

с начальными условиями $i(x, 0) = \varphi(x)$,

$$\left. \frac{\partial i}{\partial t} \right|_{t=0} = - \left(\frac{1}{L} v_x + \frac{R}{L} i \right)_{t=0} = - \frac{1}{L} \psi'(x) - \frac{R}{L} \varphi(x) = \psi_0(x),$$

и воспользоваться затем формулой (35).

4. Исследовать решение телеграфного уравнения, полученное (формула (35)) для случая малых G и R . Рассмотреть предельный случай $G \rightarrow 0$, $R \rightarrow 0$ и получить из формулы (35) формулу Даламбера для решения уравнений колебаний струны.

ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЛАВЕ II

I. О колебании струн музыкальных инструментов

Колеблющаяся струна возбуждает колебания воздуха, воспринимаемые ухом человека как звук, издаваемый струной. Сила звука характеризуется энергией или амплитудой колебаний, тон — периодом колебаний, а тембр — соотношением энергий основного тона и обертонов¹⁾. Не останавливаясь на физиологических процессах восприятия звука и на процессе передачи звука по воздуху, мы будем характеризовать звук струны ее энергией, периодом и распределением энергии по обертонам.

В музыкальных инструментах обычно возбуждаются поперечные колебания струн. Различают три типа струнных инструментов: щипковые, ударные и смычковые. В ударных инструментах (например, рояль) колебание возбуждается ударом, придающим струне начальную скорость без начального отклонения. В щипковых инструментах (например, арфа, гитара) колебания возбуждаются приданием струне некоторого начального отклонения без начальной скорости.

Свободные колебания струны, возбуждаемой произвольным способом, могут быть представлены в виде (см. главу II, § 3)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \sin \frac{\pi n}{l} x \quad (\omega_n = \frac{\pi n}{l} a).$$

В качестве упражнения к § 3 была предложена задача 1, лежащая в основе простейшей теории возбуждения струн щипковых инструментов. Решение этой задачи показывает, что если начальное отклонение струны представлено в виде треугольника с высотой h в точке $x=c$ (рис. 29), то

$$a_n = \frac{2hl^2}{\pi^2 n^2 c(l-c)} \sin \frac{\pi nc}{l}, \quad b_n = 0. \quad (1)$$

¹⁾ Р э л е й, Теория звука, т. I, гл. VI, Гостехиздат, 1955.

Энергия n -й гармоники равна

$$E_n = \frac{1}{4} \rho l \omega_n^2 a_n^2 = M h^2 \frac{l^2 a^2}{\pi^2 n^2 c^2 (l-c)^2} \sin^2 \frac{\pi n c}{l} \quad (M = \rho l) \quad (2)$$

и убывает обратно пропорционально n^2 .

В задаче 4 к § 3 рассматривается простейшая теория ударного возбуждения струны при помощи сосредоточенного в точке c удара с импульсом K . Решение этой задачи представляется в виде

$$u(x, t) = \frac{2K}{\pi a \rho} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n c}{l} \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \omega_n t \quad \left(\omega_n = \frac{\pi n}{l} a \right), \quad (3)$$

$$E_n = \frac{K^2}{M} \sin^2 \frac{\pi n c}{l}. \quad (4)$$

Таким образом, при возбуждении струны ударом, сосредоточенным на небольшом интервале длины δ , энергии различных гармоник (для которых δ мало по сравнению с расстоянием между узлами) будут мало различаться между собой, и тон, издаваемый так возбужденной струной, насыщен обертонами. Это заключение легко проверяется экспериментально. Если натянутую струну (на монохорде) ударить лезвием ножа, то струна зазвенит: звук будет насыщен обертонами. В рояле струна возбуждается ударом молоточка, обтянутого кожей. Такое возбуждение струны можно представить при помощи следующих схем:

1. Струна возбуждается заданием постоянной начальной скорости v_0 на интервале $(c - \delta, c + \delta)$. Этот случай будет соответствовать плоскому жесткому молоточку, имеющему ширину 2δ и ударяющему в точке c . Процесс колебаний описывается функцией (см. задачу 3 § 3)

$$u(x, t) = \frac{4v_0 l}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi n c}{l} \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \delta \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \omega_n t,$$

и энергии отдельных гармоник равны

$$E_n = \frac{4Mv_0^2}{n^2 \pi^2} \sin^2 \frac{\pi n c}{l} \cdot \sin^2 \frac{\pi n \delta}{l}.$$

2. Струна возбуждается начальной скоростью

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \begin{cases} v_0 \cos \frac{x-c}{\delta} \cdot \frac{\pi}{2} & |x-c| < \delta, \\ 0 & |x-c| > \delta. \end{cases}$$

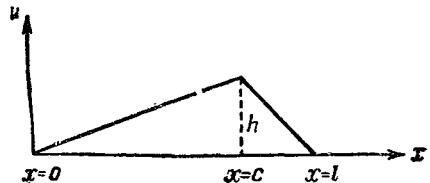


Рис. 29.

Этот случай соответствует жесткому выпуклому молоточку ширины 2δ . Такой молоточек в центре интервала 2δ возбуждает наибольшую начальную скорость, что схематически может быть описано приведенной выше функцией. Возбужденное таким образом колебание имеет вид (см. задачу 3 § 3)

$$u(x, t) = \frac{8v_0\delta}{\pi^2 a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\cos \frac{\pi n}{l} \delta \cdot \sin \frac{\pi n}{l} c}{1 - \left(\frac{2\delta n}{l}\right)^2} \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot \sin \omega_n t$$

и энергии гармоник равны

$$E_n = \frac{16v_0^2\delta^2\rho}{ln^2} \cdot \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{2\delta n}{l}\right)^2\right]^2} \cdot \cos^2 \frac{\pi n\delta}{l} \cdot \sin^2 \frac{\pi nc}{l}.$$

3. Молоточек, возбуждающий колебания струны, не является идеально жестким. В этом случае колебания определяются уже не начальной скоростью, а силой, меняющейся со временем. Таким образом, мы приходим к неоднородному уравнению с правой частью

$$F(x, t) = \begin{cases} F_0 \cos \frac{x-c}{\delta} \cdot \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi t}{\tau}, & \text{если } |x-c| < \delta, \\ & 0 \leq t \leq \tau, \\ 0, & \text{если } |x-c| > \delta, \\ & t > \tau. \end{cases}$$

Решение этого уравнения для $t > \tau$ представляется в виде

$$u(x, t) = \frac{16F_0\tau\delta}{\pi^3\rho a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{\cos \frac{\pi n\delta}{l} \cos \frac{\omega_n\tau}{2} \sin \frac{\pi nc}{l}}{\left[1 - \left(\frac{2\delta n}{l}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{n\tau}{l}\right)^2\right]} \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \omega_n \left(t - \frac{\tau}{2}\right).$$

Рассмотренные примеры показывают, что ширина интервала, по которому производится удар, и продолжительность времени удара имеют весьма существенное влияние на величину энергии высоких обертонов. Отметим, кроме того, что присутствие множителя $\sin \frac{\pi n}{l} c$ показывает, что если центр удара молоточка приходится на узел n -й гармоники, то энергия соответствующей гармоники равна нулю.

Наличие высоких обертонов (начиная с 7-го) нарушает гармоничность звука и вызывает ощущение диссонанса¹⁾. Наличие

¹⁾ Например, если основная частота (первая гармоника) в 440 колебаний в секунду соответствует «ля» первой октавы, то в семь раз большая частота соответствует «соль» четвертой октавы. Интервал ля — соль, так называемая малая септима, имеет неприятный для слуха, диссонирующий характер.

низких обертонов, наоборот, вызывает ощущение полноты звука. В рояле место удара молоточка выбирают близко от точки закрепления струны между узлами 7-го и 8-го обертонов, чтобы уменьшить их энергию. Регулируя ширину молоточка и его жесткость, стремятся увеличить относительную энергию низких (3-го и 4-го) обертонов. В старых конструкциях рояля, обладавших более резким, даже до некоторой степени звенящим тоном, пользовались узкими и жесткими молоточками.

II. О колебании стержней

В курсах методов математической физики основное место отводится уравнениям 2-го порядка. Однако большое число задач о колебаниях стержней, пластин и т. д. приводит к уравнениям более высокого порядка.

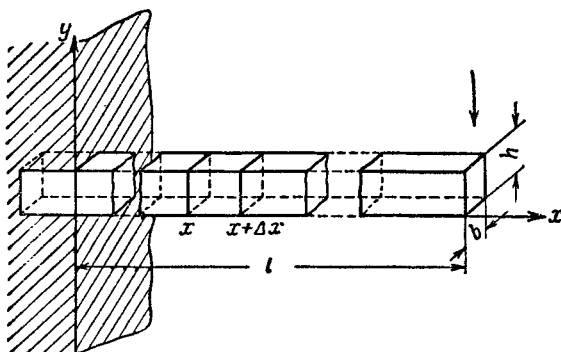


Рис. 30.

В качестве примера на уравнения 4-го порядка рассмотрим задачу о собственных колебаниях камертона, эквивалентную задаче о колебаниях тонкого прямоугольного стержня, зажатого одним концом в массивные тиски. Определение формы колебаний камертона и его частоты сводится к решению «уравнения поперечных колебаний стержня»

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0. \quad (1)$$

К этому уравнению приходят во многих задачах о колебаниях стержней, при расчете устойчивости вращающихся валов, а также при изучении вибрации кораблей ¹⁾.

¹⁾ См., например, монографию А. Н. Крылова «Вибрация судов».