с частотой

$$\nu_n = \frac{a\sqrt{\lambda_n}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\pi}\sqrt{\frac{EJ}{\rho S}} = \frac{\mu_n^2}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{EJ}{\rho S}}.$$

Частоты ν_n собственных колебаний относятся как квадраты μ_n. Так как

$$\frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} = 6{,}267, \qquad \frac{\mu_3^2}{\mu_1^2} = 17{,}548,$$

то второй собственный тон выше основного тона более чем на две с половиной октавы, т. е. выше шестой гармоники струны при равном основном тоне, третье же собственное колебание выше основного тона более чем на четыре октавы. Например, если камертон имеет основную частоту в 440 колебаний в секунду (принятый стандарт для a' — ноты *ля* первой октавы), то следующая собственная частота камертона будет равна 2757,5 колебания в секунду (между $c'''' = 2637{,}3$ и $f'''' = 2794{,}0$ — между нотами *ми* и *фа* четвертой октавы равномерно-темперированной гаммы), третья же собственная частота в 7721,1 колебания в секунду уже выходит за пределы шкалы собственно музыкальных звуков.

При возбуждении колебаний камертона ударом присутствует не только первая, но и высшие гармоники, чем и объясняется металлический звук в начальный момент. Однако с течением времени высшие гармоники быстро затухают и камертон издает чистый звук основного тона.

III. Колебания нагруженной струны

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о колебаниях закрепленной на концах струны $(0, l)$, в нескольких точках которой $x=x_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ помещены сосредоточенные массы M_i.

Условия в точке x_i можно получить двумя способами. Если в точке x_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ приложена сосредоточенная сила $F_i(t)$, то должны выполняться соотношения

$$u(x_i-0, t) = u(x_i+0, t), \tag{1}$$

$$k u_x \Big|_{x_i-0}^{x_i+0} = -F_i. \tag{2}$$

В данном случае под F_i следует понимать силу инерции. Подставляя в формулу (2)

$$F_i = -M_i u_{tt}(x_i, t),$$

получим:

$$M_i u_{tt}(x_i, t) = k u_x \Big|_{x_i-0}^{x_i+0}. \tag{3}$$

Возможен и другой вывод условия (3). Распределим массу M_i на участке $(x_i - \varepsilon,\ x_i + \varepsilon)$ с постоянной плотностью δ_i и воспользуемся уравнением колебаний для неоднородной струны

$$(\rho + \delta_i) u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad x_i - \varepsilon < x < x_i + \varepsilon, \tag{4}$$

где ρ — плотность струны. Пусть $u_\varepsilon(x, t)$ — решение этого уравнения.

Интегрируя уравнение (4) по x в пределах от $x_i - \varepsilon$ до $x_i + \varepsilon$ и совершая предельный переход при $\varepsilon \to 0$, получим условие (3) для функции $u(x, t) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(x, t)$. На обосновании предельного перехода мы не останавливаемся.

Формулируем полностью нашу задачу:

найти решение уравнения колебаний

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right), \tag{5}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

условиям сопряжения в точках $x = x_i$

$$\left.\begin{aligned} &u(x_i - 0, t) = u(x_i + 0, t), \\ &M_i u_{tt}(x_i, t) = k u_x \Big|_{x_i - 0}^{x_i + 0} \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\right\} \tag{7}$$

и начальным условиям

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x), \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *— заданные функции.*

2. Собственные колебания нагруженной струны. Остановимся, прежде всего, на исследовании собственных частот и профилей стоячих волн для нагруженной струны. Для этого мы должны найти решение поставленной задачи, представимое в виде произведения

$$u(x, t) = X(x)\, T(t). \tag{9}$$

Подставляя это выражение в уравнение (5) и пользуясь граничными условиями, получим после разделения переменных

$$T'' + \lambda T = 0 \tag{10}$$

и

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(k \frac{dX}{dx}\right) + \lambda \rho X = (kX')' + \lambda \rho X = 0, \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \end{aligned}\right\}$$

Условия сопряжения дают:

$$X(x_i-0)=X(x_i+0),$$

$$M_iX(x_i)\,T''=kX'\big|_{x_i-0}^{x_i+0}T.$$

Принимая во внимание уравнение (10), перепишем последнее соотношение в виде

$$kX'\big|_{x_i-0}^{x_i+0}=-\lambda M_iX(x_i).$$

Таким образом, для функции $X(x)$ мы получаем следующую задачу на собственные значения:

$$\frac{d}{dx}(kX')+\lambda\rho X=0,\qquad k(x)>0,\qquad \rho(x)>0, \tag{11}$$

$$X(0)=0,\qquad X(l)=0, \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned} &X(x_i-0)=X(x_i+0)\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N),\\ &kX'(x_i+0)-kX'(x_i-0)+\lambda M_iX(x_i)=0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Отличительной особенностью рассматриваемой краевой задачи является то, что параметр λ входит не только в уравнение, но и в дополнительные условия.

Мы не будем здесь останавливаться на доказательствах существования бесчисленного множества собственных значений и собственных функций, положительности собственных значений, теоремы разложимости. Эта краевая задача, так же как и задачи обычного типа, рассмотренные нами в § 3 главы II, сводится к некоторому интегральному уравнению, которое в данном случае является нагруженным интегральным уравнением и эквивалентно интегральному уравнению в интегралах Стильтьеса.

Остановимся более подробно на выводе условия ортогональности собственных функций

$$X_1(x),\qquad X_2(x),\ \ldots,$$

которое в данном случае отлично от условия (92) § 3 и называется условием ортогональности с нагрузкой.

Как было показано в гл. II (см. § 3), собственные функции для краевой задачи

$$\frac{d}{dx}\left(k\,\frac{dX}{dx}\right)+\lambda\rho X=0,$$

$$X(0)=0,\qquad X(l)=0$$

ортогональны с весом ρ на интервале $(0,\ l)$:

$$\int_0^l X_m(x)\,X_n(x)\,\rho(x)\,dx=0\qquad (m\neq n). \tag{14}$$

Распределяя каждую массу M_i с постоянной плотностью δ_i на некотором интервале $x_i - \varepsilon < x < x_i + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — малое число, мы придем к задаче о собственных колебаниях неоднородной струны с плотностью $\rho_\varepsilon(x)$. Пусть $\lambda_{\varepsilon n}$ и $\{X_{\varepsilon n}(x)\}$ — собственные значения и собственные функции этой задачи, для которых должно выполняться условие ортогональности

$$\int_0^l X_{\varepsilon m}(x) X_{\varepsilon n}(x) \rho_\varepsilon(x)\,dx = 0. \tag{15}$$

Выделяя в равенстве (15) интегралы по участкам $(x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$ и совершая предельный переход при $\varepsilon \to 0$, мы получим соотношение

$$\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x)\,dx + \sum_{i=1}^{n} M_i X_m(x_i) X_n(x_i) = 0 \qquad (m \neq n), \tag{16}$$

называемое условием ортогональности с нагрузкой [1]).

Мы снова оставляем в стороне вопрос о возможности такого перехода.

Условие ортогональности (16) может быть получено и чисто формальным путем из уравнения и условий (11)—(13). Пусть $X_m(x)$ и $X_n(x)$ — собственные функции задачи (11)—(13), соответствующие собственным значениям λ_m и λ_n, удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dX_m}{dx}\right) + \lambda_m \rho X_m = 0,$$

$$\frac{d}{dx}\left(k\frac{dX_n}{dx}\right) + \lambda_n \rho X_n = 0.$$

Умножим первое уравнение на $X_n(x)$, второе — на $X_m(x)$ и вычтем из первого результата второй. Интегрируя полученное равенство последовательно по участкам $(0, x_1)$; (x_1, x_2); ...; (x_N, l) и складывая, будем иметь:

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_0^l X_m(x) X_n(x) \rho(x)\,dx - \\ - \sum_{i=0}^{k} \int_{x_i}^{x_i+1} \frac{d}{dx}\left[X_m k X_n' - X_n k X_m'\right] dx = 0, \tag{17}$$

причем мы полагаем $x_0 = 0$, $x_{N+1} = l$. Выполняя интегрирование в каждом из слагаемых суммы и объединяя члены, соответ-

---

[1]) Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. I, гл. VI, 1951.

ствующие подстановкам $x=x_i-0$ и $x=x_i+0$, получим сумму слагаемых вида

$$A_i=(X_m kX'_n - X_n kX'_m)_{x=x_i-0}-(X_m kX'_n - X_n kX'_m)_{x=x_i+0}.$$

При этом подстановки при $x=0$ и $x=l$ в силу граничных условий обращаются в нуль.

Для вычисления A_i воспользуемся условиями сопряжения

$$\left.\begin{aligned} X_j(x_i-0)&=X_j(x_i+0), \\ kX'_j(x_i+0)-kX'_j(x_i-0)&=-M_i\lambda_j X_j(x_i) \end{aligned}\right\}\quad (j=m,\ n). \qquad (13')$$

Переписывая A_i в виде

$$A_i=X_m(x_i)\left[kX'_n(x_i-0)-kX'_n(x_i+0)\right]- \\ -X_n(x_i)\left[kX'_m(x_i-0)-kX'_m(x_i+0)\right]$$

и пользуясь формулой (13′), находим

$$A_i=X_m(x_i)\,M_i\lambda_n X_n(x_i)-X_n(x_i)\,M_i\lambda_m X_m(x_i)= \\ =M_i X_m(x_i)\,X_n(x_i)\,(\lambda_n-\lambda_m).$$

Теперь равенство (17) можно написать в виде

$$(\lambda_m-\lambda_n)\left\{\int_0^l X_m(x)\,X_n(x)\,\rho(x)\,dx+\sum_{i=1}^N M_i X_m(x_i)\,X_n(x_i)\right\}=0.$$

Если $\lambda_m\neq\lambda_n$, то отсюда сразу же следует условие ортогональности с нагрузкой (16).

Норма собственных функций $X_n(x)$ определяется по формуле

$$\|X_n\|^2=\int_0^l X_n^2(x)\,\rho(x)\,dx+\sum_{i=1}^N M_i X_n^2(x_i). \qquad (18)$$

Очевидно, что при разложении некоторой функции $f(x)$ в ряд

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n(x)$$

коэффициенты разложения будут определяться по формуле

$$f_n=\frac{\int_0^l f(x)\,X_n(x)\,\rho(x)\,dx+\sum_{i=1}^N M_i f(x_i)\,X_n(x_i)}{\|X_n\|^2}. \qquad (19)$$

Задача с начальными условиями, поставленная в п. 1, решается по обычной схеме метода разделения переменных.

Аналогично рассматривается задача о колебании стержня (или балки) при наличии сосредоточенных масс.

Задача о колебаниях струны, нагруженной сосредоточенными массами, находит широкое применение в физике и технике. Еще Пуассон решал задачу о продольном движении груза, подвешенного к упругой нити. А. Н. Крылов показал[1]), что к этой задаче сводится теория индикатора паровой машины, крутильных колебаний вала с маховиком на конце, разного рода «дрожащих» клапанов и т. д. Для теории многих измерительных приборов важно изучение крутильных колебаний нити, к концу которой подвешена масса (например, зеркальце).

Особую актуальность задача подобного типа приобрела в связи с изучением устойчивости вибраций крыльев самолета. Для решения этой задачи необходимо вычисление собственных частот крыла (балки переменного сечения), нагруженного массами (моторы). Кроме того, рассматриваемая задача встречается при расчете собственных колебаний антенн, нагруженных сосредоточенными емкостями и самоиндукциями (в связи с этим см. приложение, посвященное аналогии между механическими и электромагнитными колебаниями).

Мы не останавливаемся здесь на приближенных методах нахождения собственных значений и функций задачи, аналогичных приближенным методам нахождения соответствующих величин для неоднородной струны.

3. Струна с грузом на конце. Значительный практический интерес представляет задача о колебаниях однородной струны, один конец которой ($x=0$) закреплен, а ко второму концу ($x=l$) прикреплен груз массы M.

В этом случае условие при $x=l$ принимает вид

$$Mu_{tt} = -ku_x(l, t)$$

и для амплитуды стоячих волн получается уравнение

$$X_n'' + \lambda_n X_n = 0$$

с граничными условиями

$$X_n(0) = 0, \quad X_n'(l) = \frac{M}{\rho}\lambda_n X_n(l).$$

Отсюда находим

$$X_n(x) = \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}\,x}{\sin\sqrt{\lambda_n}\,l},$$

где λ_n определяется из уравнения

$$\operatorname{ctg}\sqrt{\lambda_n}\,l = \frac{M}{\rho}\sqrt{\lambda_n}. \tag{20}$$

[1]) А. Н. Крылов, О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, гл. VII, изд. АН СССР, 1932.

Условие ортогональности функций $\{X_n(x)\}$ принимает вид

$$\int_0^l X_n(x) X_m(x) \rho\, dx + MX_n(l) X_m(l) = 0.$$

Вычислим квадрат нормы

$$N_n = \int_0^l X_n^2(x) \rho\, dx + MX_n^2(l).$$

Используя уравнение (20), получаем:

$$N_n = \frac{l\rho}{2} + \frac{M}{2} + \frac{M^2}{2\rho} \lambda_n l.$$

Задача с начальными данными решается обычным методом.

4. **Поправки для собственных значений.** Вычислим поправки для собственных частот в случае больших и малых нагрузок M. Для простоты рассмотрим тот случай, когда груз подвешен к концу струны. Возможны два предельных случая.

1. $M=0$. Конец $x=l$ свободен. Собственные значения определяются из формулы

$$\sqrt{\lambda_n^{(1)}} = \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{l}.$$

2. $M=\infty$. Конец $x=l$ жестко закреплен: $u(l, t)=0$. Собственные значения определяются из формулы

$$\sqrt{\lambda_n^{(2)}} = \frac{\pi n}{l}.$$

Нас будет интересовать случай малых M $(M \to 0)$ и больших M $(M \to \infty)$.

1° M мало. Найдем поправку к собственному значению $\lambda_n^{(1)}$, полагая

$$\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n^{(1)}} + \varepsilon M, \tag{21}$$

где ε — некоторое число. Подставляя (21) в уравнение (20) и пренебрегая M^2 и более высокими степенями M, получим:

$$\lambda_n = \lambda_n^{(1)} \left(1 - \frac{2M}{\rho l}\right), \tag{22}$$

т. е. собственные частоты нагруженной струны при $M \to 0$ возрастают, приближаясь к собственным частотам струны со свободным концом.

2° M велико. Выбирая $1/M$ в качестве параметра малости, положим:

$$\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n^{(2)}} + \varepsilon \frac{1}{M}.$$

Уравнение (20) дает:

$$\varepsilon = \frac{\rho}{\sqrt{\lambda_n^{(2)}}\, l}.$$

При этом мы пренебрегли членами, содержащими $1/M^2$ и более высокие степени $1/M$.

Таким образом,

$$\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n^{(2)}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^{(2)}}\, l}\,\frac{\rho}{M}, \quad \lambda_n = \lambda_n^{(2)} + \frac{2\rho}{Ml}, \tag{23}$$

т. е. при увеличении нагрузки собственные частоты убывают, равномерно приближаясь к собственным частотам струны с закрепленными концами.

IV. Уравнения газодинамики и теория ударных волн

1. Уравнения газодинамики. Закон сохранения энергии. Уравнения акустики (см. § 1) были получены в предположении малости скоростей движения газа и малых изменений давления, что позволило линеаризовать уравнения гидродинамики.

В задачах, возникающих при изучении полета ракет и скоростных самолетов, в теории баллистики, взрывных волн и т. п., приходится иметь дело с гидродинамическими процессами, характеризующимися большими скоростями и градиентами давлений. В этом случае линейное приближение акустики непригодно и необходимо пользоваться нелинейными уравнениями гидродинамики. Поскольку с такого рода движениями на практике приходится встречаться для газов, то принято о гидродинамике больших скоростей говорить как о газовой динамике или *газодинамике*.

Уравнения газодинамики в случае одномерного движения газа (в направлении оси x) имеют вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \quad \text{(уравнение непрерывности)}, \tag{1}$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{(уравнение движения)}, \tag{2}$$

$$p = f(\rho, T) \quad \text{(уравнение состояния)}. \tag{3}$$

Таким образом, уравнения газодинамики представляют собой уравнения движения идеальной сжимаемой жидкости при отсутствии внешних сил.

Перейдем теперь к выводу закона сохранения энергии. Энергия единицы объема равна

$$\frac{\rho v}{2} + \rho\varepsilon, \tag{4}$$