Уравнение (20) дает:

$$\varepsilon = \frac{\rho}{\sqrt{\lambda_n^{(2)}}\, l}.$$

При этом мы пренебрегли членами, содержащими $1/M^2$ и более высокие степени $1/M$.

Таким образом,

$$\sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\lambda_n^{(2)}} + \frac{1}{\sqrt{\lambda_n^{(2)}}\, l} \frac{\rho}{M}, \quad \lambda_n = \lambda_n^{(2)} + \frac{2\rho}{Ml}, \tag{23}$$

т. е. при увеличении нагрузки собственные частоты убывают, равномерно приближаясь к собственным частотам струны с закрепленными концами.

IV. Уравнения газодинамики и теория ударных волн

1. Уравнения газодинамики. Закон сохранения энергии. Уравнения акустики (см. § 1) были получены в предположении малости скоростей движения газа и малых изменений давления, что позволило линеаризовать уравнения гидродинамики.

В задачах, возникающих при изучении полета ракет и скоростных самолетов, в теории баллистики, взрывных волн и т. п., приходится иметь дело с гидродинамическими процессами, характеризующимися большими скоростями и градиентами давлений. В этом случае линейное приближение акустики непригодно и необходимо пользоваться нелинейными уравнениями гидродинамики. Поскольку с такого рода движениями на практике приходится встречаться для газов, то принято о гидродинамике больших скоростей говорить как о газовой динамике или *газодинамике*.

Уравнения газодинамики в случае одномерного движения газа (в направлении оси x) имеют вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0 \quad \text{(уравнение непрерывности)}, \tag{1}$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{(уравнение движения)}, \tag{2}$$

$$p = f(\rho, T) \quad \text{(уравнение состояния)}. \tag{3}$$

Таким образом, уравнения газодинамики представляют собой уравнения движения идеальной сжимаемой жидкости при отсутствии внешних сил.

Перейдем теперь к выводу закона сохранения энергии. Энергия единицы объема равна

$$\frac{\rho v}{2} + \rho\varepsilon, \tag{4}$$

где первый член есть кинетическая энергия, второй — внутренняя энергия. Здесь ε, очевидно, обозначает **внутреннюю энергию** единицы массы.

Для идеального газа $\varepsilon = c_v T$, где c_v — теплоемкость при постоянном объеме, T — температура. Вычислим изменение энергии в единицу времени

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon). \tag{5}$$

Производя дифференцирование в первом слагаемом и пользуясь уравнениями (1) и (2), получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) = \frac{v^2}{2}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho v\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{v^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\rho v) - \rho v\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right) - v\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{6}$$

Для преобразования производной $\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon)$ обратимся к первому началу термодинамики, выражающему закон сохранения энергии

$$dQ = d\varepsilon + p\,d\tau, \tag{7}$$

где dQ — количество тепла, получаемое (или отдаваемое) системой извне, $p\,d\tau$ — работа, затрачиваемая при изменении объема на величину $d\tau$ ($\tau = 1/\rho$ — удельный объем).

Если процесс адиабатический (теплообмена со средой нет), то

$$dQ = 0$$

и

$$d\varepsilon = -p\,d\frac{1}{\rho} = \frac{p}{\rho^2}\,d\rho. \tag{8}$$

Пользуясь этим равенством, будем иметь:

$$d(\rho\varepsilon) = \varepsilon\,d\rho + \rho\,d\varepsilon = \varepsilon\,d\rho + \frac{p}{\rho}\,d\rho = w\,d\rho, \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\varepsilon) = w\frac{\partial\rho}{\partial t}, \tag{10}$$

где

$$w = \varepsilon + \frac{p}{\rho} \tag{11}$$

— **тепловая функция** или теплосодержание единицы массы.

Производная $\frac{\partial w}{\partial x}$ в силу соотношений (9) и (11) удовлетворяет уравнению

$$\rho v\frac{\partial w}{\partial x} = v\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{12}$$

Учитывая равенства (2), (5), (6), (10), (12), получаем закон сохранения энергии в дифференциальной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho v\left(\frac{v^2}{2}+w\right)\right]. \qquad (13)$$

Для выяснения физического смысла этого равенства проинтегрируем его по некоторому объему (x_1, x_2)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)dx=-\rho v\left(\frac{v^2}{2}+w\right)\Big|_{x_1}^{x_2}.$$

Слева стоит изменение энергии в единицу времени на интервале (x_1, x_2), справа — поток энергии, вытекающей в единицу времени из рассматриваемого объема.

Если эффектом теплопроводности нельзя пренебречь, то уравнение сохранения энергии принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho v\left(\frac{v^2}{2}+w\right)-\varkappa\frac{\partial T}{\partial x}\right], \qquad (14)$$

где $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности.

2. Ударные волны. Условия динамической совместности. В случае больших скоростей возможны такие движения, при которых на некоторых поверхностях, перемещающихся в пространстве, возникают разрывы непрерывности в распределении гидродинамических величин (давления, скорости, плотности и др.). Эти разрывы принято называть *ударными волнами*.

На поверхности разрыва (*фронте ударной волны*) должны выполняться условия непрерывности потока вещества, энергии и количества движения (*условия Гюгонио*). Перейдем к выводу этих условий.

Преобразуем уравнение (2) к более удобному для наших целей виду. Умножая (1) на v и складывая с (2), получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v)=-\frac{\partial}{\partial x}(p+\rho v^2). \qquad (2')$$

Перепишем теперь уравнения непрерывности, движения и сохранения энергии в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}(\rho v), \qquad (1')$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}(p+\rho v^2), \qquad (2')$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2}+\rho\varepsilon\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho v\left(\frac{v^2}{2}+w\right)\right]. \qquad (13)$$

Рассмотрим на плоскости (x, t) линию $x=\alpha(t)$, являющуюся «следом» поверхности разрыва на плоскости (x, t). Пусть AC—

некоторая дуга линии разрыва $x=\alpha(t)$, где A и C — точки с координатами x_1, t_1 и $x_2=x_1+\Delta x$; $t_2=t_1+\Delta t$ соответственно. Построим прямоугольник $ABCD$ со сторонами, параллельными координатным осям.

Запишем закон сохранения вещества в интегральной форме

$$\int_{x_1}^{x_2} [(\rho)_{t_2}-(\rho)_{t_1}]\,dx = -\int_{t_1}^{t_2} [(\rho v)_{x_2}-(\rho v)_{x_1}]\,dt, \tag{15}$$

где слева стоит изменение массы на интервале (x_1, x_2) за промежуток времени (t_1, t_2), а справа — количество вещества, вытекающего из интервала (x_1, x_2) за время (t_1, t_2). Если функции ρ и ρv непрерывны и дифференцируемы всюду внутри $ABCD$, то уравнение (15) эквивалентно уравнению (1′). В рассматриваемом случае это не имеет места.

Воспользуемся теоремой среднего значения для каждого слагаемого в отдельности

$$\left[(\rho)_{\substack{t=t_2\\x=x^*}}-(\rho)_{\substack{t=t_1\\x=x^{**}}}\right]\frac{\Delta x}{\Delta t} = -(\rho v)_{\substack{x=x_2\\t=t^*}}+(\rho v)_{\substack{x=x_1\\t=t^{**}}},$$

где x^*, x^{**}, t^*, t^{**} — средние значения аргументов x и t.

Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$ $(x_2\to x_1)$ и $\Delta t\to 0$ $(t_2\to t_1)$ и обозначая индексом 2 значения функций выше кривой $x=\alpha(t)$ (сзади фронта ударной волны), а индексом 1 — значения функций ниже этой кривой (перед фронтом), получаем:

$$(\rho_2-\rho_1)\,U = -(\rho v)_1+(\rho v)_2, \tag{16}$$

где

$$U=\frac{d\alpha}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

— скорость ударной волны.

В системе координат, движущейся вместе с ударной волной,

$$u_1=U-v_1,\quad u_2=U-v_2$$

обозначают скорости частиц перед фронтом и, соответственно, сзади фронта ударной волны. Полученное выше соотношение (16) можно переписать в виде

$$\rho_1 u_1=\rho_2 u_2. \tag{16′}$$

Это равенство выражает непрерывность потока вещества через фронт ударной волны.

Записывая в интегральной форме закон сохранения количества движения, имеем:

$$\int_{x_1}^{x_2} [(\rho v)_{t_2}-(\rho v)_{t_1}]\,dx = -\int_{t_1}^{t_2} [(p+\rho v^2)_{x_2}-(p+\rho v^2)_{x_1}]\,dt,$$

где справа стоит сумма импульса действующих сил (давления) и потока количества движения. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ и $\Delta t \to 0$, получаем закон сохранения потока количества движения на фронте

$$U[(\rho v)_2 - (\rho v)_1] = -(p + \rho v^2)_1 + (p + \rho v^2)_2$$

или

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2. \qquad (17)$$

Аналогично получается также уравнение сохранения энергии на фронте

$$\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right)_2 U - \left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right)_1 U = -\rho_1 v_1 \left(\frac{v^2}{2} + w\right)_1 + \rho_2 v_2 \left(\frac{v^2}{2} + w\right)_2,$$

которое после несложных преобразований принимает вид

$$\rho_1 u_1 \left(w_1 + \frac{u_1^2}{2}\right) = \rho_2 u_2 \left(w_2 + \frac{u_2^2}{2}\right)$$

или в силу условия (16)

$$w_1 + \frac{u_1^2}{2} = w_2 + \frac{u_2^2}{2}. \qquad (18)$$

Таким образом, на фронте ударной волны должны выполняться уравнения (**условия динамической совместности** или **условия Гюгонио**)

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2, \qquad (16')$$

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2, \qquad (17)$$

$$w_1 + \frac{u_1^2}{2} = w_2 + \frac{u_2^2}{2}. \qquad (18)$$

Из первых двух уравнений (16) и (17) выразим u_1 и u_2 через p и ρ:

$$u_1^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{p_1 - p_2}{\rho_1 - \rho_2}; \quad u_2^2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{p_1 - p_2}{\rho_1 - \rho_2},$$

откуда

$$u_1^2 - u_2^2 = -\frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2}(p_1 - p_2).$$

Подставляя затем это выражение в уравнение (18), находим соотношение между значениями энергии по обе стороны фронта

$$w_1 - w_2 = \frac{1}{2\rho_1\rho_2}(\rho_1 + \rho_2)(p_1 - p_2)$$

и

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{1}{2\rho_1\rho_2}(\rho_1 - \rho_2)(p_1 + p_2).$$

Рассмотрим идеальный газ, для которого

$$p = R\rho T; \quad \varepsilon = c_v T; \quad w = c_p T = \frac{c_p}{c_p - c_v} RT = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p}{\rho},$$

т. е.

$$w = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{p}{\rho}. \tag{19}$$

Пользуясь формулой (19), после несложных преобразований приходим к так называемому уравнению адиабаты Гюгонио

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1) p_2 + (\gamma - 1) p_1}{(\gamma - 1) p_2 + (\gamma + 1) p_1} \tag{20}$$

или

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma + 1) \rho_2 - (\gamma - 1) \rho_1}{(\gamma + 1) \rho_1 - (\gamma - 1) \rho_2}. \tag{21}$$

По этой формуле можно определить одну из величин p_1, ρ_1, p_2, ρ_2, если известны три остальные величины.

Ударная волна всегда движется относительно газа от областей с бо́льшим давлением к областям с меньшим давлением: $p_2 > p_1$ (теорема Цемплена). Отсюда следует, что плотность газа за фронтом больше плотности перед фронтом.

Формула (20) выражает зависимость между p_2 и ρ_2 при заданных p_1 и ρ_1. Функция $\rho_2 = \rho_2(p_2)$ при заданных p_1 и ρ_1 является монотонно возрастающей функцией, стремящейся к конечному пределу при $p_2/p_1 \to \infty$ (ударная волна большой амплитуды):

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}. \tag{22}$$

Эта формула показывает максимальный скачок плотности (уплотнение), который может существовать на фронте ударной волны. Для двухатомного газа $\gamma = {}^7/_5$ и максимальное уплотнение равно 6:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 6.$$

Пользуясь равенствами (16′), (17) и (20) и полагая $p_1 = 0$, находим:

$$u_1 = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2} \cdot \frac{p_2}{\rho_1}}; \quad u_2 = \sqrt{\frac{(\gamma - 1)^2}{2(\gamma + 1)} \cdot \frac{p_2}{\rho_1}}.$$

Если ударная волна движется по покоящемуся газу ($v_1 = 0$), то скорость распространения ударной волны равна

$$U = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2} \cdot \frac{p_2}{\rho_1}},$$

т. е. она растет пропорционально квадратному корню из p_2.

Рассмотрим простейшую задачу теории ударных волн, допускающую аналитическое решение. В цилиндрической трубе $x > 0$, неограниченной с одной стороны и закрытой поршнем с другой ($x=0$), находится покоящийся газ с постоянной плотностью ρ_1 и при постоянном давлении p_1. В начальный момент $t=0$ поршень начинает двигаться с постоянной скоростью v в положительном направлении оси x. Перед поршнем возникает ударная волна, которая в начальный момент совпадает с поршнем, а затем удаляется от него со скоростью $U > v$. Между поршнем и фронтом ударной волны возникает область 2, в которой газ движется со скоростью поршня. Перед фронтом (область 1) газ находится в невозмущенном состоянии: $\rho=\rho_1$, $p = p_1$ $(v = 0)$.

Пользуясь условиями на фронте (16), (17) и (18), нетрудно определить скорость фронта, а также величину скачка, плотности и давления.

Введем безразмерные величины

$$\omega=\frac{\rho_1}{\rho_2};\quad \tilde{U}=\frac{U}{c_1};\quad \tilde{v}=\frac{v}{c_1};\quad \tilde{p}=\frac{\gamma p_2}{\rho_1 c_1^2}, \tag{23}$$

где $c_1=\sqrt{\gamma p_1/\rho_1}$ — скорость звука перед фронтом (в невозмущенной области 1). Тогда уравнения сохранения запишутся в виде

$$\omega\tilde{U}=\tilde{U}-\tilde{v} \quad \text{или} \quad \tilde{U}=\frac{\tilde{v}}{1-\omega}, \tag{24}$$

$$\tilde{p}=1+\gamma\tilde{U}\tilde{v} \quad \text{или} \quad \tilde{p}=1+\gamma\frac{\tilde{v}^2}{1-\omega}, \tag{25}$$

$$\tilde{p}\omega=1+(\gamma-1)\left(\tilde{U}\tilde{v}-\frac{1}{2}\tilde{v}^2\right). \tag{26}$$

Исключая отсюда $\tilde{p}$ и $\tilde{U}$, получаем квадратное уравнение для определения ω:

$$2\omega^2-\omega[4+(\gamma+1)\tilde{v}^2]+[2+(\gamma-1)\tilde{v}^2]=0. \tag{27}$$

Так как по смыслу $\omega < 1$; $(\rho_2 > \rho_1)$, то выбираем меньший корень

$$\omega_2=1+\frac{(\gamma+1)}{4}\tilde{v}^2-\tilde{v}\sqrt{1+\frac{(\gamma+1)^2}{16}\tilde{v}^2}. \tag{28}$$

Из уравнений (24) и (28) находим

$$\tilde{U}=\frac{(\gamma+1)}{4}\tilde{v}+\sqrt{1+\frac{(\gamma+1)^2}{16}\tilde{v}^2}, \tag{29}$$

$$\tilde{p}=1+\frac{\gamma(\gamma+1)}{4}\tilde{v}^2+\gamma\tilde{v}\sqrt{1+\frac{(\gamma+1)^2}{16}\tilde{v}^2}. \tag{30}$$

Возвращаясь к прежним величинам, получаем:

$$\rho_2=\rho_1\frac{1+\frac{\gamma+1}{4}\cdot\frac{v^2}{c_1^2}+\frac{v}{c_1}\sqrt{1+\frac{(\gamma+1)^2}{16c_1^2}\cdot v^2}}{1+\frac{(\gamma-1)v^2}{2c_1^2}}, \tag{31}$$

$$U=\frac{\gamma+1}{4}v+c_1\sqrt{1+\frac{(\gamma+1)^2}{16c_1^2}v^2}, \tag{32}$$

$$p_2=p_1\cdot\left\{1+\frac{\gamma(\gamma+1)}{4}\frac{v^2}{c_1^2}+\frac{\gamma v}{c_1}\sqrt{1+\frac{(\gamma+1)^2}{16c_1^2}v^2}\right\}. \tag{33}$$

Так как скорость ударной волны постоянна, то для положения фронта в момент t будем иметь:

$$x=\alpha(t)=\left\{\frac{(\gamma+1)}{4}v+c_1\sqrt{1+\frac{(\gamma+1)^2}{16c_1^2}v^2}\right\}t. \tag{34}$$

В предельном случае $v/c_1\gg 1$ (ударная волна большой интенсивности) из формул (31)—(33) находим предельные соотношения

$$\rho_2=\rho_1\frac{\gamma+1}{\gamma-1};\quad U=\frac{\gamma+1}{2}v;\quad p_2=p_1\cdot\frac{\gamma(\gamma+1)}{2}\cdot\frac{v^2}{c_1^2},$$

полученные нами ранее.

Если $v/c_1\ll 1$ (волна малой интенсивности), то можно пренебречь членами v^2/c_1^2:

$$\rho_2=\rho_1\left(1+\frac{v}{c_1}\right),$$
$$U=c_1+\frac{(\gamma+1)}{4}v,$$
$$p_2=p_1\left(1+\frac{\gamma v}{c_1}\right),$$

3. Слабые разрывы. Выше было рассмотрено движение ударной волны, на фронте которой величины ρ, p, v и другие испытывают скачки. Такого рода разрывы называются *сильными*.

Возможны и такие движения, при которых на некоторой поверхности испытывают скачок первые производные величин ρ, p, v и других, в то время как сами эти величины остаются непрерывными. Такие разрывы называются *слабыми*.

В § 2, п. 10 рассмотрено движение разрывов такого рода и установлено, что эти разрывы распространяются вдоль характеристик. При этом мы исходили из уравнения акустики. Однако и для нелинейных задач газодинамики справедлив аналогичный результат.

Нетрудно убедиться в том, что поверхность слабого разрыва распространяется относительно газа со скоростью, равной локальной скорости звука. В самом деле, выделим малую окрестность поверхности слабого разрыва и возьмем средние значения гидродинамических величин в этой окрестности. Слабый разрыв, очевидно, можно рассматривать на фоне средних значений как малое возмущение, которое удовлетворяет уравнению акустики и должно распространяться с локальной скоростью звука.

В качестве примера рассмотрим истечение газа в вакуум (волна разрежения). Пусть в начальный момент $t=0$ газ, заполняющий полупространство $x > 0$, покоится и имеет постоянные значения плотности ρ и давления p_0 во всей области $x > 0$. При $t=0$ внешнее давление, приложенное к плоскости $x=0$, снимается, и газ начинает двигаться; при этом возникает слабый разрыв (**волна разрежения**), распространяющийся со скоростью звука c_0 в положительном направлении оси x. На переднем фронте газа $x=x_1(t)$ при $t=0$ мы имеем разрыв плотности и давления. Однако этот разрыв сразу же после начала движения исчезает.

В самом деле, из условий непрерывности потоков вещества и количества движения при $x=x_1(t)$

$$0=\rho_1^-(v_1-v_1^-)=\rho_1^+(v_1-v_1^+),$$

$$p_1^-+\rho_1^-(v_1-v_1^-)^2=p_1^++\rho_1^+(v_1-v_1^+)^2,$$

где ρ_1^-, p_1^-, v_1^- — значения слева в точке $x_1(t)$, ρ_1^+, p_1^+, v_1^+ — значения справа в точке $x_1(t)$, получаем

$$p_1^+=0 \quad \text{и} \quad \rho_1^+=0,$$

так как

$$\rho_1^-=p_1^-=v_1^-=0.$$

Для адиабатического процесса уравнение состояния идеального газа имеет вид

$$p=p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma. \tag{35}$$

Решения задачи будем искать в форме

$$\rho=\rho(\xi); \quad p=p(\xi); \quad v=v(\xi), \quad \text{где} \quad \xi=x/t.$$

Вычисляя производные

$$\frac{\partial f}{\partial t}=-\frac{1}{t}\xi\frac{df}{d\xi}; \quad \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{t}\frac{df}{d\xi},$$

где $f=\rho$, v или p, и подставляя результаты в уравнения (1) и (2), получим:

$$\left.\begin{aligned}(v-\xi)\frac{d\rho}{d\xi}&=-\rho\frac{dv}{d\xi},\\ (v-\xi)\rho\frac{dv}{d\xi}&=\frac{dp}{d\xi}.\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Умножим первое уравнение на $(v-\xi)$ и сложим со вторым:

$$(v-\xi)^2\frac{d\rho}{d\xi}=\frac{dp}{d\xi}$$

или

$$\frac{dp}{d\rho}=(v-\xi)^2.$$

Отсюда имеем:

$$v-\xi=\pm\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}=\pm c,$$

где c — скорость звука при адиабатическом процессе.

Поскольку мы рассматриваем движение слабого разрыва в положительном направлении оси x, надо выбрать в предыдущей формуле знак минус, т. е.

$$v-\xi=-c. \tag{37}$$

Подставляя это решение в уравнения (36), получаем:

$$\frac{dv}{d\rho}=\frac{c}{\rho} \tag{38}$$

или, что одно и то же,

$$\frac{dv}{dp}=\frac{1}{\rho c}.$$

Пользуясь уравнением состояния (35), находим:

$$c^2=\gamma\frac{p}{\rho}$$

и после интегрирования уравнения (38)

$$v=\frac{2}{\gamma-1}\cdot c_0\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}}-1\right]. \tag{39}$$

Из последней формулы можно выразить ρ через v:

$$\rho=\rho_0\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\cdot\frac{v}{c_0}\right)^{\frac{2}{\gamma-1}}. \tag{40}$$

Здесь

$$c_0=\sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$$

обозначает скорость звука при $v=0$ (в покоящемся газе). Формулу (39) можно также переписать в виде

$$v=\frac{2}{\gamma-1}(c-c_0). \tag{41}$$

Подставляя выражение (40) для ρ в уравнение состояния (35), находим:

$$p=p_0\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\cdot\frac{v}{c_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}. \tag{42}$$

Из уравнений (41) и (37) получаем формулу

$$v=\frac{2}{\gamma+1}\left(\frac{x}{t}-c_0\right), \tag{43}$$

определяющую зависимость v от x и t. Подставляя затем выражение (43) для v в формулы (40) и (42), получим зависимость ρ и p от x и t в явной форме. Все величины оказываются зависящими от x/t. Если измерять расстояния в единицах, пропорциональных t, то картина движения не меняется. Такое движение называется автомодельным.

Найдем скорость движения переднего фронта $v_1(t)$. Полагая в равенстве (42) $p=0$, будем иметь:

$$v_1=-\frac{2}{\gamma-1}c_0. \tag{44}$$

Отсюда следует, что скорость истечения газа в пустоту конечна. Для двухатомных газов $\gamma=7/5$ и

$$v_1=-5c_0.$$

Выражение (44) для скорости левого фронта $x=x_1(t)$ можно получить также из уравнения баланса вещества

$$\int_{x_1}^{x_2}\rho\,dx=\rho_0x_2=\rho_0c_0t. \tag{45}$$

Вводя переменную

$$\xi=x/t,$$

получим

$$\int_{v_1}^{c_0}\rho\,d\xi=\rho_0c_0.$$

Подставляя затем выражение для ρ из (40) и полагая

$$1+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\cdot\frac{\xi-c_0}{c_0}=\lambda,$$

будем иметь:

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda^{\frac{2}{\gamma-1}}\, d\lambda = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \tag{46}$$

где

$$\lambda_1 = 1 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\cdot\frac{v_1 - c_0}{c_0}; \quad \lambda_2 = 1.$$

После вычисления интеграла (46) получим:

$$\lambda_2^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - \lambda_1^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} = 1,$$

т. е.

$$\lambda_1 = 0,$$

откуда и следует:

$$v_1 = -\frac{2c_0}{\gamma-1}.$$

Задача об истечении газа в вакуум решена.

Мы ограничились выше рассмотрением лишь наиболее простых задач газодинамики. За более подробным ознакомлением с затронутыми здесь вопросами отсылаем читателя к специальной литературе[1]).

V. Динамика сорбции газов

1. Уравнения, описывающие процесс сорбции газа. Рассмотрим задачу о поглощении (сорбции) газа[2]). Пусть через трубку (ось которой мы выберем за координатную ось x), заполненную поглощающим веществом (сорбентом), пропускается газовоздушная смесь. Обозначим через $a(x, t)$ количество газа, поглощенного единицей объема сорбента, а через $u(x, t)$ — концентрацию газа, находящегося в порах сорбента в слое x.

Напишем уравнение баланса вещества, предполагая, что скорость газа v достаточно велика и процесс диффузии не играет существенной роли в переносе газа. Рассмотрим слой сорбента от x_1 до x_2 в течение промежутка времени от t_1 до t_2. Очевидно,

[1]) См. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель и Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, ч. II, гл. I, Гостехиздат, 1963; Л. Ландау и Е. Лифшиц, Механика сплошных сред, гл. VII, Гостехиздат, 1954; Я. Б. Зельдович, Теория ударных волн и введение в газодинамику, изд. АН СССР, 1946; Л. И. Седов, Распространение сильных взрывных волн, Прикладная математика и механика, т. X, вып. 2, (1946).

[2]) А. Н. Тихонов, А. А. Жуховицкий и Я. Л. Забежинский, Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала, ЖФХ, 20, вып. 10 (1946).