для $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant y \leqslant L$ и повторяя оценки, проведенные для функций $z_n(x, y)$, убеждаемся в справедливости неравенства

$$|U| < 3H_1 M^{n+1} K^n \frac{(x+y)^{n+2}}{(n+2)!} < \frac{3H_1}{K^2 M} \frac{(2KLM)^{n+2}}{(n+2)!}$$

при любом значении n. Отсюда и следует

$$U(x, y) \equiv 0 \quad \text{или} \quad u_1(x, y) \equiv u_2(x, y),$$

что и доказывает единственность решения задачи с данными на характеристиках.

Если коэффициенты a, b и c постоянны, то уравнение (3) с помощью подстановки

$$u = ve^{\lambda x + \mu y}$$

приводится к виду

$$v_{xy} + C_1 v = f. \tag{8}$$

При $C_1 = 0$ мы получаем задачу для простейшего уравнения (1), решение которой дается формулой (2).

Если $C_1 \neq 0$, то решение задачи для уравнения (8) также может быть получено в явной аналитической форме методом, изложенным в § 5.

Задачи

1. Через трубу ($x > 0$), заполненную веществом, содержащим влагу, продувается воздух (со скоростью v). Пусть $v(x, t)$ — концентрация влаги в поглощающем веществе, $u(x, t)$ — концентрация свободных паров. Вывести уравнение для функций $u(x, t)$ и $v(x, t)$, описывающих процесс сушки, если: 1) процесс изотермический и 2) изотерма сушки имеет вид $u = \gamma v$, где γ — постоянная изотермы (см. также приложение V).

2. По трубе ($x > 0$) пропускается со скоростью v горячая вода. Пусть u — температура воды в трубе, v — температура стенок трубы, u_0 — температура окружающей среды. Вывести уравнения для u и v, пренебрегая распределением температуры по сечению трубы и стенок и считая, что на границах вода — стенка и стенка — среда существует перепад температур и происходит теплообмен по закону Ньютона (см. главу III, § 1).

§ 5. Решение общих линейных уравнений гиперболического типа

1. Сопряженные дифференциальные операторы. Установим некоторые вспомогательные формулы, нужные нам для представления решений краевых задач в интегральной форме. Пусть

$$\mathscr{L}[u] = u_{xx} - u_{yy} + a(x, y)\, u_x + b(x, y)\, u_x + c(x, y)\, u \tag{1}$$

$$(a(x, y),\ b(x, y),\ c(x, y) \text{ — дифференцируемые функции})$$

— линейный дифференциальный оператор, соответствующий линейному уравнению гиперболического типа. Умножая $\mathscr{L}[u]$ на некоторую функцию v, запишем отдельные слагаемые в виде

$$vu_{xx}=(vu_x)_x-(v_xu)_x+uv_{xx}, \qquad vbu_y=(bvu)_y-u(bv)_y,$$
$$vu_{yy}=(vu_y)_y-(v_yu)_y+uv_{yy}, \qquad vcu=ucv.$$
$$vau_x=(avu)_x-u(av)_x,$$

Суммируя отдельные слагаемые, получаем:

$$v\mathscr{L}[u]=u\mathscr{M}[v]+\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{\partial K}{\partial y}, \tag{2}$$

где

$$\mathscr{M}(v)=v_{xx}-v_{yy}-(av)_x-(bv)_y+cv, \tag{3}$$
$$H=vu_x-v_xu+avu=(vu)_x-(2v_x-av)u= \tag{4}$$
$$=-(vu)_x+(2u_x+au)v, \tag{4'}$$
$$K=-vu_y+v_yu+bvu=-(vu)_y+(2v_y+bv)u= \tag{5}$$
$$=(uv)_y-(2u_y-bu)v. \tag{5'}$$

Два дифференциальных оператора называются *сопряженными*, если разность

$$v\mathscr{L}[u]-u\mathscr{M}[v]$$

является суммой частных производных по x и y от некоторых выражений H и K.

Рассматриваемые нами операторы $\mathscr{L}$ и $\mathscr{M}$, очевидно, являются сопряженными.

Если $\mathscr{L}[u]=\mathscr{M}[u]$, то оператор $\mathscr{L}[u]$ называется самосопряженным.

Двойной интеграл от разности $v\mathscr{L}[u]-u\mathscr{M}[v]$ по некоторой области G, ограниченной кусочно-гладким контуром C, равен

$$\iint_G (v\mathscr{L}[u]-u\mathscr{M}[v])\,d\xi\,d\eta=\int_C (H\,d\eta-K\,d\xi), \tag{6}$$

где u и v — произвольные дважды дифференцируемые функции (двумерная формула Грина) [1]).

2. Интегральная форма решения. Воспользуемся формулой (6) для решения следующей задачи:

найти решение линейного уравнения гиперболического типа

$$\mathscr{L}[u]=u_{xx}-u_{yy}+a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u=-f(x,y), \tag{7}$$

[1]) Б. М. Будак, С. В. Фомин, Кратные интегралы и ряды, «Наука», 1965.

удовлетворяющее начальным условиям на кривой C,

$$\begin{aligned} u|_C &= \varphi(x), \\ u_n|_C &= \psi(x) \end{aligned} \tag{7'}$$

(u_n — производная по направлению нормали к кривой C), *и выяснить ту область, в которой решение определяется условиями* (7').

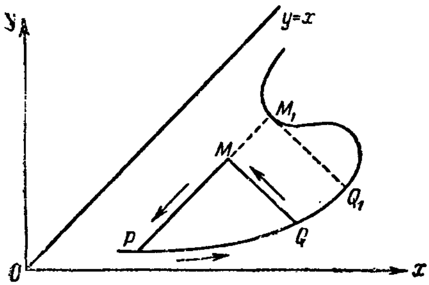

Рис. 26.

Кривая C задана при этом уравнением

$$y = f(x),$$

где $f(x)$ — дифференцируемая функция. Наложим на кривую C условие, чтобы всякая характеристика семейств $y - x = \text{const}$ и $y + x = \text{const}$ пересекала кривую C не более одного раза (для этого надо, чтобы $|f'(x)| < 1$). Формула (6) для криволинейного треугольника MPQ, ограниченного дугой PQ, кривой C и отрезками характеристик MP и MQ (рис. 26), дает:

$$\iint\limits_{MPQ} (v\mathscr{L}[u] - u\mathscr{M}[v])\, d\xi\, d\eta =$$

$$= \int\limits_Q^M (H\, d\eta - K\, d\xi) + \int\limits_M^P (H\, d\eta - K\, d\xi) + \int\limits_P^Q (H\, d\eta - K\, d\xi).$$

Преобразуем первые два интеграла, взятые вдоль характеристик MQ и MP. Принимая во внимание, что

$$\left.\begin{aligned} d\xi &= -d\eta = -\frac{ds}{\sqrt{2}} \quad \text{на } QM, \\ d\xi &= d\eta \quad = -\frac{ds}{\sqrt{2}} \quad \text{на } MP \end{aligned}\right\} \quad (ds\text{-элемент дуги вдоль } QM \text{ и } MP)$$

и пользуясь формулами (4) и (5), получим:

$$\int\limits_Q^M (H\, d\eta - K\, d\xi) = -\int\limits_Q^M d(uv) + \int\limits_Q^M \left(2\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{a+b}{\sqrt{2}} v\right) u\, ds =$$

$$= -(uv)_M + (uv)_Q + \int\limits_Q^M \left(2\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{a+b}{\sqrt{2}} v\right) u\, ds$$

и аналогично

$$\int_M^P (H\,d\eta - K\,d\xi) = -(uv)_M + (uv)_P + \int_P^M \left(2\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{b-a}{\sqrt{2}}\,v\right) u\,ds.$$

Отсюда и из формулы (6) следует:

$$(uv)_M = \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} + \int_P^M \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{b-a}{2\sqrt{2}}\,v\right) u\,ds + \int_Q^M \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{a+b}{2\sqrt{2}}\,v\right) u\,ds +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_P^Q (H\,d\eta - K\,d\xi) - \frac{1}{2}\iint_{MPQ} (v\mathscr{L}[u] - u\mathscr{M}[v])\,d\xi\,d\eta. \quad (8)$$

Эта формула является тождеством, верным для любых достаточно гладких функций u и v.

Пусть u — решение поставленной выше задачи с начальными условиями, а функция v зависит от точки M как от параметра и удовлетворяет следующим требованиям:

$$\mathscr{M}[v] = v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - (av)_\xi - (bv)_\eta + cv = 0 \text{ внутри } \triangle MPQ \quad (9)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial s} &= \frac{b-a}{2\sqrt{2}}\,v \text{ на характеристике } MP, \\ \frac{\partial v}{\partial s} &= \frac{b+a}{2\sqrt{2}}\,v \text{ на характеристике } MQ, \end{aligned}\right\} \quad (9a)$$

$$v(M) = 1.$$

Из условий на характеристиках и последнего условия находим:

$$v = e^{\int\limits_{s_0}^{s} \frac{b-a}{2\sqrt{2}}\,ds} \quad \text{на } MP,$$

$$v = e^{\int\limits_{s_0}^{s} \frac{b+a}{2\sqrt{2}}\,ds} \quad \text{на } MQ,$$

где s_0 — значение s в точке M. Как мы видели в § 4, уравнение (9) и значения функции v на характеристиках MP и MQ полностью определяют ее в области MPQ. Функцию v часто называют **функцией Римана**.

Таким образом, формула (8) для функции u, удовлетворяющей уравнению (7), принимает следующий окончательный вид:

$$u(M)=\frac{(uv)_P+(uv)_Q}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_P^Q[v(u_\xi\,d\eta+u_\eta\,d\xi)-u(v_\xi\,d\eta+v_\eta\,d\xi)+$$
$$+uv(a\,d\eta-b\,d\xi)]+\frac{1}{2}\iint\limits_{MPQ}v(M,M')f(M')\,d\sigma_{M'}\quad(d\sigma_{M'}=d\xi\,d\eta).\quad(10)$$

Эта формула решает поставленную задачу, так как выражения, стоящие под знаком интеграла вдоль PQ, содержат функции, известные на дуге C. В самом деле, функция v была определена выше, а функции

$$u|_C=\varphi(x),$$
$$u_x|_C=u_s\cos(x,s)+u_n\cos(x,n)=\frac{\varphi'(x)-\psi(x)f'(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}},$$
$$u_y|_C=u_s\cos(y,s)+u_n\cos(y,n)=\frac{\varphi'(x)f'(x)+\psi(x)}{\sqrt{1+(f'(x))^2}}$$

вычисляются при помощи начальных данных.

Формула (10) показывает, что если начальные данные известны на дуге PQ, то они полностью определяют функцию в характеристическом $\triangle PMQ$, если функция $f(x, y)$ известна в этой области [1]).

Формула (10), полученная в предположении существования решения, определяет его через начальные данные и правую часть уравнения (7) и тем самым по существу доказывает единственность решения (ср. с формулой Даламбера, гл. II, § 2, стр. 51).

Можно показать, что функция u, определяемая формулой (10), удовлетворяет условиям задачи (7)—(7′). Однако мы на этом доказательстве не останавливаемся.

3. Физическая интерпретация функции Римана. Выясним физический смысл функции $v(M, M')$. Для этого найдем решение неоднородного уравнения

$$\mathcal{L}[u]=-2f_1\quad(f=2f_1)$$

с нулевыми начальными условиями на кривой C. Обращаясь к формуле (10), видим, что искомое решение имеет вид

$$u(M)=\iint\limits_{MPQ}v(M,M')f_1(M')\,d\sigma_{M'}.\qquad(11)$$

[1]) Если характеристика пересекает кривую C в двух точках P и M_1 (см. рис. 26), то значение $u(M_1)$ не может задаваться произвольно, а определяется по формуле (10) с начальными данными на дуге PQ_1 и значениями $f(x, y)$ в $\triangle PM_1Q_1$.

Предположим, что $f_1(M)$ — локальная функция точки M_1, равная нулю всюду, кроме малой окрестности S_ε точки M_1, и удовлетворяющая условию нормировки

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} f_1(M')\,d\sigma_{M'} = 1. \tag{12}$$

Формула (11) в этом случае принимает вид

$$u_\varepsilon(M) = \iint\limits_{S_\varepsilon} v(M, M')\,f_1(M')\,d\sigma_{M'}. \tag{13}$$

Пользуясь теоремой о среднем значении, можно написать:

$$u_\varepsilon(M) = v(M, M_1^*) \iint\limits_{S_\varepsilon} f_1(M')\,d\sigma_{M'} = v(M, M_1^*),$$

где M_1^* — некоторая точка области S_ε.

Стягивая ε-окрестность S_ε в точку M_1 ($\varepsilon \to 0$), находим:

$$u(M) = \lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(M) = v(M, M_1). \tag{14}$$

Функция f_1, как мы видели на ряде примеров, обычно является плотностью силы, а переменная y — временем. Выражение

$$\iint\limits_{S_\varepsilon} f_1(M')\,d\sigma_{M'} = \iint\limits_{S_\varepsilon} f_1(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta \tag{15}$$

представляет собой импульс силы. Отсюда в силу формулы (11) заключаем, что $v(M, M_1)$ является функцией влияния единичного импульса, приложенного в точке M_1. Функция $v(M, M_1) = v(x, y;\ \xi, \eta)$ была определена как функция параметров $M(x, y)$, удовлетворяющая по координатам ξ, η точки M_1 уравнению

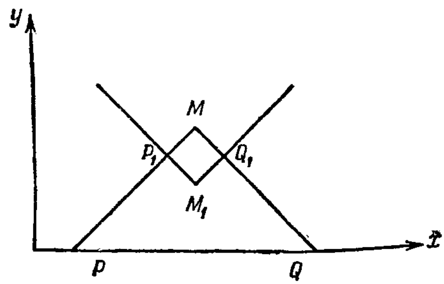

Рис. 27.

$$\mathscr{M}_{(\xi, \eta)}[v] = 0 \tag{16}$$

с дополнительными условиями (9а).

Рассмотрим функцию

$$u = u(M, M_1),$$

являющуюся функцией параметров $M_1(\xi, \eta)$ и удовлетворяющую по координатам x, y точки M уравнению

$$\mathscr{L}_{(x,y)}[u]=0 \tag{17}$$

с дополнительными условиями (см. рис. 27)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{b-a}{2\sqrt{2}}u \quad \text{на характеристике } M_1Q_1,\\ &\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{b+a}{2\sqrt{2}}u \quad \text{на характеристике } M_1P_1,\\ &u(M_1, M_1)=1. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Из этих условий находим:

$$\left.\begin{aligned} &u(M, M_1)=\begin{cases} e^{\int\limits_{s_0}^{s}\frac{b-a}{2\sqrt{2}}ds} & \text{на } M_1Q_1,\\ e^{\int\limits_{s_0}^{s}\frac{b+a}{2\sqrt{2}}ds} & \text{на } M_1P_1, \end{cases}\\ &u(M_1, M_1)=1. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Уравнение (17) и условия (18) полностью определяют функцию u в четырехугольнике $MP_1M_1Q_1$, ограниченном отрезками характеристик MP_1, MQ_1 и M_1P_1, M_1Q_1.

Применяя формулу (6) к четырехугольнику $MP_1M_1Q_1$, получаем:

$$\iint\limits_{MP_1M_1Q_1}(v\mathscr{L}[u]-u\mathscr{M}[v])\,d\xi\,d\eta=\int\limits_{M}^{P_1}(H\,d\eta-K\,d\xi)+\int\limits_{Q_1}^{M}+\int\limits_{M_1}^{Q_1}+\int\limits_{P_1}^{M_1}=0$$

($R(\xi, \eta)$ — переменная точка интегрирования в MP_1M_1Q). Пользуясь формулами (4) и (5) для K и H и условиями (9а) на характеристиках для функции v, нетрудно вычислить первые два интеграла правой части

$$\int\limits_{M}^{P_1}(H\,d\eta-K\,d\xi)=-(uv)_M+(uv)_{P_1},$$

$$\int\limits_{Q_1}^{M}(H\,d\eta-K\,d\xi)=-(uv)_M+(uv)_{Q_1},$$

подобно тому как это было сделано при выводе формулы (10).

Аналогично, пользуясь равенствами (4′), (5′) и условиями (19) для функции $u(M, M_1)$ на характеристиках, находим:

$$\int_P^{M_1} (H\,d\eta - K\,d\xi) =$$

$$= \int_{P_1}^{M_1} [-(vu)_\xi\,d\eta - (uv)_\eta\,d\xi] + \int_{P_1}^{M_1} v[(2u_\xi\,d\eta + 2u_\eta\,d\xi) + (au\,d\eta - bu\,d\xi)] =$$

$$= \int_{P_1}^{M_1} d(uv) + \int_{P_1}^{M_1} 2\left(\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{a+b}{2\sqrt{2}}\,u\right) v\,ds = (uv)_{M_1} - (uv)_{P_1}$$

$$\left(d\xi = -d\eta = \frac{ds}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\int_{M_1}^{Q_1} (H\,d\eta - K\,d\xi) = (uv)_{M_1} - (uv)_{Q_1} \qquad \left(d\xi = d\eta = \frac{ds}{\sqrt{2}}\right).$$

Суммируя все эти четыре равенства, получаем:

$$2(uv)_M = 2(uv)_{M_1}$$

или

$$u(M, M_1) = v(M, M_1), \tag{20}$$

так как

$$(u)_{M_1} = (v)_M = 1.$$

Таким образом, мы видим, что $v(M, M_1)$ — функцию влияния единичного импульса, сосредоточенного в точке M_1, можно определить как решение уравнения

$$\mathscr{L}_{(x,\,y)}[v(M, M_1)] = 0, \quad M = M(x, y), \quad M_1 = M_1(\xi, \eta)$$

с дополнительными условиями (18).

4. Уравнения с постоянными коэффициентами. В качестве первого примера применения формулы (10) рассмотрим задачу с начальными данными для уравнения колебаний струны:

$$u_{yy} = u_{xx} + f_1(x, t) \quad \left(y = at,\ f_1 = \frac{f}{a^2}\right),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$u_y = \psi_1(x) \qquad \left(\psi_1 = \frac{\psi}{a}\right).$$

В формуле (10) дуга PQ является отрезком оси $y = 0$. Оператор

$$\mathscr{L}[u] = u_{xx} - u_{yy}$$

является самосопряженным, поскольку

$$\mathscr{M}(u) = \mathscr{L}[u] = u_{xx} - u_{yy}.$$

Так как $a = 0$ и $b = 0$, то функция v на характеристиках MP и MQ равна единице. Отсюда следует, что

$$v(M, M') \equiv 1$$

для любой точки M' внутри треугольника PMQ.

Учитывая затем, что в нашем случае

$$d\eta = 0 \quad \text{на} \quad PQ,$$

получаем:

$$u(M) = \frac{u(P) + u(Q)}{2} + \frac{1}{2} \int_P^Q u_\eta \, d\xi + \frac{1}{2} \iint_{PMQ} f(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta.$$

Замечая, что $P = P(x - y, 0)$, $Q = Q(x + y, 0)$, где x и y — координаты точки $M = M(x, y)$, и пользуясь начальными условиями, будем иметь:

$$u(x, y) = \frac{\varphi(x - y) + \varphi(x + y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} \psi_1(\xi) \, d\xi + \frac{1}{2} \int_0^y \int_{x-(y-\eta)}^{x+(y-\eta)} f_1(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta.$$

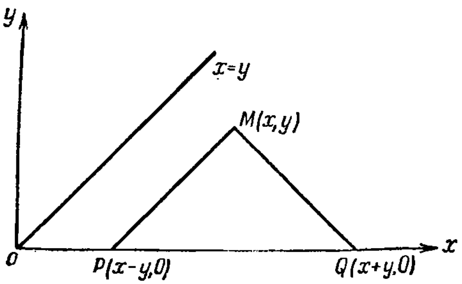

Рис. 28.

Возвращаясь к переменным x и t, получаем формулу Даламбера

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) \, d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) \, d\xi \, d\tau,$$

с которой мы уже встречались в п. 9 § 2 (формула (30)).

В качестве второго примера рассмотрим задачу с начальными условиями для уравнения с постоянными коэффициентами

$$u_{xx} - u_{yy} + au_x + bu_y + cu = 0, \quad -\infty < x < \infty, \; y > 0 \tag{21}$$

(a, b, c — постоянные числа),

$$u|_{y=0} = \varphi(x), \tag{22}$$

$$u_y|_{y=0} = \psi(x). \tag{23}$$

Подстановка

$$U = ue^{\lambda x + \mu y} \tag{24}$$

позволяет привести уравнение (21) к более простому виду

$$U_{xx}-U_{yy}+c_1U=0,\quad c_1=\frac{1}{4}(4c^2-a^2-b^2),\quad -\infty<x<\infty,\quad y>0 \tag{25}$$

с дополнительными условиями

$$U\big|_{y=0}=\varphi(x)e^{\frac{a}{2}x}=\varphi_1(x),\qquad -\infty<x<\infty, \tag{22'}$$

$$U_y\big|_{y=0}=\left(\psi(x)-\frac{b}{2}\varphi(x)\right)e^{\frac{a}{2}x}=\psi_1(x),\qquad -\infty<x<\infty, \tag{23'}$$

если только выбрать параметры λ и μ соответствующим образом, полагая

$$\lambda=\frac{a}{2},\quad \mu=-\frac{b}{2}. \tag{26}$$

Определение функции $U(x, y)$ по начальным данным и уравнению (25) сводится к построению функции Римана $v(x, y; \xi, \eta)$.

Функция v должна удовлетворять условиям:

$$v_{xx}-v_{yy}+c_1v=0, \tag{27}$$

$$\left.\begin{array}{l} v=1 \text{ на характеристике } MP, \\ v=1 \text{ на характеристике } MQ \text{ (рис. 28).} \end{array}\right\} \tag{28}$$

Будем искать v в виде

$$v=v(z), \tag{29}$$

где

$$z=\sqrt{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}\quad\text{или}\quad z^2=(x-\xi)^2-(y-\eta)^2. \tag{30}$$

На характеристиках MP и MQ переменная z обращается в нуль, так что $v(0)=1$. Далее, левая часть уравнения (27) преобразуется следующим образом:

$$v_{xx}-v_{yy}+c_1v=v''(z)(z_x^2-z_y^2)+v'(z)(z_{xx}-z_{yy})+c_1v=0.$$

Дифференцируя выражение для z^2 дважды, по x и y, получим:

$$zz_x=x-\xi,$$
$$zz_y=-(y-\eta),$$
$$zz_{xx}+z_x^2=1,$$
$$zz_{yy}+z_y^2=-1.$$

Отсюда и из формулы (30) находим:

$$z_x^2-z_y^2=1,\quad z_{xx}-z_{yy}=\frac{1}{z}.$$

Уравнение для v принимает следующий вид:

$$v''+\frac{1}{z}v'+c_1v=0$$

при условии $v(0)=1$. Решением этого уравнения является функция Бесселя нулевого порядка (см. Дополнение II, часть I, § 1)

$$v(z)=J_0(\sqrt{c_1}\,z)$$

или

$$v(x,\ y;\ \xi,\ \eta)=J_0\left(\sqrt{c_1[(x-\xi)^2-(y-\eta)^2]}\right). \tag{31}$$

Воспользуемся теперь для нахождения $U(x,\ y)$ формулой (10), которая в нашем случае принимает вид

$$U(M)=\frac{U(P)+U(Q)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_P^Q (vU_\eta\,d\xi-Uv_\eta\,d\xi)\quad (d\eta=0). \tag{32}$$

Вычислим предварительно интеграл по отрезку PQ $(\eta=0)$:

$$\int\limits_P^Q (vU_\eta-Uv_\eta)\,d\xi=\int\limits_{x-y}^{x+y}\left\{J_0\left(\sqrt{c_1[(x-\xi)^2-y^2]}\right)U_\eta(\xi,\ 0)-\right.$$
$$\left.-\frac{U(\xi,\ 0)\sqrt{c_1}\,yJ_0'\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\varepsilon)^2-y^2}\right)}{\sqrt{c_1[(x-\xi)^2-y^2]}}\right\}d\xi. \tag{33}$$

Пользуясь начальными условиями (22′), (23′), находим:

$$U(x,\ y)=\frac{\varphi_1(x-y)+\varphi_1(x+y)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}J_0\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)\psi_1(\xi)\,d\xi+$$
$$+\frac{1}{2}\sqrt{c_1}\,y\int\limits_{x-y}^{x+y}\frac{J_1\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)\varphi_1(\xi)\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}}, \tag{34}$$

откуда в силу (24), (22′) и (23′) получаем формулу

$$u(x,\ y)=\frac{\varphi(x-y)\,e^{-\frac{a-b}{2}y}+\varphi(x+y)\,e^{\frac{a+b}{2}y}}{2}-$$
$$-\frac{1}{2}e^{\frac{b}{2}y}\int\limits_{x-y}^{x+y}\left\{\frac{b}{2}J_0\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)-\right.$$
$$\left.-\sqrt{c_1}\,y\frac{J_1\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}}\right\}e^{-\frac{a}{2}(x-\xi)}\varphi(\xi)\,d\xi+$$
$$+\frac{1}{2}e^{\frac{b}{2}y}\int\limits_{x-y}^{x+y}J_0\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)e^{-\frac{a}{2}(x-\xi)}\psi(\xi)\,d\xi, \tag{35}$$

дающую решение поставленной задачи.

Рассмотрим частный случай $a=0$, $b=0$, т. е. уравнение

$$u_{xx}-y_{yy}+cu=0.$$

Из формулы (35) сразу получаем:

$$u(x, y)=\frac{\varphi(x-y)+\varphi(x+y)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y} J_0\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)\psi(\xi)\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{c_1}\,y\int\limits_{x-y}^{x+y}\frac{J_1\left(\sqrt{c_1}\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}\right)}{\sqrt{(x-\xi)^2-y^2}}\varphi(\xi)\,d\xi. \qquad (36)$$

Полагая здесь $c_1=0$ и $y=at$, приходим к формуле Даламбера

$$u(x, t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\bar{\psi}(\xi)\,d\xi, \qquad (37)$$

дающей решение уравнения колебаний струны

$$u_{xx}-\frac{1}{a^2}u_{tt}=0$$

при начальных условиях

$$u(x, 0)=\varphi(x),$$

$$u_t(x, 0)=\bar{\psi}(x),$$

$$\bar{\psi}(x)=a\psi(x)=au_y(y, 0).$$

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ II

1. Решить задачу 1 из § 4, предполагая, что в начальный момент концентрация влаги постоянна вдоль всей трубы и на вход подается поток сухого воздуха.

2. Решить задачу 2 из § 4, считая, что начальная температура системы равна u_0, а температура на конце трубы все время поддерживается равной $v_0>u_0$.

3. Решить систему телеграфных уравнений (см. § 1 (21)):

$$i_x+Cv_t+Gv=0,$$

$$v_x+Li_t+Ri=0$$

для бесконечной линии при начальных условиях

$$i(x, 0)=\varphi(x), \qquad v(x, 0)=\psi(x).$$

Указание. Свести систему уравнений (§ 1 (21)) к уравнению 2-го порядка для одной из функций $i(x, t)$ или $v(x, t)$, например

$$i_{xx}=CLi_{tt}+(CR+GL)i_t+GRi$$

с начальными условиями $i(x, 0) = \varphi(x)$,

$$\left.\frac{\partial i}{\partial t}\right|_{t=0} = -\left(\frac{1}{L} v_x + \frac{R}{L} i\right)_{t=0} = -\frac{1}{L} \psi'(x) - \frac{R}{L} \varphi(x) = \psi_0(x),$$

и воспользоваться затем формулой (35).

4. Исследовать решение телеграфного уравнения, полученное (формула (35)) для случая малых G и R. Рассмотреть предельный случай $G \to 0$, $R \to 0$ и получить из формулы (35) формулу Даламбера для решения уравнений колебаний струны.

ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЛАВЕ II

I. О колебании струн музыкальных инструментов

Колеблющаяся струна возбуждает колебания воздуха, воспринимаемые ухом человека как звук, издаваемый струной. Сила звука характеризуется энергией или амплитудой колебаний, тон — периодом колебаний, а тембр — соотношением энергий основного тона и обертонов [1]). Не останавливаясь на физиологических процессах восприятия звука и на процессе передачи звука по воздуху, мы будем характеризовать звук струны ее энергией, периодом и распределением энергии по обертонам.

В музыкальных инструментах обычно возбуждаются поперечные колебания струн. Различают три типа струнных инструментов: щипковые, ударные и смычковые. В ударных инструментах (например, рояль) колебание возбуждается ударом, придающим струне начальную скорость без начального отклонения. В щипковых инструментах (например, арфа, гитара) колебания возбуждаются приданием струне некоторого начального отклонения без начальной скорости.

Свободные колебания струны, возбуждаемой произвольным способом, могут быть представлены в виде (см. главу II, § 3)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad \left(\omega_n = \frac{\pi n}{l} a\right).$$

В качестве упражнения к § 3 была предложена задача 1, лежащая в основе простейшей теории возбуждения струн щипковых инструментов. Решение этой задачи показывает, что если начальное отклонение струны представлено в виде треугольника с высотой h в точке $x=c$ (рис. 29), то

$$a_n = \frac{2hl^2}{\pi^2 n^2 c (l - c)} \sin \frac{\pi n c}{l}, \quad b_n = 0. \tag{1}$$

[1]) Рэлей, Теория звука, т. I, гл. VI, Гостехиздат, 1955.