

низких обертонов, наоборот, вызывает ощущение полноты звука. В рояле место удара молоточка выбирают близко от точки закрепления струны между узлами 7-го и 8-го обертонов, чтобы уменьшить их энергию. Регулируя ширину молоточка и его жесткость, стремятся увеличить относительную энергию низких (3-го и 4-го) обертонов. В старых конструкциях рояля, обладавших более резким, даже до некоторой степени звенящим тоном, пользовались узкими и жесткими молоточками.

II. О колебании стержней

В курсах методов математической физики основное место отводится уравнениям 2-го порядка. Однако большое число задач о колебаниях стержней, пластин и т. д. приводит к уравнениям более высокого порядка.

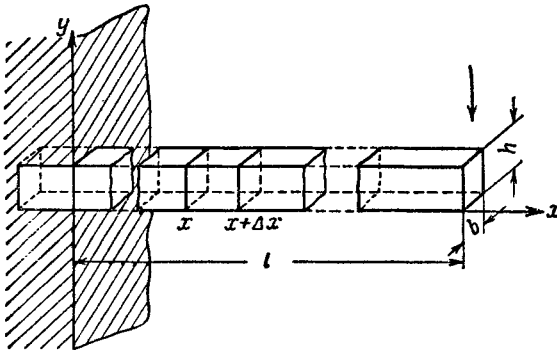


Рис. 30.

В качестве примера на уравнения 4-го порядка рассмотрим задачу о собственных колебаниях камертона, эквивалентную задаче о колебаниях тонкого прямоугольного стержня, зажатого одним концом в массивные тиски. Определение формы колебаний камертона и его частоты сводится к решению «уравнения поперечных колебаний стержня»

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0. \quad (1)$$

К этому уравнению приходят во многих задачах о колебаниях стержней, при расчете устойчивости вращающихся валов, а также при изучении вибрации кораблей ¹⁾.

¹⁾ См., например, монографию А. Н. Крылова «Вибрация судов».

Приведем элементарный вывод уравнения (1). Рассмотрим прямоугольный стержень длиной l ($0 \leq x \leq l$), высотой h и шириной b (рис. 30). Выделим элемент длины dx . После изгиба

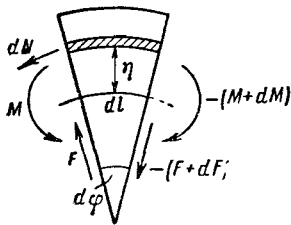


Рис. 31.

торцевые сечения выделенного элемента стержня, предполагаемые плоскими, образуют угол $d\varphi$. Если деформации малы, а длина оси стержня при изгибе не меняется ($dl = dx$), то

$$d\varphi = \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_x - \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+dx} = - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx.$$

Слой материала, отстоящий от оси стержня $y = 0$ на расстоянии η , изменяет свою длину на величину $\eta d\varphi$

(рис. 31). По закону Гука сила натяжения, действующая вдоль слоя, равна

$$dN = E \cdot b \, d\eta \cdot \frac{\eta \, d\varphi}{dx} = - E \cdot b \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \eta \, d\eta,$$

где E — модуль упругости материала стержня. Полный изгибающий момент сил, действующих в сечении x , равен

$$M = - E \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta^2 \, d\eta = - E \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} J, \quad (2)$$

где

$$J = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \eta^2 \, d\eta = \frac{bh^3}{12}$$

— момент инерции прямоугольного сечения относительно своей горизонтальной оси. Обозначим через $M(x)$ момент, действующий на правую часть стержня в каждом сечении. В сечении $x + dx$, очевидно, действует момент сил, равный $-(M + dM)$.

Избыточный момент $-dM$ уравновешивается моментом тангенциальных сил

$$dM = F \, dx.$$

Отсюда в силу равенства (2) получаем величину тангенциальной силы

$$F(x, t) = \frac{\partial M}{\partial x} = - EJ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}. \quad (3)$$

Приравняв действующую на элемент результирующую силу

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx = -EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} dx$$

произведению массы элемента на ускорение

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx,$$

где ρ — плотность стержня, S — площадь поперечного сечения (при этом мы пренебрегаем вращательным движением при изгибе), получаем уравнение поперечных колебаний стержня

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad (a^2 = \frac{EJ}{\rho S}). \quad (1)$$

Граничными условиями для заделанного конца $x=0$ являются неподвижность стержня и горизонтальность касательной

$$y|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0. \quad (4)$$

На свободном конце должны равняться нулю изгибающий момент (2) и тангенциальная сила (3), откуда следует, что

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = 0, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \Big|_{x=l} = 0. \quad (5)$$

Для того чтобы полностью определить движение стержня, нужно еще задать начальные условия — начальное отклонение и начальную скорость

$$y|_{t=0} = f(x) \quad \text{и} \quad \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t=0} = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq l). \quad (6)$$

Таким образом, задача сводится к решению уравнения (1) с граничными условиями (4), (5) и с начальными условиями (6).

Будем решать задачу методом разделения переменных, полагая

$$y = Y(x) T(t). \quad (7)$$

Подставляя предлагаемую форму решения в (1), имеем:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = - \frac{Y^{(4)}(x)}{Y(x)} = - \lambda.$$

Для функции $Y(x)$ получаем задачу о собственных значениях

$$Y^{(4)} - \lambda Y = 0, \quad (8)$$

$$Y|_{x=0} = 0, \quad \frac{dY}{dx} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dx^2} \Big|_{x=l} = 0, \quad \frac{d^3 Y}{dx^3} \Big|_{x=l} = 0. \quad (9)$$

Общее решение уравнения (8) представляется в виде

$$Y(x) = A \operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda} x + B \operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda} x + C \cos \sqrt[4]{\lambda} x + D \sin \sqrt[4]{\lambda} x.$$

Из условий $Y(0) = 0$, $Y'(0) = 0$ находим $C = -A$, $D = -B$. Отсюда следует, что

$$Y(x) = A (\operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda} x - \cos \sqrt[4]{\lambda} x) + B (\operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda} x - \sin \sqrt[4]{\lambda} x).$$

Условия $Y''(l) = 0$ и $Y'''(l) = 0$ дают:

$$A (\operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda} l + \cos \sqrt[4]{\lambda} l) + B (\operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda} l + \sin \sqrt[4]{\lambda} l) = 0,$$

$$A (\operatorname{sh} \sqrt[4]{\lambda} l - \sin \sqrt[4]{\lambda} l) + B (\operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda} l + \cos \sqrt[4]{\lambda} l) = 0.$$

Эта однородная система имеет нетривиальные решения A и B , если определитель системы равен нулю. Приравнявая этот определитель нулю, получаем трансцендентное уравнение для вычисления собственных значений

$$\operatorname{sh}^2 \sqrt[4]{\lambda} l - \sin^2 \sqrt[4]{\lambda} l = \operatorname{ch}^2 \sqrt[4]{\lambda} l + 2 \operatorname{ch} \sqrt[4]{\lambda} l \cos \sqrt[4]{\lambda} l + \cos^2 \sqrt[4]{\lambda} l.$$

Так как $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, то это уравнение можно записать в виде

$$\operatorname{ch} \mu \cdot \cos \mu = -1 \quad (\mu = \sqrt[4]{\lambda} l). \quad (10)$$

Корни уравнения (10) без труда вычисляются, например, графически¹⁾:

$$\mu_1 = 1,875,$$

$$\mu_2 = 4,694,$$

$$\mu_3 = 7,854,$$

.....

$$\mu_n \approx \frac{\pi}{2} (2n - 1) \quad \text{при } n > 3.$$

Последняя формула дает значение μ_n с точностью до трех десятичных знаков, начиная с $n = 3$, и с точностью до шестого знака для $n \geq 7$.

Рассмотрим теперь частоты колебаний камертона. Уравнению

$$T'' + a^2 \lambda_n T = 0$$

удовлетворяют тригонометрические функции

$$T_n(t) = a_n \cos 2\pi \nu_n t + b_n \sin 2\pi \nu_n t$$

¹⁾ О вычислении корней уравнения (10) см. Рэлея, Теория звука, т. I, гл. VIII, 1955.

с частотой

$$\nu_n = \frac{a\sqrt{\lambda_n}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\pi} \sqrt{\frac{EJ}{\rho S}} = \frac{\mu_n^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho S}}.$$

Частоты ν_n собственных колебаний относятся как квадраты μ_n . Так как

$$\frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} = 6,267, \quad \frac{\mu_3^2}{\mu_1^2} = 17,548,$$

то второй собственный тон выше основного тона более чем на две с половиной октавы, т. е. выше шестой гармоники струны при равном основном тоне, третья же собственное колебание выше основного тона более чем на четыре октавы. Например, если камертон имеет основную частоту в 440 колебаний в секунду (принятый стандарт для a' — ноты *ля* первой октавы), то следующая собственная частота камертона будет равна 2757,5 колебания в секунду (между $c'''' = 2637,3$ и $f'''' = 2794,0$ — между нотами *ми* и *фа* четвертой октавы равномерно-темперированной гаммы), третья же собственная частота в 7721,1 колебания в секунду уже выходит за пределы шкалы собственно музыкальных звуков.

При возбуждении колебаний камертона ударом присутствует не только первая, но и высшие гармоники, чем и объясняется металлический звук в начальный момент. Однако с течением времени высшие гармоники быстро затухают и камертон издает чистый звук основного тона.

III. Колебания нагруженной струны

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о колебаниях закрепленной на концах струны $(0, l)$, в нескольких точках которой $x = x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) помещены сосредоточенные массы M_i .

Условия в точке x_i можно получить двумя способами. Если в точке x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) приложена сосредоточенная сила $F_i(t)$, то должны выполняться соотношения

$$u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t), \quad (1)$$

$$ku_x \Big|_{x_i-0}^{x_i+0} = -F_i. \quad (2)$$

В данном случае под F_i следует понимать силу инерции. Подставляя в формулу (2)

$$F_i = -M_i u_{tt}(x_i, t),$$

получим:

$$M_i u_{tt}(x_i, t) = ku_x \Big|_{x_i-0}^{x_i+0}. \quad (3)$$