будем иметь:

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda^{\frac{2}{\gamma-1}}\, d\lambda = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \tag{46}$$

где

$$\lambda_1 = 1 + \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\cdot\frac{v_1 - c_0}{c_0}; \quad \lambda_2 = 1.$$

После вычисления интеграла (46) получим:

$$\lambda_2^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - \lambda_1^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} = 1,$$

т. е.

$$\lambda_1 = 0,$$

откуда и следует:

$$v_1 = -\frac{2c_0}{\gamma-1}.$$

Задача об истечении газа в вакуум решена.

Мы ограничились выше рассмотрением лишь наиболее простых задач газодинамики. За более подробным ознакомлением с затронутыми здесь вопросами отсылаем читателя к специальной литературе[1]).

## V. Динамика сорбции газов

**1. Уравнения, описывающие процесс сорбции газа.** Рассмотрим задачу о поглощении (сорбции) газа[2]). Пусть через трубку (ось которой мы выберем за координатную ось $x$), заполненную поглощающим веществом (сорбентом), пропускается газовоздушная смесь. Обозначим через $a(x, t)$ количество газа, поглощенного единицей объема сорбента, а через $u(x, t)$ — концентрацию газа, находящегося в порах сорбента в слое $x$.

Напишем уравнение баланса вещества, предполагая, что скорость газа $v$ достаточно велика и процесс диффузии не играет существенной роли в переносе газа. Рассмотрим слой сорбента от $x_1$ до $x_2$ в течение промежутка времени от $t_1$ до $t_2$. Очевидно,

[1]) См. Н. Е. Кочин, И. А. Кибель и Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, ч. II, гл. I, Гостехиздат, 1963; Л. Ландау и Е. Лифшиц, Механика сплошных сред, гл. VII, Гостехиздат, 1954; Я. Б. Зельдович, Теория ударных волн и введение в газодинамику, изд. АН СССР, 1946; Л. И. Седов, Распространение сильных взрывных волн, Прикладная математика и механика, т. X, вып. 2, (1946).

[2]) А. Н. Тихонов, А. А. Жуховицкий и Я. Л. Забежинский, Поглощение газа из тока воздуха слоем зернистого материала, ЖФХ, 20, вып. 10 (1946).

для него можно написать уравнение баланса вещества

$$\left[\nu u|_{x_1} - \nu u|_{x_2}\right] S\,\Delta t = \left[(a+u)|_{t_2} - (a+u)|_{t_1}\right] S\,\Delta x, \tag{1}$$

которое после сокращения на $\Delta x\,\Delta t$ и перехода к пределу при $\Delta x \to 0$ $\Delta t \to 0$ принимает вид

$$-\nu\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}(a+u). \tag{2}$$

Левая часть этого уравнения представляет количество газа, накопляющегося за счет переноса, рассчитанное на единицу длины и времени, правая часть — количество газа, израсходованного на повышение концентрации сорбированного газа и газа, находящегося в порах. К этому уравнению баланса следует присоединить уравнение кинетики сорбции

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \beta(u - y), \tag{3}$$

где $\beta$ — так называемый кинетический коэффициент, $y$ — концентрация газа, находящегося в «равновесии» с сорбированным количеством газа.

Величины $a$ и $y$ связаны друг с другом уравнением

$$a = f(y), \tag{4}$$

являющимся характеристикой сорбента.

Кривая $a = f(y)$ называется изотермой сорбции. Если

$$f(y) = \frac{yu_0}{\gamma(u_0 + py)},$$

то изотерма называется изотѐрмой Лэнгмюра. Наиболее простой вид функции $f$ соответствует так называемой изотерме Генри, справедливой в области малых концентраций,

$$a = \frac{1}{\gamma}y, \tag{5}$$

где $1/\gamma$ — коэффициент Генри.

В этом случае мы приходим к следующей задаче: *найти функции $u(x, t)$ и $a(x, t)$ из уравнений*

$$-\nu\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial a}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \beta(u - \gamma a) \tag{6}$$

*при дополнительных условиях*

$$\left.\begin{aligned} a(x, 0) &= 0, \\ u(x, 0) &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$u(0, t) = u_0, \tag{8}$$

*где $u_0$ — концентрация газа на входе.*

Пренебрегая производной $\frac{\partial u}{\partial t}$, представляющей расход газа на повышение свободной концентрации в порах сорбента, по сравнению с производной $\frac{\partial a}{\partial t}$, представляющей расход газа на увеличение сорбированного количества газа, получаем[1]:

$$-v\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial a}{\partial t}, \tag{2'}$$

$$\frac{\partial a}{\partial t}=\beta(u-\gamma a), \tag{6}$$

$$a(x, 0)=0,$$

$$u(0, t)=u_0.$$

Исключим функцию $a(x,t)$, дифференцируя первое уравнение по $t$ и используя второе уравнение

$$-vu_{xt}=\beta u_t-\beta\gamma a_t=\beta u_t+\beta v\gamma u_x$$

или

$$u_{xt}+\frac{\beta}{v}u_t+\beta\gamma u_x=0.$$

Определим начальное условие для $u$, полагая в первом уравнении $t=0$,

$$-vu_x(x, 0)=\beta u(x, 0), \quad u(0, 0)=u_0,$$

откуда находим:

$$u(x, 0)=u_0 e^{-\frac{\beta}{v}x}.$$

Задача нахождения функции $u(x,t)$ свелась к интегрированию уравнения

$$u_{xt}+\frac{\beta}{v}u_t+\beta\gamma u_x=0 \tag{9}$$

при дополнительных условиях

$$u(x, 0)=u_0 e^{-\frac{\beta}{v}x}, \tag{10}$$

$$u(0, t)=u_0. \tag{8}$$

Характеристиками этого уравнения являются линии

$$x=\text{const}, \quad t=\text{const}.$$

Дополнительные условия в этой задаче представляют значения искомой функции $u(x,t)$ на характеристиках. Аналогично

[1]) Для системы уравнений (2′) и (6) достаточно одного начального условия, так как ось $t=0$ в этом случае становится характеристикой. Подробнее об этом см. примечание на стр. 168.

ставится задача для функции $a(x, t)$:

$$a_{xt} + \frac{\beta}{v} a_t + \beta\gamma a_x = 0, \qquad (11)$$

$$a(x, 0) = 0, \qquad (7)$$

$$a(0, t) = \frac{u_0}{\gamma}(1 - e^{-\beta\gamma t}). \qquad (12)$$

Следует заметить, что подобная задача встречается при рассмотрении ряда других вопросов (например, процесс сушки воздушным потоком, прогревание трубы потоком воды и т. д.)[1].

Решение уравнения (9) может быть получено в явном виде методом, изложенным в § 5, и дается формулой

$$u(x_1, t_1) = u_0 e^{-x_1}\left[e^{-t_1} I_0(2\sqrt{x_1 t_1}) + \frac{1}{x_1}\int_0^{x_1 t_1} e^{-\frac{\tau}{x_1}} I_0(2\sqrt{\tau})\, d\tau\right], \qquad (13)$$

---

[1]) Переходя к уравнению (2′), мы пренебрегали членом $u_t$. Однако нетрудно показать, что мы придем к тому же уравнению, если введем переменные:

$$\tau = t - \frac{x}{v}; \quad t = \tau + \frac{\xi}{v}, \quad \xi = x, \quad x = \xi$$

(рис. 32), в которых время в точке $x$ отсчитывается от $t_0 = x/v$ — момента прихода в эту точку потока газовоздушной смеси. В самом деле,

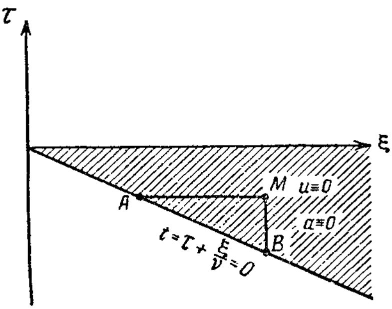


Рис. 32.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{v}\frac{\partial u}{\partial \tau}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}$$

и уравнение (2) принимает вид

$$-v\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial a}{\partial \tau}, \qquad (2'')$$

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} = \beta(u - \gamma a). \qquad (6)$$

Начальные условия (7) и уравнения (2) и (6) дают:

$$\left.\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \\ u_t(x, 0) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7')$$

В области между прямой $t = 0$ и осью $\xi$ мы получаем задачу определения функции $u$ по начальным условиям (7′) (задача Коши). Очевидно, что в этой области функция $u(x, t) \equiv 0$ (а также $a \equiv 0$). Из уравнений (2′) и (6) видно, что при $\tau = 0$ функция $u(x, t)$ претерпевает разрыв, в то время как функция $a(x, t)$ остается непрерывной. Таким образом, при $\tau = 0$ функция $u$, как было показано выше, определяется из уравнения (2′) при $a(x, 0) = 0$. Определяя, как это было сделано на стр. 167—168 (см. формулы (10) и (12)), значения $u(x, 0)$ и $a(0, t)$, мы получаем для функций $u(x, t)$ и $a(x, t)$ задачи с данными на характеристиках.

где $x_1 = \frac{\beta x}{v}$, $t_1 = \frac{\beta t}{\gamma}$ — безразмерные переменные, $I_0$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка от мнимого аргумента.

Пользуясь асимптотическими формулами для функции $I_0$, нетрудно получить асимптотическое представление решения при больших значениях аргументов.

**2. Асимптотическое решение.** Выше мы изучали процесс сорбции газа, подчиняющегося изотерме сорбции Генри, связывающей количество поглощенного вещества $a$ с равновесной концентрацией $y$ линейной зависимостью

$$a = \frac{1}{\gamma} y.$$

Рассмотрим изотерму сорбции общего вида

$$a = f(y).$$

Если ввести безразмерные переменные

$$x_1 = \frac{x\beta}{v}, \quad t_1 = \frac{t\beta}{\gamma}, \quad \bar{u} = \frac{u}{u_0}, \quad z = \frac{y}{u_0}, \quad v = \frac{a}{u_0\gamma},$$

то система (2′), (6), (7), (8) примет вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_1} &= -\frac{\partial v}{\partial t_1}, \\ \frac{\partial v}{\partial t_1} &= (\bar{u} - z), \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$v = f_1(z) = \frac{1}{u_0\gamma} f(zu_0) \tag{15}$$

при дополнительных условиях

$$\bar{u}(0, t_1) = 1, \tag{16}$$

$$v(x_1, 0) = 0. \tag{17}$$

Нас будет интересовать асимптотическое поведение функций, представляющих решение системы (14).

Относительно функции $f_1(z)$ мы будем предполагать следующее:

1. $f_1(z)$ — возрастающая функция и $f_1(0) = 0$.

2. $f_1(z)$ имеет непрерывную производную для всех значений $z$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

3. Луч, идущий из начала координат в точку $(1, f_1(1))$, лежит ниже кривой $f_1(z)$ в промежутке $0 \leqslant z \leqslant 1$ (рис. 33), что, в частности, имеет место для выпуклой изотермы.

Вводя обозначение для обратной функции

$$z = f_1^{-1}(v) = F(v),$$

будем искать асимптотическое решение поставленной задачи в виде распространяющейся волны[1])

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \psi(\xi), \\ \tilde{v} &= \varphi(\xi), \end{aligned} \qquad \xi = x - \sigma t, \tag{18}$$

где $\sigma$ — скорость распространения волны, подлежащая определению.

Это означает, что на больших расстояниях (при $x \to \infty$) или через большой промежуток времени ($t \to \infty$)

$$v(x, t) = \tilde{v} = \varphi(x - \sigma t); \quad \bar{u}(x, t) = \tilde{u} = \psi(x - \sigma t).$$

Концентрации $\bar{u}$ и $v$ должны при $x = \infty$ или $t = \infty$ удовлетворять условию равновесия

$$v = f_1(\bar{u}) \quad \text{или} \quad \bar{u} = F(v).$$

Из условия (16) тогда следует:

$$\bar{u}\Big|_{\substack{x=0\\ t=\infty}} = \psi(-\infty) = 1; \quad \varphi(-\infty) = v\Big|_{\substack{x=0\\ t=\infty}} = f_1(1). \tag{19}$$

Из условия (17) следует:

$$v\Big|_{\substack{x=\infty\\ t=0}} = \varphi(+\infty) = 0; \quad \psi(+\infty) = \bar{u}\Big|_{\substack{x=\infty\\ t=0}} = F(0) = 0. \tag{20}$$

Условия (19) означают, что при $t \to \infty$ ($\xi \to -\infty$) должно установиться всюду насыщение.

Подставляя предполагаемую форму решения в уравнения (14), получим:

$$\psi' - \sigma\varphi' = 0, \tag{21}$$

$$-\sigma\varphi' = \psi - F(\varphi). \tag{22}$$

Из (21) и (20) заключаем, что

$$\psi(\xi) - \sigma\varphi(\xi) = 0. \tag{23}$$

Из уравнений (19) тогда следует, что

$$\sigma = \frac{\psi(\xi)}{\varphi(\xi)}\Big|_{\xi=-\infty} = \frac{1}{f_1(1)} \tag{24}$$

или, в размерных величинах,

$$\sigma = \gamma\frac{u_0}{a_0}, \quad a_0 = f(u_0). \tag{24'}$$

[1]) Для упрощения записи вместо $x_1$, $t_1$ будем писать $x$, $t$.

Из (22) и (23) находим:

$$-\sigma\frac{d\varphi}{\sigma\varphi-F(\varphi)}=d\xi. \tag{25}$$

После интегрирования будем иметь:

$$\omega(\varphi)=\xi-\xi_0, \tag{26}$$

где $\omega(\varphi)$ — какой-либо интеграл левой части, а $\xi_0$ — постоянная интегрирования. Отсюда искомая функция $\varphi(\xi)$ определится с точностью до неизвестной постоянной $\xi_0$:

$$\varphi=\omega^{-1}(\xi-\xi_0), \tag{27}$$

$$\psi=\sigma\omega^{-1}(\xi-\xi_0). \tag{28}$$

Выясним, может ли быть определена функция $\omega^{-1}$ и будут ли функции $\varphi$ и $\psi$ удовлетворять поставленным условиям при $\xi\to\infty$ и $\xi\to-\infty$. Покажем, что производная

$$\frac{d\omega}{d\varphi}=-\sigma\frac{1}{\sigma\varphi-f_1^{-1}(\varphi)}<0, \tag{29}$$

т. е.

$$\xi-\xi_0=\omega(\varphi)$$

— монотонно убывающая функция $\varphi$. В самом деле, знаменатель в (29) равен

$$\sigma\varphi-f_1^{-1}(\varphi)=\frac{1}{f_1(1)}\varphi-f_1^{-1}(\varphi).$$

Первое слагаемое есть принадлежащая ординате $\varphi$ абсцисса точки, лежащей на луче, идущем из начала координат в точку $(1, f_1(1))$ (рис. 33). Так как мы условились, что кривая $\varphi=f_1(z)$ лежит выше этого луча, то

$$f_1^{-1}(\varphi)<\frac{1}{f_1(1)}\varphi \quad (0\leqslant\varphi\leqslant f_1(1))$$

и, следовательно,

$$\sigma\varphi-f_1^{-1}(\varphi)>0.$$

Кроме того,

$$\sigma\varphi-f_1^{-1}(\varphi)=0 \quad \text{при} \quad \varphi=0 \quad \text{и при} \quad \varphi=f_1(1).$$

Отсюда следует, что

$$\xi-\xi_0=\omega(\varphi)=\infty \quad \text{при} \quad \varphi=0,$$

$$\xi-\xi_0=\omega(\varphi)=-\infty \quad \text{при} \quad \varphi=f_1(1).$$

Для обратной функции получаем:

$$\varphi=\omega^{-1}(\xi-\xi_0)=f_1(1) \quad \text{при} \quad \xi=-\infty,$$

$$\varphi=\omega^{-1}(\xi-\xi_0)=0 \quad \text{при} \quad \xi=\infty.$$

Далее, в силу равенства (29) имеем:

$$\psi = \sigma\varphi = \frac{1}{f_1(1)}\varphi = 1 \quad \text{при} \quad \xi = -\infty,$$
$$\psi = \sigma\varphi = \frac{1}{f_1(1)}\varphi = 0 \quad \text{при} \quad \xi = \infty.$$

Итак, все условия (19) и (20) удовлетворены, и тем самым доказано, что система уравнений имеет решение в виде распространяющейся волны, содержащей неопределенную постоянную $\xi_0$.

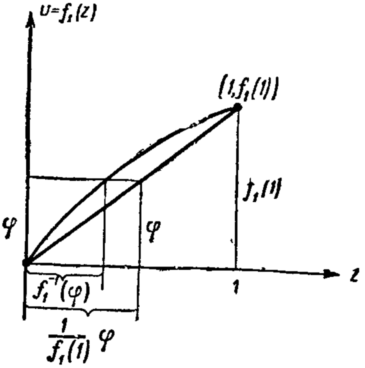


Рис. 33.

Для определения $\xi_0$ интегрируем первое уравнение по $t_1$ в пределах от 0 до $t_0$ и по $x$ в пределах от 0 до $x_0$:

$$\left[\int_0^{t_0} \bar{u}(x_0, \tau)\,d\tau - \int_0^{t_0} \bar{u}(0, \tau)\,d\tau\right] + \left[\int_0^{x_0} v(x, t_0)\,dx - \int_0^{x_0} v(x, 0)\,dx\right] = 0. \tag{30}$$

Полученное равенство выражает закон сохранения вещества. Переходя к пределу при $x_0 \to \infty$ и пользуясь начальными условиями для $\bar{u}$ и $v$, находим:

$$\int_0^{\infty} v(x, t_0)\,dx = \int_0^{t_0} \bar{u}(0, \tau)\,d\tau = t_0.$$

Допустим, что для больших значений $t$ решение нашей задачи приближается к функциям $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$, найденным выше в виде распространяющихся волн.

Если мы определим $\xi_0$ из условия

$$\int_0^{\infty} v(x, t_0)\,dx - t_0 \to 0 \qquad (t_0 \to \infty), \tag{31}$$

то это и будет то значение $\xi_0$, которое соответствует функциям $\tilde{u}(x, t)$ и $\tilde{v}(x, t)$.

Преобразуем наш интеграл

$$\int_0^{\infty} \tilde{v}(x, t_0)\,dx = \int_0^{\infty} \varphi(x - \sigma t_0)\,dx = \int_0^{\infty} \omega^{-1}(x - \sigma t_0 - \xi_0)\,dx =$$
$$= \int_{-\sigma t_0 - \xi_0}^{\infty} \omega^{-1}(\xi)\,d\xi = \int_{\zeta_1}^{\infty} \omega^{-1}(\zeta)\,d\zeta \qquad \begin{pmatrix} \zeta = x - \sigma t_0 - \xi_0, \\ \zeta_1 = -\sigma t_0 - \xi_0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\varphi^*$ значение $\omega^{-1}(\zeta)$ при $\zeta=0$:

$$\omega^{-1}(0)=\varphi^*.$$

Нетрудно видеть, что если $\varphi=\omega^{-1}(\zeta)$ — обратная функция для $\zeta=\omega(\varphi)$, то (рис. 34)

$$\int\limits_{\zeta_1}^{\infty}\omega^{-1}(\zeta)\,d\zeta=\int\limits_{\zeta_1}^{0}\omega^{-1}(\zeta)\,d\zeta+\int\limits_{0}^{\infty}\omega^{-1}(\zeta)\,d\zeta=$$

$$=\left[-\zeta_1\omega^{-1}(\zeta_1)+\int\limits_{\varphi^*}^{\omega^{-1}(\zeta_1)}\omega(\varphi)\,d\varphi+\int\limits_{0}^{\varphi^*}\omega(\varphi)\,d\varphi\right]. \quad (32)$$

Отсюда следует, что вместо предельного равенства (31) можно написать:

$$\int\limits_{-\sigma t_0-\xi_0}^{\infty}\omega^{-1}(\zeta)\,d\zeta-t_0=$$

$$=\left\{(\sigma t_0+\xi_0)\varphi(-\sigma t_0-\xi_0)+\int\limits_{0}^{\varphi(-\sigma t_0-\xi_0)}\omega(\varphi)\,d\varphi\right\}-t_0\to 0 \quad (t_0\to\infty).$$

$$(32')$$

Перейдем к пределу при $t_0\to\infty$. Тогда

$$\sigma\varphi(-\sigma t_0-\xi_0)\to\sigma\varphi(-\infty)=\sigma f_1(1)=1. \quad (32'')$$

Чтобы вычислить предел выражения

$$\sigma t_0\varphi(-\sigma t_0-\xi_0)-t_0,$$

воспользуемся уравнением (25). Разлагая $f_1^{-1}(\varphi)=F(\varphi)$ в ряд вблизи точки $\varphi_0=f_1(1)$, получим:

$$\sigma\varphi-F(\varphi)=\sigma(\varphi-\varphi_0)+1-F(\varphi)=$$

$$=\sigma(\varphi-\varphi_0)-[F(\varphi)-F(\varphi_0)]=[\sigma-F'(\varphi_0)](\varphi-\varphi_0)+\ldots,$$

откуда

$$-\sigma\frac{d\varphi}{[\sigma-F'(\varphi_0)](\varphi-\varphi_0)+\ldots}=d\xi, \quad (33)$$

где точками обозначены члены более высокого порядка относительно $(\varphi-\varphi_0)$.

Из требования 3 для функции $f_1$ следует, что

$$F'(\varphi_0)>\sigma=\frac{1}{f_1(1)}.$$

Из уравнения (33) находим порядок роста $\varphi$ при $\xi\to-\infty$:

$$\varphi=Ae^{k\xi}+\varphi_0, \quad (34)$$

где $A$ и $k>0$ — некоторые постоянные.

Из (34) следует, что

$$\lim_{t_0\to\infty} t_0[\sigma\varphi(-\sigma t_0-\xi_0)-1]=\lim_{t_0\to\infty} t_0 A\sigma e^{-k(\sigma t_0+\xi_0)}=0. \qquad (32''')$$

Совершая в формуле (32′) предельный переход при $t_0\to\infty$ и принимая во внимание (32″) и (32‴), получаем:

$$\xi_0=-\frac{1}{f_1(1)}\int\limits_0^{f_1(1)}\omega(\varphi)\,d\varphi. \qquad (35)$$

Тем самым профили волны $\{\tilde{u}, \tilde{v}\}$ определены полностью.

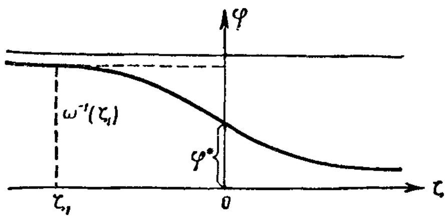


Рис. 34.

Особый интерес представляет случай изотермы Лэнгмюра. Найдем асимптотическое решение для процесса сорбции газа, подчиняющегося изотерме Лэнгмюра.

Уравнение (25) примет вид

$$-\sigma\frac{d\varphi}{\sigma\varphi-\dfrac{\varphi}{1-p\varphi}}=d\xi, \qquad (36)$$

где $\sigma=\dfrac{1}{f_1(1)}=1+p$ — скорость волны. Из (36) находим:

$$\xi-\xi_0=\omega(\varphi),$$

где

$$\omega(\varphi)=\sigma\int\frac{(1-p\varphi)\,d\varphi}{\varphi-\sigma\varphi(1-p\varphi)}+A=$$

$$=\frac{\sigma}{\sigma-1}\left[\frac{1}{\sigma}\ln(\sigma-1-p\sigma\varphi)-\ln\varphi\right]+A.$$

Очевидно, что когда $\varphi$ меняется от 0 до $f_1(1)$, то $\omega(\varphi)$ меняется от $+\infty$ до $-\infty$. Выберем $A$ так, чтобы

$$\varphi^*=\frac{1}{2}f_1(1),$$

т. е. чтобы

$$\omega(\varphi^*)=0 \quad \text{при} \quad \varphi^*=\frac{1}{2}f_1(1)=\frac{1}{2}\frac{1}{1+p}.$$

При этом условии

$$A = -\frac{\sigma}{\sigma-1}\left[\frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{1}{2}\,p\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+p}\right)\right]$$

и

$$\omega(\varphi) = \frac{\sigma}{\sigma-1}\left[\frac{1}{\sigma}\ln 2(1-\sigma\varphi) - \ln 2(1+p)\,\varphi\right].$$

Значение $\xi_0$ определяется формулой

$$\xi_0 = -\frac{1}{f_1(1)}\int\limits_0^{f_1(1)} \omega(\varphi)\,d\varphi = \ln 2 - 1$$

и не зависит от $p = u_0/y$, т. е. от подаваемой концентрации.

Искомое асимптотическое решение имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{v}(x, t) &= \omega^{-1}(x - \sigma t - \xi_0), \\ \tilde{u}(x, t) &= \sigma\omega^{-1}(x - \sigma t - \xi_0), \end{aligned} \tag{37}$$

где $\omega^{-1}(\xi)$ — обратная для $\omega(\varphi)$ функция.

На рис. 35 приведены результаты численного интегрирования уравнений (14) для изотермы Лэнгмюра методом конечных

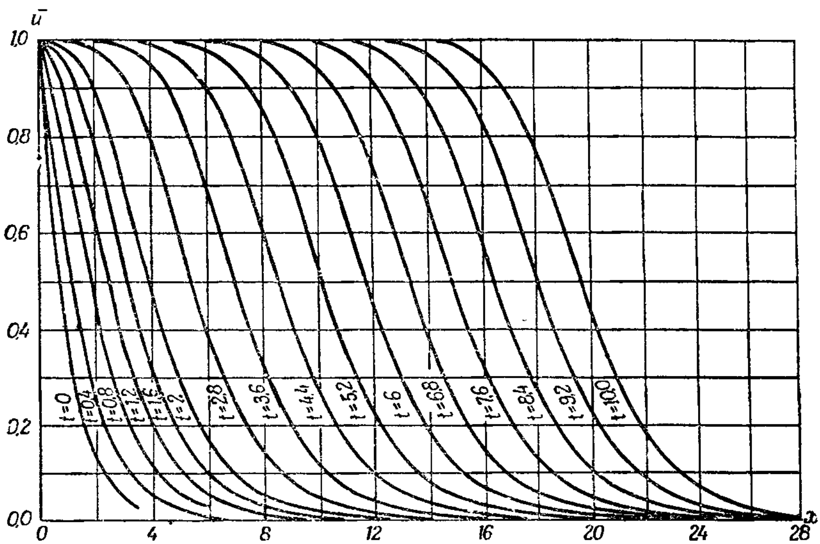


Рис. 35.

разностей. Эти графики даны для значений $0 < t \leqslant t_1 = 10$. При $t = t_1$ результаты численного интегрирования совпадают с асимптотическим решением с точностью до 1%. Для значений $t > t_1$ можно пользоваться асимптотическими формулами.