задаче никаких дополнительных условий нет.

Таким образом, в связи с нахождением функции $X(x)$ мы приходим к простейшей задаче о собственных значениях:

найти те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи:

$$\left.\begin{aligned} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

а также найти эти решения. Такие значения параметра λ называются собственными значениями, а соответствующие им нетривиальные решения — собственными функциями задачи (11). Сформулированную таким образом задачу часто называют задачей Штурма — Лиувилля.

Рассмотрим отдельно случаи, когда параметр λ отрицателен, равен нулю или положителен.

1. При $\lambda < 0$ задача не имеет нетривиальных решений. Действительно, общее решение уравнения (8) имеет вид

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x}.$$

Граничные условия дают:

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0;$$

$$X(l) = C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha} = 0 \qquad (\alpha = l\sqrt{-\lambda}),$$

т. е.

$$C_1 = -C_2 \quad \text{и} \quad C_1 (e^{\alpha} - e^{-\alpha}) = 0.$$

Но в рассматриваемом случае α — действительно и положительно, так что $e^{\alpha} - e^{-\alpha} \neq 0$. Поэтому

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0$$

и, следовательно,

$$X(x) \equiv 0.$$

2. При $\lambda = 0$ также не существует нетривиальных решений. Действительно, в этом случае общее решение уравнения (8) имеет вид

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

Граничные условия дают:

$$X(0) = [C_1 x + C_2]_{x=0} = C_2 = 0,$$

$$X(l) = C_1 l = 0,$$

т. е. $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$ и, следовательно,

$$X(x) \equiv 0.$$

3. При $\lambda > 0$ общее решение уравнения может быть записано в виде

$$X(x) = D_1 \cos\sqrt{\lambda}\, x + D_2 \sin\sqrt{\lambda}\, x.$$

Граничные условия дают:

$$X(0) = D_1 = 0,$$

$$X(l) = D_2 \sin\sqrt{\lambda}\, l = 0$$

Если $X(x)$ не равно тождественно нулю, то $D_2 \neq 0$, поэтому

$$\sin\sqrt{\lambda}\, l = 0 \tag{12}$$

или

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi n}{l},$$

где n — любое целое число. Следовательно, нетривиальные решения задачи (11) возможны лишь при значениях

$$\lambda = \lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2.$$

Этим собственным значениям соответствуют собственные функции

$$X_n(x) = D_n \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где D_n — произвольная постоянная.

Итак, только при значениях λ, равных

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2, \tag{13}$$

существуют нетривиальные решения задачи (11)

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n}{l} x, \tag{14}$$

определяемые с точностью до произвольного множителя, который мы положили равным единице. Этим же значениям λ_n соответствуют решения уравнения (9)

$$T_n(t) = A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at, \tag{15}$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные.

Возвращаясь к задаче (1)—(3), заключаем, что функции

$$u_n(x, t) = X_n(x) T_n(t) = \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at\right) \sin \frac{\pi n}{l} x \tag{16}$$

являются частными решениями уравнения (1), удовлетворяющими граничным условиям (4) и представимыми в виде произведения (5) двух функций, одна из которых зависит только от x, другая — от t. Эти решения могут удовлетворить начальным условиям (3) нашей исходной задачи только для частных случаев начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Обратимся к решению задачи (1)—(3) в общем случае. В силу линейности и однородности уравнения (1) сумма частных решений

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at\right) \sin \frac{\pi n}{l} x \tag{17}$$

также удовлетворяет этому уравнению и граничным условиям (2). На этом вопросе мы подробнее остановимся несколько позже (см. п. 3 этого параграфа). Начальные условия позволяют определить A_n и B_n. Потребуем, чтобы функция (17) удовлетворяла условиям (3):

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l} aB_n \sin\frac{\pi n}{l}x. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Из теории рядов Фурье известно, что произвольная кусочно-непрерывная и кусочно-дифференцируемая функция $f(x)$, заданная в промежутке $0 \leqslant x \leqslant l$, разлагается в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{19}$$

где[1])

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi. \tag{20}$$

Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям разложения в ряд Фурье, то

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \quad \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi, \tag{21}$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \quad \psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi. \tag{22}$$

---

[1]) Обычно рассматриваются периодические функции с периодом $2l$

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n}{l}x + b_n\sin\frac{\pi n}{l}x\right),$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} F(\xi)\cos\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi.$$

Если функция $F(x)$ нечетна, то $a_n = 0$, так что

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{\pi n}{l}x; \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi = \frac{2}{l}\int_0^l F(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi.$$

Если функция $F(x)$ задана только в промежутке $(0, l)$, то мы можем продолжить ее нечетно и вести разложение в промежутке от $-l$ до $+l$, что и приводит нас к формулам (19) и (20). (См. Б. М. Будак, С. В. Фомин, Кратные интегралы и ряды, «Наука», 1965.)

Сравнение этих рядов с формулами (18) показывает, что для выполнения начальных условий надо положить

$$A_n = \varphi_n, \quad B_n = \frac{l}{\pi n a}\psi_n, \tag{23}$$

чем полностью определяется функция (17), дающая решение исследуемой задачи.

Мы определили решение в виде бесконечного ряда (17). Если ряд (17) расходится или функция, определяемая этим рядом, не является дифференцируемой, то он, конечно, не может представлять решение нашего дифференциального уравнения.

В настоящем пункте мы ограничимся формальным построением решения. Выяснение условий, при которых ряд (17) сходится и представляет решение, будет проведено в п. 3.

2. Интерпретация решения. Обратимся теперь к интерпретации полученного решения. Функцию $u_n(x, t)$ можно представить в виде

$$u_n(x, t) = \left(A_n \cos\frac{\pi n}{l}at + B_n \sin\frac{\pi n}{l}at\right)\sin\frac{\pi n}{l}x =$$

$$= \alpha_n \cos\frac{\pi n}{l}a(t+\delta_n)\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{24}$$

где

$$\alpha_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \quad \frac{\pi n}{l}a\delta_n = -\operatorname{arctg}\frac{B_n}{A_n}. \tag{25}$$

Каждая точка струны x_0 совершает гармонические колебания

$$u_n(x_0, t) = \alpha_n \cos\frac{\pi n}{l}a(t+\delta_n)\sin\frac{\pi n}{l}x_0$$

с амплитудой

$$\alpha_n \sin\frac{\pi n}{l}x_0.$$

Движение струны такого типа называется *стоячей волной*. Точки $x = m\frac{l}{n}$ $(m = 1, 2, \ldots, n-1)$, в которых $\sin\frac{\pi n}{l}x = 0$, в течение всего процесса остаются неподвижными и называются *узлами* стоячей волны $u_n(x, t)$. Точки $x = \frac{2m+1}{2n}l$ $(m = 0, 1, \ldots, n-1)$, в которых $\sin\frac{\pi n}{l}x = \pm 1$, совершают колебания с максимальной амплитудой α_n и называются *пучностями* стоячей волны.

Профиль стоячей волны в любой момент времени представляет синусоиду

$$u_n(x, t) = C_n(t)\sin\frac{\pi n}{l}x,$$

где

$$C_n(t) = \alpha_n \cos\omega_n (t + \delta_n) \quad \left(\omega_n = \frac{\pi n}{l} a\right).$$

В момент времени t, при котором $\cos\omega_n(t+\delta_n) = \pm 1$, отклонения достигают максимальных значений, а скорость движения равна нулю. В моменты времени t, при которых $\cos\omega_n(t + \delta_n) = 0$, отклонение равно нулю, а скорость движения максимальна. Частоты колебаний всех точек струны одинаковы и равны

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l} a. \tag{26}$$

Частоты ω_n называются **собственными частотами** колебаний струны. Для поперечных колебаний струны $a^2 = T/\rho$ и, следовательно,

$$\omega_n = \frac{\pi n}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}. \tag{27}$$

Энергия n-й стоячей волны (n-й **гармоники**) для случая поперечных колебаний струны равна

$$E_n = \frac{1}{2}\int_0^l \left[\rho\left(\frac{\partial u_n}{\partial t}\right)^2 + T\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^2\right] dx =$$

$$= \frac{\alpha_n^2}{2}\int_0^l \left[\rho\omega_n^2 \sin^2\omega_n(t+\delta_n)\sin^2\frac{\pi n}{l}x + \right.$$

$$\left. + T\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \cos^2\omega_n(t+\delta_n)\cos^2\frac{\pi n}{l}x\right] dx =$$

$$= \frac{\alpha_n^2}{2}\frac{l}{2}\left[\rho\omega_n^2\sin^2\omega_n(t+\delta_n) + T\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2\cos^2\omega_n(t+\delta_n)\right], \tag{28}$$

так как

$$\int_0^l \sin^2\frac{\pi n}{l}x\,dx = \int_0^l \cos^2\frac{\pi n}{l}x\,dx = \frac{l}{2}.$$

Пользуясь выражением для α_n, ω_n, а также равенством $T = a^2\rho$, получаем:

$$E_n = \frac{\rho\alpha_n^2\omega_n^2}{4} l = \omega_n^2 M \cdot \frac{A_n^2 + B_n^2}{4}, \tag{29}$$

где $M = l\rho$ — масса струны.

Колебания струны воспринимаются нами обычно по звуку, издаваемому струной. Не останавливаясь на процессе распространения колебаний в воздухе и восприятия звуковых колебаний нашим ухом, можно сказать, что звук струны является наложением «простых тонов», соответствующих стоячим волнам, на которые разлагается колебание. Это разложение звука на простые тона не является операцией только математического характера. Выделение простых тонов можно произвести экспериментально при помощи резонаторов.

Высота тона зависит от частоты колебаний, соответствующих этому тону. Сила тона определяется его энергией и, следовательно, его амплитудой. Самый низкий тон, который может создавать струна, определяется самой низкой собственной частотой $\omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$ и называется основным тоном струны. Остальные тона, соответствующие частотам, кратным ω_1, называются обертонами. Тембр звука зависит от присутствия наряду с основным тоном обертонов и от распределения энергии по гармоникам.

Низший тон струны и ее тембр зависят от способа возбуждения колебаний. Действительно, способ возбуждения колебаний определяет начальные условия

$$u(x, 0) = \varphi(x); \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \tag{3}$$

через которые выражаются коэффициенты A_n и B_n. Если $A_1 = B_1 = 0$, то низшим тоном будет тон, соответствующий частоте ω_n, где n — наименьшее число, для которого A_n или B_n отличны от нуля.

Обычно струна издает один и тот же тон. В самом деле, приведем струну в колебание, оттягивая ее в одну сторону и отпуская без начальной скорости. В этом случае

$$u_t(x, 0) = 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x) > 0$$

и

$$A_1 = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi}{l}\xi\, d\xi > 0,$$

так как

$$\sin\frac{\pi}{l}\xi > 0.$$

Следующие коэффициенты, вообще говоря, значительно меньше A_1, так как функция $\sin\frac{\pi n}{l}\xi$ знакопеременна при $n \geqslant 2$. В частности, если $\varphi(x)$ симметрична относительно середины отрезка, то $A_2 = 0$. Таким образом, если привести струну в колебание, оттягивая ее в одну сторону ($\varphi(x) > 0$), то низшим тоном будет основной тон струны, энергия которого, вообще говоря, больше энергии других гармоник.

Привести струну в колебание можно и другими способами. Например, если начальная функция нечетна относительно середины струны, то

$$A_1 = 0$$

и низший тон соответствует частоте

$$\omega = \omega_2 = \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Если к звучащей струне прикоснуться точно в середине, то звук ее резко меняется и она звучит в октаву к своему тону. Этот прием изменения тона часто применяется при игре на скрипке, гитаре и других струнных инструментах и носит название флажолета. С точки зрения теории колебания струн это явление совершенно ясно. В момент прикосновения к середине струны мы гасим стоячие волны, имеющие в этой точке пучности, и сохраняем лишь гармоники, имеющие в этой точке узлы. Таким образом, остаются только четные гармоники, и самой низкой частотой будет

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Если прикоснуться к струне на расстоянии $1/3$ ее длины от края, то высота основного тона повышается втрое, так как при этом сохраняются лишь гармоники, имеющие узлы в точке $x = l/3$.

Формулы

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad \text{и} \quad \tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2l\sqrt{\frac{\rho}{T}}, \tag{30}$$

определяющие частоту и, соответственно, период основного колебания, объясняют следующие законы колебания струн, открытые впервые экспериментально (законы Мерсена).

1. Для струн одинаковой плотности и одинакового натяжения период колебания струны пропорционален ее длине.

2. При заданной длине струны период меняется обратно пропорционально корню квадратному из натяжения.

3. При заданной длине и натяжении период меняется пропорционально корню квадратному из линейной плотности струны.

Эти правила легко демонстрируются на монохорде.

В настоящем пункте мы рассмотрели стоячие волны, возникающие при колебании струны с закрепленными концами. Вопрос о существовании решения вида

$$u(x, t) = X(x)\,T(t)$$

эквивалентен вопросу о существовании стоячих волн, так как профили этого решения для различных моментов времени пропорциональны.

3. Представление произвольных колебаний в виде суперпозиции стоячих волн. В пункте 1 мы рассмотрели задачу о свободных колебаниях струны, закрепленной на концах, и доказали существование частных решений в виде стоячих волн. Там же была дана формальная схема представления произвольного колебания в виде бесконечной суммы стоячих волн. В настоящем пункте дается обоснование возможности представления произвольного решения в виде суперпозиции стоячих волн. В первую очередь рассмотрим обобщение хорошо известного для конечных сумм принципа суперпозиции на случай бесконечных рядов.

Пусть $L(u)$ — линейный дифференциальный оператор, так что $L(u)$ равен сумме некоторых производных функции (обыкновенных или частных) с коэффициентами, являющимися функциями независимых переменных.

Докажем лемму (обобщенный принцип суперпозиции):

Если функции u_i $(i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ являются частными решениями линейного и однородного дифференциального уравнения $L(u) = 0$ (обыкновенного или с частными производными), то ряд $u = \sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i$ является также решением этого уравнения, если вычисление производных от u, фигурирующих в уравнении $L(u) = 0$, можно совершить при помощи почленного дифференцирования ряда.

В самом деле, если производные u, фигурирующие в уравнении $L(u) = 0$, вычисляются почленным дифференцированием ряда, то в силу линейности уравнения

$$L(u) = L\left(\sum_{i=1}^{\infty} C_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i L(u_i) = 0,$$

так как сходящиеся ряды можно складывать почленно. Тем самым доказано, что функция u удовлетворяет уравнению. В качестве достаточного условия для возможности почленного дифференцирования ряда мы постоянно будем пользоваться условием равномерной сходимости ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i L(u_i), \tag{31}$$

получаемого после дифференцирования[1]).

---

[1]) См. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, «Наука», 1965; Б. М. Будак, С. В. Фомин, Кратные интегралы и ряды, «Наука», 1965.

Вернемся теперь к нашей краевой задаче. Мы должны прежде всего убедиться в непрерывности функции

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{\pi n}{l} at + B_n \sin\frac{\pi n}{l} at\right) \sin\frac{\pi n}{l} x, \tag{32}$$

откуда будет следовать, что $u(x,t)$ непрерывно примыкает к своим начальным и граничным значениям. Для этого достаточно доказать равномерную сходимость ряда для $u(x,t)$, так как общий член этого ряда — непрерывная функция, а равномерно сходящийся ряд непрерывных функций определяет непрерывную функцию. Пользуясь неравенством

$$|u_n(x, t)| \leqslant |A_n| + |B_n|,$$

заключаем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|A_n| + |B_n|) \tag{33}$$

является мажорантным для ряда (32). Если мажорантный ряд (33) сходится, то ряд (32) сходится равномерно, то есть функция $u(x,t)$ непрерывна.

Чтобы убедиться в том, что $u_t(x,t)$ непрерывно примыкает к своим начальным значениям, надо доказать непрерывность этой функции, для чего достаточно доказать равномерную сходимость ряда

$$u_t(x, t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} a\frac{\pi n}{l}\left(-A_n \sin\frac{\pi n}{l} at + B_n \cos\frac{\pi n}{l} at\right) \sin\frac{\pi n}{l} x \tag{34}$$

или сходимость мажорантного ряда

$$\frac{a\pi}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n(|A_n| + |B_n|). \tag{35}$$

Наконец, чтобы убедиться в том, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению, т. е. применим обобщенный принцип суперпозиции, достаточно доказать возможность двукратного почленного дифференцирования ряда для $u(x,t)$, для чего в свою очередь достаточно доказать равномерную сходимость рядов

$$u_{xx} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n \cos\frac{\pi n}{l} at + B_n \sin\frac{\pi n}{l} at\right) \sin\frac{\pi n}{l} x,$$

$$u_{tt} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = -\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n \cos\frac{\pi n}{l} at + B_n \sin\frac{\pi n}{l} at\right) \sin\frac{\pi n}{l} x,$$

которым с точностью до множителей пропорциональности соответствует общий мажорантный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(|A_n|+|B_n|). \tag{36}$$

Так как

$$A_n=\varphi_n, \quad B_n=\frac{l}{\pi n a}\psi_n,$$

где

$$\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx, \quad \psi_n=\frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{\pi n}{l}x\,dx,$$

то наша задача сводится к доказательству сходимости рядов

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} n^k|\varphi_n| \quad (k=0,\ 1,\ 2),\\ &\sum_{n=1}^{\infty} n^k|\psi_n| \quad (k=-1,\ 0,\ 1). \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

С этой целью мы используем известные[1]) свойства рядов Фурье.

Если периодическая с периодом $2l$ функция $F(x)$ имеет k непрерывных производных, а $(k+1)$-я производная ее кусочно-непрерывна, то числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k(|a_n|+|b_n|), \tag{38}$$

где a_n и b_n — коэффициенты Фурье, сходится. Если речь идет о разложении в ряд по $\sin\frac{\pi n}{l}x$ функции $f(x)$, заданной только в промежутке $(0,\ l)$, то надо, чтобы предшествующие требования были выполнены для функции $F(x)$, получающейся при нечетном продолжении $f(x)$. В частности, для непрерывности $F(x)$ необходимо, чтобы $f(0)=0$, так как в противном случае при нечетном продолжении получится разрыв в точке $x=0$; аналогично этому в точке $x=l$ должно быть $f(l)=0$, так как продолженная функция непрерывна и периодична с периодом $2l$. Непрерывность первой производной при $x=0$, $x=l$ получается автоматически при нечетном продолжении. Вообще для непрерывности четных производных продолженной функции надо

[1]) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, «Наука», 1967; Б. М. Будак, С. В. Фомин, Кратные интегралы и ряды, «Наука», 1965.

потребовать, чтобы

$$f^{(k)}(0)=f^{(k)}(l)=0 \qquad (k=0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ 2n). \tag{39}$$

Непрерывность нечетных производных имеет место без дополнительных требований.

Итак, для сходимости рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\varphi_n| \qquad (k=0,\ 1,\ 2)$$

достаточно потребовать, чтобы начальное отклонение $\varphi(x)$ удовлетворяло следующим требованиям.

1° Производные функции $\varphi(x)$ до 2-го порядка включительно непрерывны, третья производная кусочно-непрерывна и, кроме того,

$$\varphi(0)=\varphi(l)=0; \quad \varphi''(0)=\varphi''(l)=0. \tag{40}$$

Для сходимости рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k |\psi_n| \qquad (k=-1,\ 0,\ 1)$$

на начальную скорость $\psi(x)$ следует наложить требования:

2° Функция $\psi(x)$ непрерывно-дифференцируема, имеет кусочно-непрерывную вторую производную и, кроме того,

$$\psi(0)=\psi(l)=0. \tag{41}$$

Таким образом, нами доказано, что любое колебание $u(x,t)$ при начальных функциях $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, удовлетворяющих требованиям 1° и 2°, представляется в виде суперпозиции стоячих волн. Условия 1° и 2° являются достаточными условиями, связанными с примененными здесь способами доказательства.

Аналогичная задача была нами решена в п. 5, § 2 методом распространяющихся волн

$$u(x,t)=\frac{\Phi(x-at)+\Phi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(\alpha)\,d\alpha, \tag{42}$$

где Φ и Ψ являются нечетными относительно 0 и l продолжениями начальных функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, заданных на отрезке $(0,l)$. Функции Φ и Ψ, как было показано, периодичны с периодом $2l$ и поэтому могут быть представлены рядами

$$\Phi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \qquad \Psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n \sin\frac{\pi n}{l}x,$$

где φ_n и ψ_n — коэффициенты Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Подставляя эти ряды в формулу (42) и пользуясь теоремой о синусе и косинусе суммы и разности, получим выражение

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos \frac{\pi n}{l} at + \frac{l}{\pi n a} \psi_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x, \tag{43}$$

совпадающее с представлением, даваемым методом разделения переменных. Следовательно, формула (43) имеет место при тех же предположениях, что и формула (42) (см. п. 1 § 3), которая была получена при условии, что функция $\Phi(x)$ непрерывно-дифференцируема дважды, а функция $\Psi(x)$ — один раз.

Переходя к функциям $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, мы помимо условий дифференцируемости должны потребовать выполнения условий

$$\begin{gathered} \varphi(0) = \varphi(l) = 0, \quad \psi(0) = \psi(l) = 0, \\ \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0. \end{gathered} \tag{44}$$

Таким образом, условия 1° и 2°, являющиеся достаточными для обоснования метода разделения переменных, зависят от метода доказательства и содержат дополнительные условия по сравнению с условиями, обеспечивающими существование решения.

При обосновании возможности представления решения как результата суперпозиции стоячих волн мы привели первый метод доказательства сходимости рядов, поскольку он не связан со специальной формой (42), применимой только к простейшему уравнению колебаний, и без труда может быть перенесен на ряд других задач, хотя этот метод предъявляет несколько повышенные требования к начальным функциям.

4. Неоднородные уравнения. Рассмотрим неоднородное уравнение колебаний

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad a^2 = \frac{k}{\rho}, \quad 0 < x < l \tag{45}$$

с начальными условиями

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned} \right\} \quad 0 \leqslant x \leqslant l \tag{46}$$

и однородными граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0, \end{aligned} \right\} t > 0. \tag{47}$$

Будем искать решение задачи в виде разложения в ряд Фурье по x

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \tag{48}$$

рассматривая при этом t как параметр. Для нахождения $u(x, t)$ надо определить функцию $u_n(t)$. Представим функцию $f(x, t)$

и начальные условия в виде рядов Фурье:

$$\left.\begin{aligned} f(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin\frac{\pi n}{l} x, & f_n(t) &= \frac{2}{l}\int_0^l f(\xi, t) \sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi; \\ \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{\pi n}{l} x, & \varphi_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi) \sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi; \\ \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\frac{\pi n}{l} x, & \psi_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \psi(\xi) \sin\frac{\pi n}{l}\xi\, d\xi. \end{aligned}\right\} \quad (49)$$

Подставляя предполагаемую форму решения (48) в исходное уравнение (45)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n}{l} x \left\{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 u_n(t) - \ddot{u}_n(t) + f_n(t)\right\} = 0,$$

видим, что оно будет удовлетворено, если все коэффициенты разложения равны нулю, т. е.

$$\ddot{u}_n(t) + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 u_n(t) = f_n(t). \quad (50)$$

Для определения $u_n(t)$ мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Начальные условия дают:

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin\frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\frac{\pi n}{l} x,$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{u}_n(0) \sin\frac{\pi n}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \sin\frac{\pi n}{l} x,$$

откуда следует:

$$\left.\begin{aligned} u_n(0) &= \varphi_n, \\ \dot{u}_n(0) &= \psi_n. \end{aligned}\right\} \quad (51)$$

Эти дополнительные условия полностью определяют решение уравнения (50). Функцию $u_n(t)$ можно представить в виде

$$u_n(t) = u_n^{(\mathrm{I})}(t) + u_n^{(\mathrm{II})}(t),$$

где

$$u_n^{(\mathrm{I})}(t) = \frac{l}{\pi n a}\int_0^t \sin\frac{\pi n}{l} a(t-\tau) \cdot f_n(\tau)\, d\tau \quad (52)$$

есть решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями[1]) и

$$u_n^{(II)}(t) = \varphi_n \cos\frac{\pi n}{l} at + \frac{l}{\pi n a}\psi_n \sin\frac{\pi n}{l} at \tag{53}$$

— решение однородного уравнения с заданными начальными условиями. Таким образом, искомое решение запишется в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi n a}\int_0^t \sin\frac{\pi n}{l} a(t-\tau)\sin\frac{\pi n}{l} x \cdot f_n(\tau)\,d\tau +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n \cos\frac{\pi n}{l} at + \frac{l}{\pi n a}\psi_n \sin\frac{\pi n}{l} at\right)\sin\frac{\pi n}{l} x. \tag{54}$$

Вторая сумма представляет решение задачи о свободных колебаниях струны при заданных начальных условиях и была нами исследована ранее достаточно подробно. Обратимся к изучению первой суммы, представляющей вынужденные колебания струны под действием внешней силы при нулевых начальных условиях. Пользуясь выражением (49) для $f_n(t)$, находим:

$$u^{(I)}(x, t) =$$
$$= \int_0^t \int_0^l \left\{\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{l}{\pi n a}\sin\frac{\pi n}{l} a(t-\tau)\sin\frac{\pi n}{l} x \sin\frac{\pi n}{l}\xi\right\} f(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau =$$
$$= \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{55}$$

где

$$G(x, \xi, t-\tau) = \frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{l} a(t-\tau)\sin\frac{\pi n}{l} x \sin\frac{\pi n}{l}\xi. \tag{56}$$

Выясним физический смысл полученного решения. Пусть функция $f(\xi, \tau)$ отлична от нуля в достаточно малой окрестности точки $M_0(\xi_0, \tau_0)$:

$$\xi_0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0 + \Delta\xi, \qquad \tau_0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0 + \Delta\tau.$$

Функция $\rho f(\xi, \tau)$ представляет плотность действующей силы; сила, приложенная к участку $(\xi_0, \xi_0 + \Delta\xi)$, равна

$$F(\tau) = \rho \int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} f(\xi, \tau)\,d\xi,$$

[1]) В этом можно убедиться непосредственно. Формула (52) может быть получена методом вариации постоянных. См. также мелкий шрифт в конце настоящего пункта.

причем

$$I=\int\limits_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau} F(\tau)\,d\tau=\rho\int\limits_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau}\int\limits_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau$$

есть импульс этой силы за время $\Delta\tau$. Если применить теорему о среднем значении к выражению

$$u(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^l G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau=$$

$$=\int\limits_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau}\int\limits_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

будем иметь

$$u(x,t)=G(x,\bar\xi,t-\bar\tau)\int\limits_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau}\int\limits_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{57}$$

где

$$\xi_0\leqslant\bar\xi\leqslant\xi_0+\Delta\xi,\quad \tau_0\leqslant\bar\tau\leqslant\tau_0+\Delta\tau.$$

Переходя в формуле (57) к пределу при $\Delta\xi\to0$ и $\Delta\tau\to0$, получим функцию

$$u(x,t)=G(x,\xi_0,t-\tau_0)\frac{I}{\rho}, \tag{58}$$

которую можно трактовать как влияние мгновенного сосредоточенного импульса мощности I.

Если известна функция $\frac{I}{\rho}G(x,\xi,t-\tau)$, представляющая действие единичного сосредоточенного импульса, то непосредственно ясно, что действие непрерывно распределенной силы $f(x,t)$ должно представляться формулой

$$u(x,t)=$$

$$=\int\limits_0^l\int\limits_0^t G(x,\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{59}$$

совпадающей с формулой (55), полученной выше.

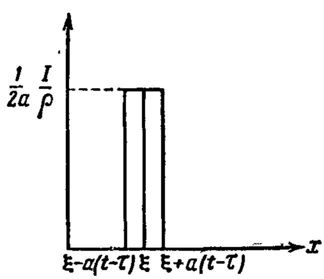

Рис. 23.

Функция влияния сосредоточенного импульса для бесконечной прямой была рассмотрена в предыдущем параграфе. Напомним, что она является кусочно-постоянной функцией, равной $\frac{1}{2a}\frac{I}{\rho}$ внутри верхнего характеристического угла для точки (ξ,τ) и нулю вне этого угла. Функция влияния сосредоточенного импульса для закрепленной струны $(0,l)$ может быть получена из функции влияния для бесконечной струны путем нечетного продолжения относительно точек $x = 0$ и $x = l$.

Рассмотрим момент времени t, достаточно близкий к τ, когда влияние отражения от концов $x = 0$ и $x = l$ еще не сказывается. Для этого момента функция влияния изображается графиком, приведенным на рис. 23. Разложим эту функцию (полагая $I = \rho$) в ряд Фурье по $\sin\frac{\pi n}{l}x$; коэффициенты Фурье будут равны

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l G(\alpha, \xi, t-\tau)\sin\frac{\pi n}{l}\alpha\,d\alpha = \frac{1}{al}\int_{\xi-a(t-\tau)}^{\xi+a(t-\tau)}\sin\frac{\pi n}{l}\alpha\,d\alpha =$$
$$= \frac{1}{a\pi n}\left\{\cos\frac{\pi n}{l}[\xi - a(t-\tau)] - \cos\frac{\pi n}{l}[\xi + a(t-\tau)]\right\} =$$
$$= \frac{2}{a\pi n}\sin\frac{\pi n}{l}\xi\sin\frac{\pi n}{l}a(t-\tau).$$

Отсюда получаем формулу

$$G(x, \xi, t-\tau) = \frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{\pi n}{l}a(t-\tau)\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\sin\frac{\pi n}{l}\xi, \tag{60}$$

которая совпадает с формулой (56), найденной методом разделения переменных.

Для значений t, при которых начинает сказываться влияние закрепленных краев, построение функции влияния при помощи характеристик громоздко; представление же в форме ряда Фурье сохраняет силу и в этом случае.

Мы ограничимся приведенной здесь формальной схемой решения, не выясняя условий применимости полученной формулы.

Рассмотрим неоднородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$L(u) = u^{(n)} + p_1u^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}u^{(1)} + p_nu = f(t) \tag{1*}$$
$$\left(u^{(i)} = \frac{d^iu}{dt^i}\right)$$

и начальными условиями

$$u^{(i)}(0) = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{2*}$$

Его решение дается формулой

$$u(t) = \int_0^t U(t-\tau)f(\tau)\,d\tau, \tag{3*}$$

где $U(t)$ — решение однородного уравнения

$$L(U) = 0$$

с начальными условиями

$$U^{(i)}(0)=0 \quad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-2), \quad U^{(n-1)}(0)=1. \tag{4*}$$

В самом деле, вычисляя производные $u(t)$ дифференцированием правых частей по t, найдем

$$\left.\begin{aligned}
u^{(1)}(t)&=\int_0^t U^{(1)}(t-\tau)f(\tau)\,d\tau+U(0)f(t) && [U(0)=0],\\
u^{(2)}(t)&=\int_0^t U^{(2)}(t-\tau)f(\tau)\,d\tau+U^{(1)}(0)f(t) && [U^{(1)}(0)=0],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u^{(n-1)}(t)&=\int_0^t U^{(n-1)}(t-\tau)f(\tau)\,d\tau+U^{(n-2)}(0)f(t) && [U^{(n-2)}(0)=0],\\
u^{(n)}(t)&=\int_0^t U^{(n)}(t-\tau)f(\tau)\,d\tau+U^{(n-1)}(0)f(t) && [U^{(n-1)}(0)=1].
\end{aligned}\right\} \tag{5*}$$

Подставляя эти производные в уравнение (1*), получаем:

$$L(u)=\int_0^t L[U(t-\tau)]f(\tau)\,d\tau+f(t)=f(t),$$

т. е. уравнение удовлетворяется. Очевидно, что начальные условия (2*) также выполнены.

Нетрудно дать наглядную физическую интерпретацию функции $U(t)$ и формулы (3*). Обычно функция $u(t)$ представляет смещение некоторой системы, а $f(t)$ — силу, действующую на эту систему. Пусть для $t<0$ наша система находилась в состоянии покоя, и ее смещение создается функцией $f_\varepsilon(t)\ (\geqslant 0)$, отличной от нуля только в промежутке времени $0<t<\varepsilon$. Импульс этой силы обозначим

$$I=\int_0^t f_\varepsilon(\tau)\,d\tau.$$

Обозначим $u_\varepsilon(t)$ функцию, соответствующую $f_\varepsilon(t)$, считая ε параметром и полагая $I=1$. Нетрудно убедиться, что при $\varepsilon\to 0$ существует $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(t)$, не зависящий от способа выбора $f_\varepsilon(t)$, и что этот предел равен функции $U(t)$, определенной выше

$$U(t)=\lim_{\varepsilon\to 0} u_\varepsilon(t),$$

если положить $U(t)\equiv 0$ для $t<0$. Таким образом, функцию $U(t)$ естественно назвать функцией влияния мгновенного импульса.

В самом деле, рассматривая формулу (3*) и применяя теорему среднего значения, получаем:

$$u_\varepsilon(t)=U(t-\tau_\varepsilon^*)\int_0^\varepsilon f_\varepsilon(\tau)\,d\tau=U(t-\tau_\varepsilon^*) \qquad (0\leqslant\tau_\varepsilon^*<\varepsilon<t).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, видим, что существует предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} U\left(t - \tau_\varepsilon^*\right) = U(t),$$

что и доказывает наше утверждение.

Перейдем к представлению решения неоднородного уравнения через $U(t)$ — функцию влияния мгновенного импульса. Разбивая промежуток $(0, t)$ точками τ_i на равные части

$$\Delta\tau = \frac{t}{m},$$

представим функцию $f(t)$ в виде

$$f(t) = \sum_{i=1}^{m} f_i(t),$$

где

$$f_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < \tau_i \text{ и } t \geqslant \tau_{i+1}, \\ f(t) & \text{при} \quad \tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}. \end{cases}$$

Тогда функция

$$u(t) = \sum_{i=1}^{m} u_i(t),$$

где $u_i(t)$ суть решения уравнения $L(u_i) = f_i$ с нулевыми начальными данными.

Если m достаточно велико, то функцию $u_i(t)$ можно рассматривать как функцию влияния мгновенного импульса интенсивности

$$I = f_i(\tau_i)\,\Delta\tau = f(\tau_i)\,\Delta\tau,$$

так что

$$u(t) = \sum_{i=1}^{m} U(t - \tau_i) f(\tau_i)\,\Delta\tau \xrightarrow[\Delta\tau \to 0]{} \int_0^t U(t-\tau) f(\tau)\,d\tau,$$

т. е. мы приходим к формуле

$$u(t) = \int_0^t U(t-\tau) f(\tau)\,d\tau,$$

показывающей, что влияние непрерывно действующей силы можно представлять суперпозицией влияний мгновенных импульсов.

В рассмотренном выше случае $u_n^{(1)}$ удовлетворяет уравнению (50) и условиям $u_n(0) = \dot{u}_n(0) = 0$. Для функции влияния $U(t)$ имеем:

$$\ddot{U} + \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 U = 0, \qquad U(0) = 0, \qquad \dot{U}(0) = 1,$$

так что

$$U(t) = \frac{l}{\pi n a} \sin \frac{\pi n}{l} at.$$

Отсюда и из (3*) получаем формулу (52)

$$u_n^{(1)}(t) = \int_0^t U(t-\tau) f_n(\tau)\,d\tau = \frac{l}{\pi n a} \int_0^t \sin \frac{\pi n}{l} a(t-\tau) f_n(\tau)\,d\tau.$$

Полученное выше интегральное представление (3*) решения обыкновенного дифференциального уравнения (1*) имеет, как мы убедились, тот же физический смысл, что и формула (59), дающая интегральное представление решения неоднородного уравнения колебаний.

5. Общая первая краевая задача. Рассмотрим общую первую краевую задачу для уравнения колебаний:

найти решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \ t > 0 \tag{45}$$

с дополнительными условиями

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned}\right\} \ 0 \leqslant x \leqslant l; \tag{46}$$

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t), \end{aligned}\right\} t \geqslant 0. \tag{47}$$

Введем новую неизвестную функцию $v(x, t)$, полагая:

$$u(x, t) = U(x, t) + v(x, t),$$

так что $v(x, t)$ представляет отклонение функции $u(x, t)$ от некоторой известной функции $U(x, t)$.

Эта функция $v(x, t)$ будет определяться как решение уравнения

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + \bar{f}(x, t), \quad \bar{f}(x, t) = f(x, t) - [U_{tt} - a^2 U_{xx}]$$

с дополнительными условиями

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= \bar{\varphi}(x), & \bar{\varphi}(x) &= \varphi(x) - U(x, 0), \\ v_t(x, 0) &= \bar{\psi}(x); & \bar{\psi}(x) &= \psi(x) - U_t(x, 0); \\ v(0, t) &= \bar{\mu}_1(t), & \bar{\mu}_1(t) &= \mu_1(t) - U(0, t), \\ v(l, t) &= \bar{\mu}_2(t); & \bar{\mu}_2(t) &= \mu_2(t) - U(l, t). \end{aligned}$$

Выберем вспомогательную функцию $U(x, t)$, таким образом, чтобы

$$\bar{\mu}_1(t) = 0 \ \text{ и } \ \bar{\mu}_2(t) = 0;$$

для этого достаточно положить

$$U(x, t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}[\mu_2(t) - \mu_1(t)].$$

Тем самым общая краевая задача для функции $u(x, t)$ сведена к краевой задаче для функции $v(x, t)$ при нулевых граничных условиях. Метод решения этой задачи изложен выше (см. п. 4).

6. Краевые задачи со стационарными неоднородностями. Весьма важным классом задач являются краевые задачи со стационарными неоднородностями, когда граничные условия и правая часть уравнения не зависят от времени

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f_0(x), \tag{45'}$$

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= u_1, \quad u_1 = \text{const}, \\ u(l, t) &= u_2, \quad u_2 = \text{const}. \end{aligned}\right\} \tag{47'}$$

В этом случае решение естественно искать в виде суммы

$$u(x, t) = \bar{u}(x) + v(x, t),$$

где $\bar{u}(x)$ — стационарное состояние (статический прогиб) струны, определяемое условиями

$$a^2\bar{u}''(x) + f_0(x) = 0,$$
$$\bar{u}(0) = u_1,$$
$$\bar{u}(l) = u_2,$$

а $v(x, t)$ — отклонение от стационарного состояния. Нетрудно видеть, что функция $\bar{u}(x)$ равна

$$\bar{u}(x) = u_1 + (u_2 - u_1)\frac{x}{l} + \frac{x}{l}\int_0^l d\xi_1 \int_0^{\xi_1} \frac{f_0(\xi_2)}{a^2} d\xi_2 - \int_0^x d\xi_1 \int_0^{\xi_1} \frac{f_0(\xi_2)}{a^2} d\xi_2.$$

В частности, если $f_0 = \text{const}$, то

$$\bar{u}(x) = u_1 + (u_2 - u_1)\frac{x}{l} + \frac{f_0}{2a^2}(lx - x^2).$$

Функция $v(x, t)$, очевидно, удовлетворяет однородному уравнению

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}$$

с однородными граничными условиями

$$v(0, t) = 0,$$
$$v(l, t) = 0$$

и начальными условиями

$$v(x, 0) = \bar{\varphi}(x), \quad \bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - \bar{u}(x),$$
$$v_t(x, 0) = \psi(x).$$

Таким образом, v является решением простейшей краевой задачи, рассмотренной нами в п. 1 настоящего параграфа.

При выводе уравнения колебаний струны и в ряде других случаев мы не принимали во внимание действия силы тяжести. Из сказанного выше следует, что вместо явного учета силы тяжести (и вообще сил, не зависящих от времени) достаточно брать отклонение от стационарного состояния.

Решим простейшую задачу подобного типа при нулевых начальных условиях:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f_0(x), \tag{45''}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \tag{46'}$$

$$u(0, t) = u_1, \quad u(l, t) = u_2. \tag{47''}$$

В этом случае для функции $v(x, t)$ получаем задачу

$$v_{tt} = a^2 v_{xx},$$
$$v(x, 0) = \varphi(x) = -\bar{u}(x), \quad v_t(x, 0) = 0,$$
$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0.$$

Нетрудно убедиться, что для решения этой задачи нет необходимости пользоваться точным аналитическим выражением для $\bar{u}(x)$.

Выражение для $v(x, t)$ согласно формуле (17) имеет вид

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos a\sqrt{\lambda_n} t + B_n \sin a\sqrt{\lambda_n} t) X_n(x),$$

где

$$X_n(x) = \sin\sqrt{\lambda_n} x \quad \left(\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi n}{l}\right)$$

есть собственная функция следующей краевой задачи:

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{8}$$

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \tag{10}$$

Из начальных условий следует, что

$$B_n = 0$$

и

$$A_n = -\frac{2}{l}\int_0^l \bar{u}(x) X_n(x)\,dx.$$

Для вычисления этого интеграла весьма удобным является следующий метод. Пользуясь уравнением (8), находим:

$$X_n(x) = -\frac{1}{\lambda_n} X_n''(x).$$

Подставим это выражение в формулу для A_n и выполним двукратное интегрирование по частям

$$A_n = \frac{2}{l\lambda_n}\int_0^l \bar{u}(x) X_n''(x)\,dx = \frac{2}{l\lambda_n}\left\{\bar{u}X_n'(x)\Big|_0^l - \bar{u}'X_n\Big|_0^l + \int_0^l \bar{u}''X_n(x)\,dx\right\},$$

откуда, учитывая уравнение и граничные условия для $\bar{u}(x)$, находим:

$$A_n = \frac{2}{l\lambda_n}\left[u_2 X_n'(l) - u_1 X_n'(0) - \int_0^l \frac{f_0(x)}{a^2} X_n(x)\,dx\right]$$

или

$$A_n = \frac{2}{\pi n}\left[u_2(-1)^n - u_1 - \int_0^l \frac{f_0(x)}{a^2} X_n(x)\,dx\right].$$

В частности, для однородного уравнения ($f_0(x) = 0$) имеем:

$$A_n = \frac{2}{\pi n}\left[u_2(-1)^n - u_1\right].$$

Этим методом удобно вычислять коэффициенты Фурье для граничных условий второго и третьего рода, а также в случае краевой задачи для неоднородной струны

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dX}{dx}\right] + \lambda\rho(x)X = 0,$$

если известны собственные функции и собственные значения.

7. Задачи без начальных условий. Как было показано выше, задача о колебании струны при заданном граничном режиме может быть сведена к решению неоднородного уравнения с нулевыми граничными условиями.

Однако этот прием зачастую усложняет решение задачи, которое может быть найдено непосредственно.

При изучении влияния граничного режима важно найти какое-нибудь частное решение (однородного уравнения), удовлетворяющее заданным граничным условиям, так как вычисление поправки на начальные данные сводится к решению того же уравнения с нулевыми граничными условиями.

Весьма важным классом задач о распространении граничного режима являются «задачи без начальных условий».

Если граничный режим действует достаточно долго, то благодаря трению, присущему всякой реальной физической системе, влияние начальных данных с течением времени ослабевает. Таким образом, мы естественно приходим к задаче без начальных условий (I):

найти решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - \alpha u_t \quad (\alpha > 0),\quad 0 < x < l,\quad t > -\infty \qquad (61)$$

при заданных граничных условиях:

$$u(0, t) = \mu_1(t),$$
$$u(l, t) = \mu_2(t). \qquad (\mathrm{I}_\alpha)$$

Эту задачу назовем задачей (I_α).

Слагаемое αu_t в правой части уравнения соответствует трению, пропорциональному скорости.

Рассмотрим сначала задачу о распространении периодического граничного режима:

$$u(l, t) = A\cos\omega t \quad (\text{или } u(l, t) = B\sin\omega t), \tag{62}$$

$$u(0, t) = 0. \tag{63}$$

Для дальнейшего нам удобнее записать граничное условие в комплексной форме

$$u(l, t) = Ae^{i\omega t}. \tag{64}$$

Если

$$u(x, t) = u^{(1)}(x, t) + iu^{(2)}(x, t)$$

удовлетворяет уравнению (61) с граничными условиями (63) и (64), то $u^{(1)}(x, t)$ и $u^{(2)}(x, t)$ — его действительная и мнимая части — в отдельности удовлетворяют тому же уравнению (в силу его линейности), условию (63) и граничным условиям при $x = l$

$$u^{(1)}(l, t) = A\cos\omega t,$$

$$u^{(2)}(l, t) = A\sin\omega t.$$

Итак, найдем решение задачи

$$\left.\begin{aligned} u_{tt} &= a^2u_{xx} - \alpha u_t, \\ u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= Ae^{i\omega t}. \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

Полагая

$$u(x, t) = X(x)\,e^{i\omega t}$$

и подставляя это выражение в уравнение, получим для функции $X(x)$ следующую задачу:

$$X'' + k^2X = 0 \quad \left(k^2 = \frac{\omega^2}{a^2} - i\alpha\frac{\omega}{a^2}\right), \tag{66}$$

$$X(0) = 0, \tag{67}$$

$$X(l) = A. \tag{68}$$

Из уравнения (66) и граничного условия (67) находим:

$$X(x) = C\sin kx.$$

Условие при $x = l$ дает:

$$C = \frac{A}{\sin kl}, \tag{69}$$

так что

$$X(x) = A\frac{\sin kx}{\sin kl} = X_1(x) + iX_2(x), \tag{70}$$

где $X_1(x)$ и $X_2(x)$ — действительная и мнимая части $X(x)$.

Искомое решение можно представить в виде

$$u(x,\ t)=[X_1(x)+iX_2(x)]\,e^{i\omega t}=u^{(1)}(x,\ t)+iu^{(2)}(x,\ t),$$

где

$$u^{(1)}(x,\ t)=X_1(x)\cos\omega t-X_2(x)\sin\omega t,$$
$$u^{(2)}(x,\ t)=X_1(x)\sin\omega t+X_2(x)\cos\omega t.$$

Переходя к пределу при $\alpha\to 0$, найдем, что

$$\bar{k}=\lim_{\alpha\to 0}k=\frac{\omega}{a} \tag{71}$$

и, соответственно,

$$\bar{u}^{(1)}(x,\ t)=\lim_{\alpha\to 0}u^{(1)}(x,\ t)=A\,\frac{\sin\frac{\omega}{a}x}{\sin\frac{\omega}{a}l}\cos\omega t, \tag{72}$$

$$\bar{u}^{(2)}(x,\ t)=\lim_{\alpha\to 0}u^{(2)}(x,\ t)=A\,\frac{\sin\frac{\omega}{a}x}{\sin\frac{\omega}{a}l}\sin\omega t. \tag{73}$$

Рассмотрим следующую задачу:

$$\left.\begin{array}{ll} u_{tt}=a^2u_{xx}, & 0<x<l,\ \ t>-\infty; \\ u(0,\ t)=\mu_1(t), & t>-\infty; \\ u(l,\ t)=\mu_2(t), & \end{array}\right\} \qquad (\mathrm{I}_0)$$

которую будем называть задачей (I_0). Очевидно, что $\bar{u}^{(1)}(x,\ t)$ и $\bar{u}^{(2)}(x,\ t)$ являются решениями задачи (I_0) при граничных условиях

$$\bar{u}^{(1)}(0,\ t)=0,\qquad \bar{u}^{(1)}(l,\ t)=A\cos\omega t,$$
$$\bar{u}^{(2)}(0,\ t)=0,\qquad \bar{u}^{(2)}(l,\ t)=A\sin\omega t.$$

Решение задачи при $\alpha=0$ существует не всегда. Если частота вынужденных колебаний ω совпадает с собственной частотой ω_n колебаний струны с закрепленными концами

$$\omega=\omega_n=\frac{\pi n}{l}a,$$

то знаменатель в формулах для $\bar{u}^{(1)}$ и $\bar{u}^{(2)}$ обращается в нуль и решения задачи без начальных условий не существует.

Этот факт имеет простой физический смысл: при $\omega=\omega_n$ наступает резонанс, т. е. не существует установившегося режима. Амплитуда, начиная с некоторого момента $t=t_0$, неограниченно нарастает.

При наличии трения ($\alpha\neq 0$) установившийся режим возможен при любом ω, так как $\sin kl\neq 0$ при комплексном k.

Если $\mu_1(t) = 0$, а $\mu_2(t)$ — периодическая функция, представимая в виде ряда

$$\mu_2(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega nt + B_n \sin \omega nt), \tag{74}$$

где ω — наименьшая частота, A_n и B_n — коэффициенты Фурье, то решение задачи для случая $\alpha = 0$ принимает вид

$$\bar{u}(x, t) = \frac{A_0}{2l} x + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \omega nt + B_n \sin \omega nt) \frac{\sin \frac{\omega n}{a} x}{\sin \frac{\omega n}{a} l},$$

если только ни одна из частот ωn не совпадает с собственными частотами закрепленной струны.

Если же $\mu_2(t)$ — непериодическая функция, то, разлагая ее в интеграл Фурье, аналогичным методом можно получить решение в интегральной форме.

Отметим, что решение задачи без начальных условий при $\alpha = 0$ определено неоднозначно, если только не накладывать каких-либо дополнительных условий. В самом деле, прибавляя к какому-либо решению этой задачи любую комбинацию стоячих волн

$$\sum \left(A_n \cos \frac{\pi n}{l} at + B_n \sin \frac{\pi n}{l} at \right) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные, видим, что эта сумма будет удовлетворять тому же уравнению и тем же граничным условиям.

Чтобы получить единственное решение задачи (I_α) при $\alpha = 0$, введем дополнительное условие «исчезающего трения»:

Решение задачи (I_0) *мы называем удовлетворяющим условию «исчезающего трения», если оно является решением задачи* (I_α) *при* $\alpha \to 0$.

Аналогично решается задача, если конец $x = l$ закреплен, а при $x = 0$ задан граничный режим.

Решение общей задачи без начальных условий

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t)$$

определяется в виде суммы двух слагаемых, для каждого из которых неоднородно лишь одно из граничных условий.

Докажем единственность ограниченного решения задачи без начальных условий для уравнения (61). При этом мы будем предполагать непрерывность решения вместе с его производными до второго порядка включительно в области $0 \leqslant x \leqslant l$, $-\infty < t < t_0$, если граничные значения

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t)$$

определены в области $-\infty < t < t_0$.

Пусть $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ — два ограниченных решения рассматриваемой задачи (I),

$$|u_1| < M, \quad |u_2| < M,$$

где $M > 0$ — некоторое число.

Разность этих функций

$$v(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$$

ограничена ($|v| < 2M$), удовлетворяет уравнению (61) и однородным граничным условиям

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0.$$

Коэффициенты Фурье для функции v

$$v_n(t) = \frac{2}{l}\int_0^l v(x, t) \sin\frac{\pi n}{l} x\, dx,$$

очевидно, удовлетворяют уравнению

$$\ddot{v}_n + \alpha\dot{v}_n + \omega_n^2 v_n = 0 \quad \left(\omega_n = \frac{\pi n}{l} a\right), \tag{*}$$

так как вторые производные функции $v(x,t)$ непрерывны для $0 \leqslant x \leqslant l$.

Общее решение уравнения (*) имеет вид

$$v_n(t) = A_n e^{q_n^{(1)} t} + B_n e^{q_n^{(2)} t}, \tag{**}$$

где $q_n^{(1)}$ и $q_n^{(2)}$ — корни характеристического уравнения, равные

$$q_n^{(1)} = -\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \omega_n^2}, \quad q_n^{(2)} = -\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \omega_n^2} \quad (\alpha > 0).$$

Так как $\alpha > 0$, то $\operatorname{Re} q_n^{(1,2)} < 0$. Следовательно, решение (**) уравнения (*) будет ограниченным при $t \to -\infty$ лишь при $A_n = 0$ и $B_n = 0$, т. е. $v_n(t) \equiv 0$ для любого n.

Таким образом,

$$v(x, t) \equiv 0 \quad \text{и} \quad u_1(x, t) \equiv u_2(x, t).$$

8. Сосредоточенная сила. Рассмотрим задачу о колебаниях струны под действием сосредоточенной силы, приложенной в точке $x = x_0$. Если сила распределена на некотором участке $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, то решение находится по формуле (55). Совершая предельный переход при $\varepsilon \to 0$, можно получить решение поставленной задачи.

С другой стороны, при выводе уравнения колебаний мы видели (см. (8), п. 1 §1), что в точке x_0, к которой приложена сосредоточенная сила, происходит разрыв первой производной, а сама функция остается непрерывной. Решение задачи $u(x, t)$ о колебаниях струны под действием силы, сосредоточенной в точке x_0, можно представить двумя различными функциями:

$$\left.\begin{aligned} u(x, t) &= u_1(x, t) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ u(x, t) &= u_2(x, t) \quad \text{при} \quad x_0 \leqslant x \leqslant l. \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

Эти функции должны удовлетворять уравнению

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \text{при} \quad x \neq x_0, \tag{76}$$

граничным и начальным условиям

$$\left. \begin{aligned} u_1(0, t) &= 0, \quad u(x, 0) = \varphi(x), \\ u_2(l, t) &= 0; \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \end{aligned} \right\} \tag{77}$$

и условиям сопряжения в точке $x = x_0$ (см. (8), § 1), состоящим из условия непрерывности функции $u(x, t)$:

$$u_1(x_0, t) = u_2(x_0, t), \tag{78}$$

и условия, связывающего величину разрыва производной с силой $f(t)$, сосредоточенной в точке x_0:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_0-0}^{x_0+0} = \frac{\partial u_2}{\partial x}(x_0, t) - \frac{\partial u_1}{\partial x}(x_0, t) = -\frac{f(t)}{k}. \tag{79}$$

Заботиться о соблюдении начальных условий нет необходимости. Если мы найдем частное решение уравнений (76), удовлетворяющее граничным условиям из (77), а также (78) и (79), то, прибавляя к нему решение однородного уравнения колебаний, мы всегда сможем удовлетворить заданным начальным условиям.

Рассмотрим частный случай

$$f(t) = A\cos\omega t, \quad -\infty < t < +\infty$$

и найдем решение, удовлетворяющее лишь граничным условиям, предполагая, что сила действует все время, начиная от $t = -\infty$ (установившийся режим), т. е. решим задачу без начальных данных. Будем искать решение в виде

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= X_1(x)\cos\omega t \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ u_2(x, t) &= X_2(x)\cos\omega t \quad \text{при} \quad x_0 \leqslant x \leqslant l. \end{aligned}$$

Из уравнения (76) следует:

$$\left. \begin{aligned} X_1'' + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 X_1 &= 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\ X_2'' + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 X_2 &= 0 \quad \text{при} \quad x_0 \leqslant x \leqslant l. \end{aligned} \right\} \tag{80}$$

Функции X_1 и X_2, кроме того, должны удовлетворять граничным условиям

$$X_1(0) = 0, \quad X_2(l) = 0, \tag{81}$$

вытекающим из (77), и условиям сопряжения

$$X_1(x_0) = X_2(x_0), \quad X_1'(x_0) - X_2'(x_0) = \frac{A}{k}, \tag{82}$$

вытекающим из (78) и (79).

Из уравнения (80) и условий (81) находим:

$$X_1(x) = C\sin\frac{\omega}{a}x, \qquad X_2(x) = D\sin\frac{\omega}{a}(l-x);$$

условия сопряжения (82) дают:

$$C\sin\frac{\omega}{a}x_0 - D\sin\frac{\omega}{a}(l-x_0) = 0,$$

$$C\frac{\omega}{a}\cos\frac{\omega}{a}x_0 + D\frac{\omega}{a}\cos\frac{\omega}{a}(l-x_0) = \frac{A}{k}.$$

Определяя отсюда коэффициенты C и D, получаем:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1 = \dfrac{Aa}{k\omega}\dfrac{\sin\frac{\omega}{a}(l-x_0)}{\sin\frac{\omega}{a}l}\sin\dfrac{\omega}{a}x\cos\omega t & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\[2ex] u_2 = \dfrac{Aa}{k\omega}\dfrac{\sin\frac{\omega}{a}x_0}{\sin\frac{\omega}{a}l}\sin\dfrac{\omega}{a}(l-x)\cos\omega t & \text{при } x_0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Аналогично записывается решение при $f(t) = A\sin\omega t$.

Итак, получено решение для случая $f(t) = A\cos\omega t$ или $f(t) = A\sin\omega t$. Если $f(t)$ — периодическая функция, равная

$$f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos\omega nt + \beta_n\sin\omega nt)$$

(ω — наименьшая частота), то, очевидно,

$$u(x,t) = \begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{k}\left\{\dfrac{\alpha_0 x}{2}\left(1-\dfrac{x_0}{l}\right) + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a\sin\frac{\omega n}{a}(l-x_0)}{\omega n\sin\frac{\omega n}{a}l}\sin\dfrac{\omega nx}{a}\times\right. \\ \qquad\left.\times(\alpha_n\cos\omega nt + \beta_n\sin\omega nt)\right\}, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_0; \\[2ex] u_2 = \dfrac{1}{k}\left\{\dfrac{\alpha_0 x_0}{2}\left(1-\dfrac{x}{l}\right) + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{a\sin\frac{\omega n}{a}x_0}{\omega n\sin\frac{\omega n}{a}l}\sin\dfrac{\omega n(l-x)}{a}\times\right. \\ \qquad\left.\times(\alpha_n\cos\omega nt + \beta_n\sin\omega nt)\right\}, \quad x_0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \qquad (83)[1]$$

[1]) Первые слагаемые этих сумм соответствуют стационарному прогибу, определяемому по величине силы $f(t) = \alpha_0/2 = \text{const}$, как нетрудно видеть, функциями:

$$u = \begin{cases} u_1(x,t) = u_1(x) = \dfrac{1}{k}\dfrac{\alpha_0}{2}x\left(1-\dfrac{x_0}{l}\right) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant x_0, \\[2ex] u_2(x,t) = u_2(x) = \dfrac{1}{k}\dfrac{\alpha_0}{2}x_0\left(1-\dfrac{x}{l}\right) & \text{при } x_0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Если функция $f(t)$ непериодическая, то, представляя ее в виде интеграла Фурье, аналогичным методом можно получить решение в интегральной форме.

Если знаменатель у этих функций (83) равен нулю

$$\sin\frac{\omega n l}{a}=0,$$

$$\omega n=\frac{\pi m}{l}a=\omega_m,$$

т. е. если спектр частот возбуждающей силы содержит одну из частот собственных колебаний (резонанс), то установившегося решения не существует.

Если точка приложения силы x_0 является одним из узлов стоячей волны, соответствующей свободному колебанию с частотой ω_m, то

$$\sin\frac{\omega_m}{a}x_0=0,$$

$$\sin\frac{\omega_m}{a}(l-x_0)=0.$$

При этом числители соответствующих слагаемых для u обращаются в нуль, и явление резонанса не имеет места. Если же точка приложения силы, действующей с частотой ω_m, является пучностью соответствующей стоячей волны с частотой ω_m, то

$$\sin\frac{\omega_m}{a}x_0=1,$$

и явление резонанса будет выражено наиболее резко.

Отсюда следует правило, что для возбуждения резонанса струны при действии на нее сосредоточенной силой надо, чтобы частота ее ω была равна одной из собственных частот струны, а точка приложения силы совпадала с одной из пучностей стоячей волны.

9. Общая схема метода разделения переменных. Метод разделения переменных применим не только для уравнения колебаний однородной струны, но и для уравнения колебаний неоднородной струны. Рассмотрим следующую задачу:

найти решение уравнения

$$L[u]=\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-q(x)\,u=\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad 0<x<l,\quad t>0, \tag{84}$$

удовлетворяющее условиям

$$u(0,t)=0,\qquad u(l,t)=0,\qquad t\geqslant 0, \tag{85}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\qquad u_t(x,0)=\psi(x),\qquad 0\leqslant x\leqslant l. \tag{86}$$

Здесь k, q и ρ — непрерывные на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$ положительные функции ($k > 0$, $\rho > 0$, $q \geqslant 0$) [1]). Проведем решение этой задачи методом разделения переменных. Для отыскания частных решений обратимся, как и раньше, к вспомогательной задаче о существовании стоячих волн:

найти нетривиальное решение уравнения (84), *удовлетворяющее граничным условиям*

$$u(0, t) = 0, \qquad u(l, t) = 0$$

и представимое в виде произведения

$$u(x, t) = X(x)\, T(t).$$

Подставляя предполагаемую форму решения в уравнение и пользуясь граничными условиями, после разделения переменных получаем:

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dX}{dx}\right] - qX + \lambda\rho X = 0,$$

$$T'' + \lambda T = 0.$$

Для определения функции $X(x)$ мы получим следующую краевую задачу на собственные значения[2]):

найти те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решения задачи:

$$L(X) + \lambda\rho X = 0, \tag{87}$$

$$X(0) = 0, \qquad X(l) = 0, \tag{88}$$

а также найти эти решения. Такие значения параметра λ называются собственными значениями, а соответствующие им нетривиальные решения — собственными функциями задачи (87)—(88).

Сформулируем основные свойства собственных функций и собственных значений краевой задачи (87) и (88), необходимые для дальнейшего изложения.

---

[1]) Тот случай, когда $k(x)$ в некоторых точках обращается в нуль, рассматривается отдельно (см. Дополнение II).

[2]) При $\rho = \rho_0 = \text{const}$, $k = k_0 = \text{const}$ мы получаем краевую задачу о собственных колебаниях струны с закрепленными концами:

$$X'' + \mu X = 0 \qquad \left(\mu = \frac{\rho_0}{k_0}\lambda\right),$$

$$X(0) = 0, \qquad X(l) = 0.$$

исследованную в § 2

граничные условия (88), будем иметь [1]:

$$\int_0^l \{X_m L[X_n] - X_n L[X_m]\}\,dx = 0 \qquad (a=0,\quad b=l),$$

откуда, пользуясь уравнением (87), получаем:

$$(\lambda_n - \lambda_m)\int_0^l X_m(x)\,X_n(x)\,\rho(x)\,dx = 0.$$

Таким образом, если $\lambda_n \neq \lambda_m$, то имеет место условие

$$\int_0^l X_m(x)\,X_n(x)\,\rho(x)\,dx = 0, \tag{92}$$

выражающее ортогональность с весом $\rho(x)$ собственных функций $X_m(x)$ и $X_n(x)$.

Докажем теперь, что каждому собственному значению соответствует с точностью до постоянного множителя только одна собственная функция [2]. В самом деле, всякая собственная функция определяется однозначно как решение дифференциального уравнения 2-го порядка по значению самой функции и ее первой производной при $x = 0$. Допустив существование двух функций $\overline{X}$ и $\overline{\overline{X}}$, отвечающих одному и тому же значению λ и обращающихся в нуль при $x = 0$, и беря функцию

$$X^*(x) = \frac{\overline{X}'(0)}{\overline{\overline{X}}'(0)}\,\overline{\overline{X}}(x),$$

---

[1]) Производные X'_m и X'_n непрерывны всюду на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$, включая точки $x = 0$ и $x = l$, так как уравнение (87) дает:

$$k(x)\,X'_m(x) = \int_x^{x_0} (q - \lambda_m\rho)\,X_m\,dx + C.$$

Отсюда и следует существование производной X'_m при $x = 0$ и $x = l$.

[2]) Доказываемое свойство первой краевой задачи основано на том, что два линейно независимых решения дифференциального уравнения 2-го порядка не могут обращаться в нуль в одной и той же точке. Это утверждение относится к краевой задаче с нулевыми граничными условиями. При других граничных условиях (например, $X(0) = X(l)$, $X'(0) = X'(l)$) могут существовать две различные собственные функции, соответствующие одному и тому же собственному значению $\left(X_n^{(1)}(x) = \cos\frac{2\pi n}{l}x,\quad X_n^{(2)}(x) = \sin\frac{2\pi n}{l}x\right.$ при $\left.\lambda_n = \left(\frac{2\pi n}{l}\right)^2,\ n=0, 1, 2, \ldots\right)$.

видим, что эта функция удовлетворяет тому же уравнению 2-го порядка (87) и тем же начальным условиям, что и функция $\overline{X}(x)$:

$$X^*(0)=\frac{\overline{X}'(0)}{\overline{\overline{X}}'(0)}\overline{\overline{X}}(0)=0,$$

$$\frac{dX^*}{dx}(0)=\frac{\overline{X}'(0)}{\overline{\overline{X}}'(0)}\overline{\overline{X}}'(0)=\overline{X}'(0).$$

Тем самым доказано, что $X^*(x)=\overline{X}(x)$ и что

$$\overline{X}(x)=A\overline{\overline{X}}(x)\quad\left(A=\frac{\overline{X}'(0)}{\overline{\overline{X}}'(0)}\right).$$

Отметим, что в процессе доказательства мы пользовались условием $\overline{\overline{X}}'(0)\neq 0$, которое безусловно выполняется, так как решение линейного уравнения (87), определяемое начальными условиями

$$\overline{\overline{X}}(0)=0,\quad \overline{\overline{X}}'(0)=0,$$

тождественно равно нулю и тем самым не может быть собственной функцией (см. стр. 114).

В силу линейности и однородности уравнения и краевых условий очевидно, что если $X_n(x)$ является собственной функцией при собственном значении λ_n, то функция $A_nX_n(x)$ (A_n — произвольная постоянная) также является собственной функцией для того же λ_n. Выше было доказано, что этим вполне исчерпывается класс собственных функций. Собственные функции, отличающиеся множителем, мы, разумеется, не считаем существенно различными. Чтобы исключить неопределенность в выборе множителя, можно подчинить собственные функции требованию нормировки

$$\|X_n\|^2=\int_0^l X_n^2(x)\rho(x)\,dx=1.$$

Если некоторая функция $\widehat{X}_n(x)$ не удовлетворяет этому требованию, то ее можно «нормировать», умножая на коэффициент A_n,

$$A_n\widehat{X}_n(x)=X_n(x),\qquad A_n=\frac{1}{\|X_n\|}.$$

Если подчинить собственные функции задачи (87)—(88) условию нормировки ($\|X_n\|=1$), то они образуют ортогональную и нормированную систему

$$\int_0^l X_m(x)X_n(x)\rho(x)\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ 1, & m=n.\end{cases}$$

видим, что эта функция удовлетворяет тому же уравнению 2-го порядка (87) и тем же начальным условиям, что и функция $\overline{X}(x)$:

$$X^*(0) = \frac{\overline{X}'(0)}{\overline{\overline{X}}'(0)} \overline{\overline{X}}(0) = 0,$$

$$\frac{dX^*}{dx}(0) = \frac{\overline{X}'(0)}{\overline{\overline{X}}'(0)} \overline{\overline{X}}'(0) = \overline{X}'(0).$$

Тем самым доказано, что $X^*(x) = \overline{X}(x)$ и что

$$\overline{X}(x) = A\overline{\overline{X}}(x) \quad \left(A = \frac{\overline{X}'(0)}{\overline{\overline{X}}'(0)}\right).$$

Отметим, что в процессе доказательства мы пользовались условием $\overline{\overline{X}}'(0) \neq 0$, которое безусловно выполняется, так как решение линейного уравнения (87), определяемое начальными условиями

$$\overline{\overline{X}}(0) = 0, \quad \overline{\overline{X}}'(0) = 0,$$

тождественно равно нулю и тем самым не может быть собственной функцией (см. стр. 114).

В силу линейности и однородности уравнения и краевых условий очевидно, что если $X_n(x)$ является собственной функцией при собственном значении λ_n, то функция $A_n X_n(x)$ (A_n — произвольная постоянная) также является собственной функцией для того же λ_n. Выше было доказано, что этим вполне исчерпывается класс собственных функций. Собственные функции, отличающиеся множителем, мы, разумеется, не считаем существенно различными. Чтобы исключить неопределенность в выборе множителя, можно подчинить собственные функции требованию нормировки

$$\|X_n\|^2 = \int_0^l X_n^2(x)\rho(x)\,dx = 1.$$

Если некоторая функция $\hat{X}_n(x)$ не удовлетворяет этому требованию, то ее можно «нормировать», умножая на коэффициент A_n,

$$A_n\hat{X}_n(x) = X_n(x), \qquad A_n = \frac{1}{\|X_n\|}.$$

Если подчинить собственные функции задачи (87)—(88) условию нормировки ($\|X_n\| = 1$), то они образуют ортогональную и нормированную систему

$$\int_0^l X_m(x)X_n(x)\rho(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Обратимся к доказательству свойства 2. Докажем, что $\lambda > 0$ при $q \geqslant 0$. Пусть $X_n(x)$ — нормированная собственная функция, соответствующая собственному значению λ_n, так что

$$L[X_n] = -\lambda_n \rho(x) X_n(x).$$

Умножая обе части этого равенства на $X_n(x)$ и интегрируя по x от 0 до l, получаем:

$$\lambda_n \int_0^l X_n^2(x) \rho(x)\, dx = -\int_0^l X_n(x) L[X_n]\, dx$$

или

$$\lambda_n = -\int_0^l X_n \frac{d}{dx}\left[k(x) \frac{dX_n}{dx}\right] dx + \int_0^l q(x) X_n^2(x)\, dx,$$

так как функция $X_n(x)$ предполагается нормированной. Интегрируя по частям и пользуясь граничными условиями (88), получаем:

$$\lambda_n = -X_n k X_n' \Big|_0^l + \int_0^l k(x)[X_n'(x)]^2 dx + \int_0^l q(x) X_n^2(x)\, dx =$$

$$= \int_0^l k(x)[X_n'(x)]^2 dx + \int_0^l q(x) X_n^2(x)\, dx, \tag{93}$$

откуда и следует, что

$$\lambda_n > 0,$$

так как по условию $k(x) > 0$ и $q(x) \geqslant 0$.

Оставляя доказательство теоремы разложимости в стороне, остановимся вкратце на вычислении коэффициентов разложения.

Нетрудно видеть, что

$$F_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l \rho(x) F(x) X_n(x)\, dx. \tag{94}$$

В самом деле, умножая обе части равенства

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n X_n(x)$$

на $\rho(x) X_n(x)$, интегрируя по x от 0 до l и учитывая ортогональность собственных функций, получаем написанное выше выражение для коэффициентов F_n (**коэффициентов Фурье**)[1].

[1]) Возможность почленного интегрирования ряда следует из теоремы Стеклова о равномерной сходимости ряда (90).

Вернемся теперь к уравнению с частными производными. Для функции $T(t)$ мы имеем уравнение

$$T'' + \lambda_n T = 0 \tag{95}$$

без каких-либо дополнительных условий. В силу доказанной положительности λ_n его решение имеет вид

$$T_n(t) = A_n \cos\sqrt{\lambda_n}t + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}t,$$

где A_n и B_n — неопределенные коэффициенты. Таким образом, вспомогательная задача имеет бесчисленное множество решений вида

$$u_n(x, t) = T_n(t)X_n(x) = \left(A_n \cos\sqrt{\lambda_n}t + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}t\right)X_n(x).$$

Обратимся к решению задачи с заданными начальными условиями. Будем искать решение в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\sqrt{\lambda_n}t + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}t\right)X_n(x). \tag{96}$$

Формальная схема удовлетворения начальным условиям (86) основывается на теореме разложимости 4 и проводится совершенно так же, как и для однородной струны. Из равенств

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x),$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sqrt{\lambda_n} X_n(x)$$

находим, что

$$A_n = \varphi_n, \qquad B_n = \frac{\psi_n}{\sqrt{\lambda_n}}, \tag{97}$$

где φ_n и ψ_n — коэффициенты Фурье функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ при разложении по ортогональной с весом $\rho(x)$ системе функций $\{X_n(x)\}$.

Ограничиваясь общей схемой метода разделения переменных, мы не приводим условий применимости этого метода как в отношении коэффициентов уравнения, так и в отношении начальных функций.

Основополагающие работы по обоснованию этого метода принадлежат В. А. Стеклову[1]).

---

[1]) «Сообщения Харьковского математического общества», вторая серия, т. 5, № 1 и 2 (1896), «Основные задачи математической физики», т. 1 (1922); В. А. Ильин, О разрешимости смешанных задач для гиперболических и параболических уравнений, УМН 15, вып. 2 (1960).

Задачи

1. Найти функцию $u(x, t)$, определяющую процесс колебания струны $(0, l)$, закрепленной на концах и возбуждаемой (рис. 24) оттягиванием ее в точке $x = c$ на величину h, т. е. $u(c, 0) = h$ (см. приложение I). Начальная скорость равна нулю.

2. Закрепленная на концах струна в точке $x = c$ оттянута силой F_0. Найти колебания струны, если в начальный момент сила перестает действовать, а начальная скорость равна нулю.

3. Найти функцию $u(x, t)$, определяющую процесс колебания струны $(0, l)$, закрепленной на концах и возбуждаемой импульсом K, распределенным на отрезке $(c - \delta, c + \delta)$: а) равномерно, б) по закону $v_0 \cos \frac{x - c}{2\delta} \pi$ (см. приложение I), если начальное отклонение равно нулю.

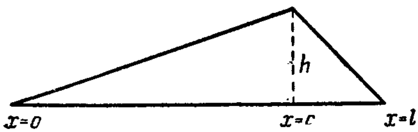

Рис. 24.

4. Найти функцию $u(x, t)$, определяющую колебания струны $(0, l)$, закрепленной на концах и возбуждаемой импульсом K, приложенным в точке $x = c$ (см. приложение I). Начальное отклонение равно нулю.

5. Доказать аддитивность энергии отдельных гармоник для процесса колебаний при граничных условиях $u = 0$, $u_x = 0$. Рассмотреть также случай граничного условия 3-го рода $u_x + hu = 0$ (все ряды предполагать равномерно сходящимися). Вычислить энергию отдельных гармоник в задачах 1, 2, 3, 4.

6. Пружина, закрепленная одним концом в точке $x = 0$, растянута грузом массы M, подвешенным в точке $x = l$. Найти колебания пружины, если в момент $t = 0$ груз падает и в дальнейшем на конец $x = l$ не действуют никакие силы.

7. Один конец стержня закреплен, а на второй действует сила F_0. Найти колебания стержня, если в начальный момент сила перестает действовать.

8. Найти процесс колебания пружины, один конец которой закреплен, а ко второму концу в начальный момент подвешивается груз массы. M. Начальные условия нулевые.

9. К однородной струне с закрепленными концами $x = 0$ и $x = l$ в точке $x = c$ прикреплена масса M. Найти отклонение струны $u(x, t)$, если: а) в начальный момент в точке $x = c$ струна оттянута на величину h от положения равновесия и отпущена без начальной скорости; б) начальное отклонение и начальная скорость равны нулю (см. приложение III).

10. Найти процесс колебания пружины со свободными концами прн равномерном начальном растяжении (представить модель этой задачи).

11. Найти процесс колебания пружины с упруго закрепленными концами при одинаковых коэффициентах жесткости, если начальные условия произвольны.

Решение исследовать при малых h («мягкое» закрепление) и при больших h («жесткое» закрепление) и вычислить соответствующие поправки к собственным значениям для струны со свободными и закрепленными концами.

12. Найти отклонение $u(x, t)$ струны с жестко закрепленными концами, если колебания происходят в среде, сопротивление которой пропорционально скорости, а начальные условия произвольны.

13. Изолированный электрический провод длины l с характеристиками L, R, C и $G = 0$ заряжен до некоторого постоянного потенциала v_0. В начальный момент один конец провода заземляется, а второй остается все время изолированным. Найти распределение напряжения в проводе.

14. Струна с закрепленными концами колеблется под действием гармонической силы, распределенной с плотностью $f(x, t) = \Phi(x)\sin\omega t$. Найти отклонение $u(x, t)$ струны при произвольных начальных условиях. Исследовать возможность резонанса и найти решение в случае резонанса.

15. Решить задачу 14, предполагая, что колебания происходят в среде, сопротивление которой пропорционально скорости. Найти установившиеся колебания, составляющие главную часть решения при $t \to \infty$.

16. Упругий стержень длины l расположен вертикально и жестко прикреплен верхним концом к свободно падающему лифту, который, достигнув скорости v_0, мгновенно останавливается. Найти колебания стержня, предполагая его нижний конец свободным.

17. Решить уравнение

$$u_{tt} = a^2u_{xx} - b^2u + A$$

при нулевых начальных условиях и граничных условиях

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = B,$$

где b, A и B — постоянные.

18. Решить дифференциальное уравнение

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + A\operatorname{sh} x$$

при нулевых начальных условиях и граничных условиях

$$u(0, t) = B, \quad u(l, t) = C,$$

где A, B и C — постоянные.

19. К однородной струне с жестко закрепленными концами $x = 0$ и $x = l$ в точке $x = c$ $(0 < c < l)$ приложена гармоническая сила

$$F(t) = P_0\sin\omega t,$$

действующая, начиная с момента $t = 0$. Найти отклонение струны $u(x, t)$, предполагая начальные условия нулевыми.

20. Решить задачу о колебаниях неоднородного стержня длины l с жестко закрепленными концами, составленного из двух однородных стержней, соединенных в точке $x = c(0 < c < l)$, если начальное отклонение имеет вид

$$u(x, 0) = \begin{cases} \dfrac{h}{c}x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant c, \\ \dfrac{h}{l-c}(l-x) & \text{при } c \leqslant x \leqslant l, \end{cases}$$

а начальные скорости равны нулю.

21. Найти установившиеся колебания пружины, один конец которой закреплен, а на второй действует сила

$$F(t) = A\sin\omega_1 t + B\sin\omega_2 t.$$

22. Найти установившиеся колебания неоднородного стержня, составленного из двух однородных стержней, соединенных в точке $x = c$, если один конец стержня закреплен, а второй движется по закону

$$u(l, t) = A\sin\omega t.$$

§ 4. Задача с данными на характеристиках

1. Постановка задачи. Рассмотрим ряд задач, являющихся развитием первой краевой задачи для уравнения колебаний струны. Для простоты будем изучать явления вблизи одного края, считая другой край удаленным в бесконечность, т. е. в