14. Струна с закрепленными концами колеблется под действием гармонической силы, распределенной с плотностью $f(x, t) = \Phi(x)\sin\omega t$. Найти отклонение $u(x, t)$ струны при произвольных начальных условиях. Исследовать возможность резонанса и найти решение в случае резонанса.

15. Решить задачу 14, предполагая, что колебания происходят в среде, сопротивление которой пропорционально скорости. Найти установившиеся колебания, составляющие главную часть решения при $t \to \infty$.

16. Упругий стержень длины l расположен вертикально и жестко прикреплен верхним концом к свободно падающему лифту, который, достигнув скорости v_0, мгновенно останавливается. Найти колебания стержня, предполагая его нижний конец свободным.

17. Решить уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - b^2 u + A$$

при нулевых начальных условиях и граничных условиях

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = B,$$

где b, A и B — постоянные.

18. Решить дифференциальное уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + A \operatorname{sh} x$$

при нулевых начальных условиях и граничных условиях

$$u(0, t) = B, \quad u(l, t) = C,$$

где A, B и C — постоянные.

19. К однородной струне с жестко закрепленными концами $x = 0$ и $x = l$ в точке $x = c$ $(0 < c < l)$ приложена гармоническая сила

$$F(t) = P_0 \sin\omega t,$$

действующая, начиная с момента $t = 0$. Найти отклонение струны $u(x, t)$, предполагая начальные условия нулевыми.

20. Решить задачу о колебаниях неоднородного стержня длины l с жестко закрепленными концами, составленного из двух однородных стержней, соединенных в точке $x = c(0 < c < l)$, если начальное отклонение имеет вид

$$u(x, 0) = \begin{cases} \dfrac{h}{c}x & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant c, \\[2mm] \dfrac{h}{l-c}(l-x) & \text{при } c \leqslant x \leqslant l, \end{cases}$$

а начальные скорости равны нулю.

21. Найти установившиеся колебания пружины, один конец которой закреплен, а на второй действует сила

$$F(t) = A\sin\omega_1 t + B\sin\omega_2 t.$$

22. Найти установившиеся колебания неоднородного стержня, составленного из двух однородных стержней, соединенных в точке $x = c$, если один конец стержня закреплен, а второй движется по закону

$$u(l, t) = A\sin\omega t.$$

§ 4. Задача с данными на характеристиках

1. Постановка задачи. Рассмотрим ряд задач, являющихся развитием первой краевой задачи для уравнения колебаний струны. Для простоты будем изучать явления вблизи одного края, считая другой край удаленным в бесконечность, т. е. в качестве исходной задачи возьмем задачу для полубесконечной прямой.

Уравнение колебаний струны $u_{t't'} = a^2 u_{xx}$ симметрично относительно переменных x и t, если положить $a^2 = 1$, т. е. изменить масштаб времени, введя переменную $t = at'$. Однако дополнительные условия вносят асимметрию в математическое толкование x и t: в начальных условиях (при $t = 0$) задаются две функции $u(x, 0)$ и $u_t(x, 0)$, в то время как в граничных условиях (при $x = 0$) задается только одна функция $u(0, t)$.

Как было отмечено в § 2, п. 9, между функциями и их нормальными производными при $t = 0$ и $x = 0$ существует соотношение

$$u_t(0, z) + u_x(0, z) = u_t(z, 0) + u_x(z, 0) \quad (a^2 = 1)$$

при произвольном значении z. Отсюда следует, что при $x = 0$ и $t = 0$ нельзя независимым образом задать все эти функции; произвольными являются только три условия, что и указывает на невозможность симметричной постановки дополнительных условий.

Дополнительные условия могут задаваться либо на прямых линиях $x = 0$, $t = 0$ (с задачами подобного рода мы имели дело до сих пор), либо на некоторых кривых в фазовой плоскости. Например, граничные значения можно задавать на некоторой кривой $C_1 (x = R_1(t))$, однако для разрешимости такой задачи кривая C_1 должна помимо достаточной гладкости удовлетворять еще некоторым дополнительным условиям.

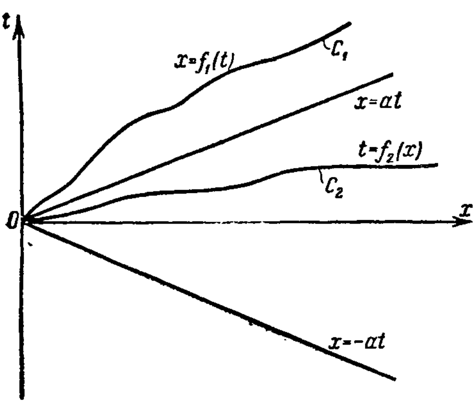

Рис. 25.

Рассмотрим процесс колебаний газа в трубе с подвижной границей (подвижным поршнем). Ясно, что скорость перемещения границы, движущейся по закону $x = f_1(t)$, нельзя считать произвольной: она не должна превосходить скорость звука $a \left(\frac{df_1(t)}{dt} < a \right)$. Геометрическим следствием этого является то, что кривая $C_1 (x = f_1(t))$ должна быть отделена характеристикой от линии $t = 0$ несущей начальные значения (рис. 25). Если хотя бы в одной точке линия C_1 лежала ниже характеристики $x = at$, то значение функции $u(x, t)$ вполне определялось бы начальными условиями и не могло бы задаваться произвольно. Физический смысл этого связан с тем, что при движении газа со скоростями, превосходящими скорость звука, уравнение акустики теряет силу, и надо пользоваться нелинейными уравнениями газовой динамики[1]).

Начальные условия можно задавать не только на оси $t = 0$, но и на некоторой линии C_2 ($t = f_2(x)$), которая должна удовлетворять требованию $|f_2'(x)| < 1/a$ (при этом C_2 лежит в области влияния начальных данных). Задачи подобного типа легко решаются с помощью интегрального уравнения колебаний (см. § 2, п. 7).

Не ставя своей целью дать полный перечень всех возможных краевых задач, рассмотрим более подробно задачу определения решения по данным на характеристиках. Эту краевую задачу часто называют *задачей Гурса*. Задача с данными на характеристиках представляет большой интерес с точки зрения физических приложений. Она встречается, например, при изучении процессов сорбции и десорбции газов (см. приложение V), процессов сушки (см. задачу 1) и многих других задач.

2. Метод последовательных приближений для задачи Гурса. Рассмотрим простейшую задачу с данными на характеристиках

$$\left.\begin{aligned} u_{xy} &= f(x, y), \\ u(x, 0) &= \varphi_1(x), \\ u(0, y) &= \varphi_2(y). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Дополнительные условия даны на прямых $x = 0$ и $y = 0$, являющихся характеристиками уравнения (1). Будем предполагать, что функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(y)$ дифференцируемы и удовлетворяют условию сопряжения $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$. Интегрируя последовательно по x и y уравнение (1), получим:

$$u_y(x, y) = u_y(0, y) + \int_0^x f(\xi, y)\, d\xi,$$

$$u(x, y) = u(x, 0) + u(0, y) - u(0, 0) + \int_0^y d\eta \int_0^x f(\xi, \eta)\, d\xi$$

или

$$u(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \qquad (2)$$

---

[1]) См. приложение IV, стр. 154.

Таким образом, для простейшего уравнения, не содержащего первых производных u_x, u_y и искомой функции, решение представляется в явной аналитической форме (2). Из формулы (2) непосредственно следует единственность и существование решения поставленной задачи.

Перейдем к решению линейного уравнения гиперболического типа

$$u_{xy}=a(x,\ y)\,u_x+b(x,\ y)\,u_y+c(x,\ y)\,u+f(x,\ y) \tag{3}$$

при дополнительных условиях на характеристиках $x=0$, $y=0$

$$\left.\begin{aligned} u(x,\ 0)&=\varphi_1(x),\\ u(0,\ y)&=\varphi_2(y), \end{aligned}\right. \tag{3'}$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(y)$ удовлетворяют требованиям дифференцируемости и сопряжения. Коэффициенты a, b и c будем предполагать непрерывными функциями x и y.

Формула (3) показывает, что функция $u(x,\ y)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} u(x,\ y)=\int_0^y\int_0^x\left[a(\xi,\ \eta)\,u_\xi+b(\xi,\ \eta)\,u_\eta+c(\xi,\ \eta)\,u\right]d\xi\,d\eta+\\ +\varphi_1(x)+\varphi_2(y)-\varphi_1(0)+\int_0^y\int_0^x f(\xi,\ \eta)\,d\xi\,d\eta. \end{aligned} \tag{4}$$

Для его решения воспользуемся методом последовательных приближений. Выберем в качестве нулевого приближения функцию

$$u_0(x,\ y)=0.$$

Тогда (4) дает для последовательных приближений следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} u_1(x,\ y)&=\varphi_1(x)+\varphi_2(y)-\varphi_1(0)+\int_0^y\int_0^x f(\xi,\ \eta)\,d\xi\,d\eta,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ u_n(x,\ y)&=u_1(x,\ y)+\int_0^y\int_0^x\left[a(\xi,\ \eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial\xi}+\right.\\ &\left.+b(\xi,\ \eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial\eta}+c(\xi,\ \eta)\,u_{n-1}\right]d\xi\,d\eta. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Отметим попутно, что

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u_n}{\partial x}&=\frac{\partial u_1}{\partial x}+\int_0^y\left[a(x,\eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}+b(x,\eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta}+c(x,\eta)u_{n-1}\right]d\eta,\\ \frac{\partial u_n}{\partial y}&=\frac{\partial u_1}{\partial y}+\int_0^x\left[a(\xi,y)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi}+b(\xi,y)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}+c(\xi,y)u_{n-1}\right]d\xi.\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

Докажем равномерную сходимость последовательностей

$$\{u_n(x,y)\},\quad \left\{\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)\right\},\quad \left\{\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)\right\}.$$

Для этого рассмотрим разности

$$z_n(x,y)=u_{n+1}(x,y)-u_n(x,y)=$$
$$=\int_0^y\int_0^x\left[a(\xi,\eta)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi}+b(\xi,\eta)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta}+c(\xi,\eta)z_{n-1}(\xi,\eta)\right]d\xi\,d\eta,$$

$$\frac{\partial z_n(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial u_{n+1}(x,y)}{\partial x}-\frac{\partial u_n(x,y)}{\partial x}=$$
$$=\int_0^y\left[a(x,\eta)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}+b(x,\eta)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta}+c(x,\eta)z_{n-1}(x,\eta)\right]d\eta,$$

$$\frac{\partial z_n(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial u_{n+1}(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial u_n(x,y)}{\partial y}=$$
$$=\int_0^x\left[a(\xi,y)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi}+b(\xi,y)\frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}+c(\xi,y)z_{n-1}(\xi,y)\right]d\xi.$$

Пусть M — верхняя граница абсолютных величин коэффициентов $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$ и H — верхняя граница абсолютных величин $z_0=u_1(x,y)$ и ее производных

$$|z_0|<H,\quad \left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right|<H,\quad \left|\frac{\partial z_0}{\partial y}\right|<H$$

при изменении x и y внутри некоторого квадрата ($0\leqslant x\leqslant L$, $0\leqslant y\leqslant L$). Построим мажорантные оценки для функций z_n, $\frac{\partial z_n}{\partial x}$, $\frac{\partial z_n}{\partial y}$. Очевидно, что

$$|z_1|<3HMxy<3HM\frac{(x+y)^2}{2!},$$

$$\left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right|<3HMy<3HM(x+y),$$

$$\left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right|<3HMx<3HM(x+y).$$

Предположим, что имеют место рекуррентные оценки

$$|z_n| < 3HM^nK^{n-1}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| < 3HM^nK^{n-1}\frac{(x+y)^n}{n!},$$

$$\left|\frac{\partial z_n}{\partial y}\right| < 3HM^nK^{n-1}\frac{(x+y)^n}{n!},$$

где $K > 0$ — некоторое постоянное число, значение которого уточним ниже. Пользуясь этими оценками и формулой для $(n+1)$-го приближения после ряда упрощений, усиливающих неравенство, получим:

$$|z_{n+1}| < 3HM^{n+1}K^{n-1}\frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!}\left(\frac{x+y}{n+3}+2\right) <$$

$$< 3HM^{n+1}K^n\frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!} < \frac{3H}{K^2M}\,\frac{(2KLM)^{n+2}}{(n+2)!},$$

$$\left|\frac{\partial z_{n+1}}{\partial x}\right| < 3HM^{n+1}K^{n-1}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{x+y}{n+2}+2\right) <$$

$$< 3HM^{n+1}K^n\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3H}{K}\,\frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\left|\frac{\partial z_{n+1}}{\partial y}\right| < 3HM^{n+1}K^{n-1}\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{x+y}{n+2}+2\right) <$$

$$< 3HM^{n+1}K^n\frac{(x+y)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3H}{K}\,\frac{(2KLM)^{n+1}}{(n+1)!},$$

где

$$K = L + 2.$$

В правых частях этих неравенств с точностью до множителей пропорциональности стоят общие члены разложения e^{2KLM}. Эти оценки показывают, что последовательности функций

$$u_n = u_0 + z_1 + \ldots + z_{n-1},$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial z_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial z_1}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}$$

сходятся равномерно к предельным функциям, которые мы обозначим

$$u(x, y) = \lim_{n\to\infty} u_n(x, y),$$

$$v(x, y) = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial x}(x, y),$$

$$w(x, y) = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y).$$

Переходя к пределу под знаком интеграла в формулах (5) и (6), будем иметь:

$$\left.\begin{aligned} u(x, y) &= u_1(x, y) + \int_0^y \int_0^x [a(\xi, \eta)\, v + b(\xi, \eta)\, w + c(\xi, \eta)\, u]\, d\xi\, d\eta, \\ v(x, y) &= \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y) + \int_0^y [a(x, \eta)\, v + b(x, \eta)\, w + c(x, \eta)\, u]\, d\eta, \\ w(x, y) &= \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y) + \int_0^x [a(\xi, y)\, v + b(\xi, y)\, w + c(\xi, y)\, u]\, d\xi. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Вытекающие отсюда равенства

$$v = u_x,$$

$$w = u_y$$

позволяют установить, что функция $u(x, y)$ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$u(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) - \varphi_1(0) + \int_0^y \int_0^x f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta +$$

$$+ \int_0^y \int_0^x [a(\xi, \eta)\, u_\xi + b(\xi, \eta)\, u_\eta + c(\xi, \eta)\, u]\, d\xi\, d\eta, \quad (4)$$

а также исходному дифференциальному уравнению (3), что проверяется непосредственно дифференцированием (4) по x и y. Функция $\bar{u} = u(x, y)$, как нетрудно убедиться, удовлетворяет и дополнительным условиям.

Докажем теперь единственность решения рассматриваемой задачи (3)—(3′). Допуская существование двух решений $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$, сразу же получаем для их разности

$$U(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$$

однородное интегро-дифференциальное уравнение

$$U(x, y) = \int_0^y \int_0^x (aU_x + bU_y + cU)\, d\xi\, d\eta.$$

Обозначая далее через H_1 верхнюю грань абсолютных величин

$$|U(x, y)| < H_1, \quad |U_x(x, y)| < H_1, \quad |U_y(x, y)| < H_1$$

для $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant y \leqslant L$ и повторяя оценки, проведенные для функций $z_n(x, y)$, убеждаемся в справедливости неравенства

$$|U| < 3H_1 M^{n+1} K^n \frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!} < \frac{3H_1}{K^2 M} \frac{(2KLM)^{n+2}}{(n+2)!}$$

при любом значении n. Отсюда и следует

$$U(x, y) \equiv 0 \quad \text{или} \quad u_1(x, y) \equiv u_2(x, y),$$

что и доказывает единственность решения задачи с данными на характеристиках.

Если коэффициенты a, b и c постоянны, то уравнение (3) с помощью подстановки

$$u = ve^{\lambda x + \mu y}$$

приводится к виду

$$v_{xy} + C_1 v = f. \tag{8}$$

При $C_1 = 0$ мы получаем задачу для простейшего уравнения (1), решение которой дается формулой (2).

Если $C_1 \neq 0$, то решение задачи для уравнения (8) также может быть получено в явной аналитической форме методом, изложенным в § 5.

Задачи

1. Через трубу ($x > 0$), заполненную веществом, содержащим влагу, продувается воздух (со скоростью v). Пусть $v(x, t)$ — концентрация влаги в поглощающем веществе, $u(x, t)$ — концентрация свободных паров. Вывести уравнение для функций $u(x, t)$ и $v(x, t)$, описывающих процесс сушки, если: 1) процесс изотермический и 2) изотерма сушки имеет вид $u = \gamma v$, где γ — постоянная изотермы (см. также приложение V).

2. По трубе ($x > 0$) пропускается со скоростью v горячая вода. Пусть u — температура воды в трубе, v — температура стенок трубы, u_0 — температура окружающей среды. Вывести уравнения для u и v, пренебрегая распределением температуры по сечению трубы и стенок и считая, что на границах вода — стенка и стенка — среда существует перепад температур и происходит теплообмен по закону Ньютона (см. главу III, § 1).

§ 5. Решение общих линейных уравнений гиперболического типа

1. Сопряженные дифференциальные операторы. Установим некоторые вспомогательные формулы, нужные нам для представления решений краевых задач в интегральной форме. Пусть

$$\mathcal{L}[u] = u_{xx} - u_{yy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_x + c(x, y)u \tag{1}$$

$$(a(x, y),\ b(x, y),\ c(x, y) \text{ — дифференцируемые функции})$$

— линейный дифференциальный оператор, соответствующий линейному уравнению гиперболического типа. Умножая $\mathcal{L}[u]$ на