VI. Физические аналогии

При рассмотрении явлений в различных областях физики мы часто обнаруживаем общие черты в этих явлениях. Это приводит к тому, что при математической формулировке задачи мы получаем одни и те же уравнения, описывающие различные физические явления. Простейшим примером может служить уравнение

$$a\frac{d^2x}{dt^2}+bx=0,$$

описывающее различные колебательные процессы простейших систем: математический маятник, колебание груза под действием силы упругости пружины, электрические колебания в простом контуре с индуктивностью и емкостью и т. д. Общность уравнений для различных физических процессов позволяет на основании изучения свойств одного явления делать заключение о свойствах другого, менее изученного явления. Так, изучение различных акустических явлений может быть значительно облегчено предварительным рассмотрением подобных электрических схем.

Распространение электрических колебаний в системах с распределенными постоянными описывается, как известно, телеграфными уравнениями

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\partial I}{\partial x}&=C\frac{\partial V}{\partial t}+GV,\\ -\frac{\partial V}{\partial x}&=L\frac{\partial I}{\partial t}+RI,\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

где C, G, L, R — распределенные емкости, утечка, индуктивность и сопротивление системы. Если можно пренебречь сопротивлением и утечкой тока, то для V и I получаются обычные волновые уравнения

$$\frac{\partial^2V}{\partial x^2}-LC\frac{\partial^2V}{\partial t^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2I}{\partial x^2}-LC\frac{\partial^2I}{\partial t^2}=0,$$

а уравнения (1) принимают вид

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\partial I}{\partial x}&=C\frac{\partial V}{\partial t},\\ -\frac{\partial V}{\partial x}&=L\frac{\partial I}{\partial t}.\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

При решении задачи о распространении звука в одном направлении, например, при изучении движения воздуха в трубах, мы приходим к уравнениям

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho\frac{\partial v}{\partial t}, \\ -\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{\tau}\frac{\partial p}{\partial t}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где v — скорость колеблющихся частиц, ρ — плотность, p — давление, а $\tau = p_0\gamma$ — коэффициент упругости воздуха.

Подобие уравнений (2) и (3) позволяет установить соответствие между акустическими и электрическими величинами. Разности потенциалов соответствует давление, току — скорость смещения частиц. Плотность, определяющая инерционные свойства газа, соответствует индуктивности электрической цепи, а емкости электрической цепи соответствует $1/\tau$, т. е. обратная величина коэффициента упругости. Это же соответствие можно установить и из выражений кинетической и потенциальной энергий для электрической и акустической систем.

Возвращаясь к уравнениям (1), мы можем ввести акустические аналоги сопротивления и утечки. Величину акустического сопротивления приходится учитывать в тех случаях, когда при рассмотрении движения газа оказывается существенным трение газа о стенки сосуда. По аналогии с электрическим сопротивлением, которое определяется как отношение напряжения к току, можно ввести и акустическое сопротивление, определяемое отношением давления к току в среде, который пропорционален скорости смещения частиц газа, $R_A = p/uv$. В тех случаях, где рассматривается движение газа в пористой среде, приходится вводить величину, аналогичную утечке в электрических цепях. Эта величина, обозначаемая через P, называется пористостью и определяется частью объема материала, которая оказывается заполненной воздухом.

Механическим аналогом телеграфного уравнения является уравнение продольных колебаний стержня, которое подобно уравнениям (2) может быть записано в виде

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{k}\frac{\partial T}{\partial t}, \qquad -\frac{\partial T}{\partial x} = \rho\frac{\partial v}{\partial t},$$

где T — натяжение стержня, v — скорость колеблющихся точек, ρ — плотность и k — коэффициент упругости стержня.

Сравнивая это уравнение с уравнением (2), мы можем установить подобие между механическими и электрическими величинами. Так, устанавливая соответствие между электрическим напряжением и натяжением струны, током и скоростью движения частиц, мы получим, что обратная величина коэффициента упругости соответствует емкости, а плотность — индуктивности.

Таким образом, рассмотрение подобных динамических задач приводит к установлению соответствия между рядом электрических акустических и механических величин. Это соответствие можно иллюстрировать следующей таблицей [1]:

	Электрическая система	Акустическая система	Механическая система
Переменные	Напряжение V	Давление p	Натяжение (сила) T
	Ток I	Скорость частиц v	Скорость смещения $\dot{x}$
	Заряд e	Смещение u	Смещение x
Параметры	Индуктивность L	Инертность (плотность) ρ	Плотность массы ρ_m
	Емкость C	Акустическая емкость $C_A = 1/\tau$	Мягкость $C_M = 1/k$
	Сопротивление R	Акустическое сопротивление R_A	Механическое сопротивление R_M

Развитые выше соображения позволяют в ряде акустических задач получить некоторые сведения о характере явлений до решения задачи.

Так, задача о движении воздуха в порах для простых гармонических волн приводит к уравнениям [2])

$$-i\omega\rho_m u + ru = -\operatorname{grad} p,$$

$$\Delta p + i\,\frac{\gamma P\omega}{\rho c^2}(r - i\omega\rho_m)\,p = 0,$$

где u — объемная скорость воздуха через поры, p — давление, ρ — плотность, ρ_m — эффективная плотность воздуха в порах, которая может быть больше ρ, так как в порах вместе с воздухом могут колебаться и частицы вещества, P — пористость, c и ω — скорость и частота звука, r — сопротивление потоку, которое характеризует падение давления в материале. Положив $r = R_A$, $\rho_m = L_A$, $\frac{\gamma P}{\rho c^2} = C_A$, мы получим наши уравнения в виде

$$L_A\frac{\partial u}{\partial t} + R_A u = -\operatorname{grad} p,$$

$$C_A L_A\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + C_A R_A\frac{\partial p}{\partial t} = \Delta p.$$

[1]) См., например, Г. Ольсон, Динамические аналогии, ИЛ, 1947.
[2]) См. В. В. Фурдуев, Электроакустика, Гостехиздат, 1948.

Эти уравнения вполне подобны уравнениям распространения электрических колебаний в линии. Поэтому мы по аналогии с волновым сопротивлением линии

$$Z = \sqrt{\frac{R + i\omega L}{G + i\omega C}}$$

можем сразу написать выражение для сопротивления, называемого характеристическим импедансом пористого материала

$$Z = c\sqrt{\rho}\sqrt{\frac{\rho_w - i\frac{r}{\omega}}{\gamma P}},$$

считая при этом $G = 0$. Выражение характеристического импеданса указывает на затухание волн, распространяющихся в пористом материале.

Установленная аналогия между электрическими и акустическими явлениями позволяет заменить изучение ряда акустических задач рассмотрением эквивалентных электрических схем.

Метод подобия в последнее время нашел большое применение в моделирующих счетно-решающих устройствах, в которых для решения уравнения, соответствующего какому-либо физическому процессу, строится эквивалентная электрическая схема.