Функция $v(x,t)$ непрерывна, удовлетворяет уравнению теплопроводности, ограничена во всей области

$$|v(x,\ t)| \leqslant |u_1(x,\ t)| + |u_2(x,\ t)| < 2M \quad (-\infty < x < \infty,\ t \geqslant 0)$$

и удовлетворяет условию

$$v(x,\ 0) = 0.$$

Принцип максимального значения, которым мы пользовались при доказательстве единственности задачи для отрезка, здесь неприменим, так как в неограниченной области функция $v(x,t)$ может нигде не достигать максимальных значений. Чтобы воспользоваться этим принципом, рассмотрим область

$$|x| \leqslant L,$$

где L — вспомогательное число, которое затем будем неограниченно увеличивать, и функцию

$$V(x,\ t) = \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right). \tag{25}$$

Функция $V(x,t)$ непрерывна, удовлетворяет уравнению теплопроводности, в чем нетрудно убедиться дифференцированием, и кроме того, обладает следующими свойствами:

$$\begin{gathered} V(x,\ 0) \geqslant |v(x,\ 0)| = 0, \\ V(\pm L,\ t) \geqslant 2M \geqslant |v(\pm L,\ t)|. \end{gathered} \tag{26}$$

Для ограниченной области $|x| \leqslant L$, $0 \leqslant t \leqslant T$ справедлив принцип максимального значения. Применяя следствие 2 из предыдущего пункта для функции $\underline{u} = -V(x,t)$, $u = v(x,t)$ и $\bar{u} = V(x,t)$ и учитывая (26), получаем:

$$-\frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right) \leqslant v(x,\ t) \leqslant \frac{4M}{L^2}\left(\frac{x^2}{2} + a^2 t\right).$$

Фиксируем некоторые значения $(x,\ t)$ и, воспользовавшись произволом выбора L, будем его неограниченно увеличивать. Переходя к пределу при $L \to \infty$, получим:

$$v(x,\ t) \equiv 0,$$

что и доказывает теорему.

§ 2. Метод разделения переменных

1. Однородная краевая задача. Перейдем к решению первой краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке:

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x,\ t), \qquad (0 < x < l,\ t > 0) \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x,\ 0) = \varphi(x), \qquad (0 \leqslant x \leqslant l) \tag{2}$$

и граничными условиями

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t) \end{aligned}\right\} \quad (t \geqslant 0). \tag{3}$$

Изучение общей первой краевой задачи начнем с решения следующей простейшей задачи I:

найти непрерывное в замкнутой области $(0 \leqslant x \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T)$ *решение однородного уравнения*

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad 0 < x < l, \quad 0 < t \leqslant T, \tag{4}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l \tag{2}$$

и однородным граничным условиям

$$u(0, t) = 0, \qquad u(l, t) = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{5}$$

Для решения этой задачи рассмотрим, как принято в методе разделения переменных, сначала основную вспомогательную задачу:

найти решение уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx},$$

не равное тождественно нулю, удовлетворяющее однородным граничным условиям

$$u(0, t) = 0, \qquad u(l, t) = 0 \tag{5}$$

и представимое в виде

$$u(x, t) = X(x)\, T(t), \tag{6}$$

где $X(x)$ — *функция только переменного* x, $T(t)$ — *функция только переменного* t.

Подставляя предполагаемую форму решения (6) в уравнение (4) и производя деление обеих частей равенства на a^2XT, получим:

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \tag{7}$$

где $\lambda = \text{const}$, так как левая часть равенства зависит только от t, а правая — только от x.

Отсюда следует, что

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{8}$$

$$T' + a^2\lambda T = 0. \tag{8'}$$

Граничные условия (5) дают:

$$X(0) = 0, \qquad X(l) = 0. \tag{9}$$

Таким образом, для определения функции $X(x)$ мы получили задачу о собственных значениях (задачу Штурма — Лиувилля)

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X(0) = 0, \qquad X(l) = 0, \tag{10}$$

исследованную при решении уравнения колебаний в главе II (см. § 3, п. 1). При этом было показано, что только для значений параметра λ, равных

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots), \tag{11}$$

существуют нетривиальные решения уравнения (8), равные

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{12}$$

Этим значениям λ_n соответствуют решения уравнения (8′)

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2\lambda_n t}, \tag{13}$$

где C_n — не определенные пока коэффициенты.

Возвращаясь к основной вспомогательной задаче, видим, что функции

$$u_n(x,\ t) = X_n(x)\,T_n(t) = C_n e^{-a^2\lambda_n t}\sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{14}$$

являются частными решениями уравнения (4), удовлетворяющими нулевым граничным условиям.

Обратимся теперь к решению задачи (I). Составим формально ряд

$$u(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{15}$$

Функция $u(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям, так как им удовлетворяют все члены ряда. Требуя выполнения начальных условий, получаем:

$$\varphi(x) = u(x,\ 0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi n}{l}x, \tag{16}$$

т. е. C_n являются коэффициентами Фурье функции $\varphi(x)$ при разложении ее в ряд по синусам на интервале $(0,\ l)$:

$$C_n = \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\cdot d\xi. \tag{17}$$

Рассмотрим теперь ряд (15) с коэффициентами C_n, определяемыми по формуле (17), и покажем, что этот ряд удовлетворяет всем условиям задачи (I). Для этого надо доказать, что функция $u(x,t)$, определяемая рядом (15), дифференцируема, удовлетворяет уравнению в области $0<x<l$, $t>0$ и непрерывна в точках границы этой области (при $t=0$, $x=0$, $x=l$).

Так как уравнение (4) линейно, то в силу принципа суперпозиции ряд, составленный из частных решений, также будет решением, если он сходится и его можно дифференцировать почленно дважды по x и один раз по t (см. лемму главы II, § 3, п. 3). Покажем, что при $t \geqslant \bar{t} > 0$ ($\bar{t}$ — любое вспомогательное число) ряды производных

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$$

сходятся равномерно. В самом деле,

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| = \left| -C_n \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\pi n}{l} x \right| < |C_n| \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \cdot a^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}$$

В дальнейшем будут сформулированы дополнительные требования, которым должна удовлетворять функция $\varphi(x)$. Предположим сначала, что $\varphi(x)$ ограничена, $|\varphi(x)| < M$; тогда

$$|C_n| = \left|\frac{2}{l}\right| \left| \int_0^l \varphi(\xi) \sin\frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi \right| < 2M,$$

откуда следует, что

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| < 2M \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 \bar{t}} \quad \text{для} \quad t \geqslant \bar{t}$$

и аналогично

$$\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right| < 2M \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 n^2 e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 \bar{t}} \quad \text{для} \quad t \geqslant \bar{t}.$$

Вообще

$$\left|\frac{\partial^{k+l} u_n}{\partial t^k \, \partial x^l}\right| < 2M \left(\frac{\pi}{l}\right)^{2k+l} \cdot n^{2k+l} \cdot a^{2k} \cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 \bar{t}} \quad \text{для} \quad t \geqslant \bar{t}.$$

Исследуем сходимость мажорантного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$, где

$$\alpha_n = N n^q e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 \bar{t}}. \qquad (15')$$

По признаку Даламбера этот ряд сходится, так как

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^q}{n^q}\frac{e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2(n^2+2n+1)\bar{t}}}{e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2 n^2\bar{t}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^q e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2(2n+1)\bar{t}} = 0.$$

Отсюда вытекает возможность почленного дифференцирования ряда (15) любое число раз в области $t \geqslant \bar{t} > 0$. Далее, пользуясь принципом суперпозиции, заключаем, что функция, определенная этим рядом, удовлетворяет уравнению (4). В силу произвольности $\bar{t}$ это имеет место для всех $t > 0$. Тем самым доказано, что при $t > 0$ ряд (15) представляет функцию, дифференцируемую нужное число раз и удовлетворяющую уравнению (4) [1]).

Если функция $\varphi(x)$ непрерывна, имеет кусочно-непрерывную производную и удовлетворяет условиям $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(l) = 0$, то ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\pi n}{l} x \tag{15}$$

определяет непрерывную функцию при $t \geqslant 0$.

Действительно, из неравенства

$$|u_n(x, t)| < |C_n| \quad (\text{при } t \geqslant 0,\ 0 \leqslant x \leqslant l)$$

сразу же следует равномерная сходимость ряда (15) при $t \geqslant 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$, что и доказывает справедливость сделанного выше утверждения, если учесть, что для непрерывной и кусочно-гладкой функции $\varphi(x)$ ряд из модулей коэффициентов Фурье сходится, если $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$ [2]).

Итак, задача нахождения решения первой краевой задачи для однородного уравнения с нулевыми граничными условиями и непрерывным, кусочно-гладким начальным условием решена полностью.

---

[1]) При доказательстве того, что ряд (15) удовлетворяет уравнению $u_t = a^2 u_{xx}$ при $t > 0$, была использована только ограниченность коэффициентов Фурье C_n, которая, в частности, будет иметь место для любой ограниченной $\varphi(x)$.

[2]) См. гл. II, § 3, п. 3.

2. Функция источника. Преобразуем полученное решение (15), заменяя C_n их значениями:

$$u(x, t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{\pi n}{l}x=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\pi n}{l}\xi\,d\xi\right]\cdot e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x=$$

$$=\int_0^l\left[\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\sin\frac{\pi n}{l}\xi\right]\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Изменение порядков суммирования и интегрирования всегда законно при $t>0$ в силу того, что ряд в скобках сходится равномерно по ξ при $t>0$[1]).

Обозначим

$$G(x, \xi, t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t}\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\sin\frac{\pi n}{l}\xi. \qquad (18)$$

Пользуясь функцией $G(x,\xi,t)$, можно представить функцию $u(x,t)$ в виде

$$u(x, t)=\int_0^l G(x, \xi, t)\,\varphi(\xi)\,d\xi. \qquad (19)$$

Функция $G(x,\xi,t)$ называется *функцией мгновенного точечного источника* или, более подробно, функцией температурного влияния мгновенного точечного источника тепла.

Покажем, что функция источника $G(x,\xi,t)$, рассматриваемая как функция x, представляет распределение температуры в стержне $0\leqslant x\leqslant l$ в момент времени t, если температура в начальный момент $t=0$ равна нулю и в этот момент в точке $x=\xi$ мгновенно выделяется некоторое количество тепла (величину которого мы определим позже), а на краях стержня все время поддерживается нулевая температура.

Выражение «количество тепла Q, выделяющееся в точке ξ» обозначает, как обычно, что мы имеем дело с теплом, выделяющимся на «небольшом» интервале около изучаемой точки ξ.

---

[1]) Ряд $\sum \alpha_n$, где α_n определяется формулой (15′), при $q=0$ является мажорантным для ряда, стоящего в скобках.

Изменение температуры $\varphi_\varepsilon(\xi)$, вызываемое появлением тепла около точки, будет, очевидно, равно нулю вне интервала $(\xi-\varepsilon,\ \xi+\varepsilon)$, на котором выделяется тепло, а внутри этого интервала $\varphi_\varepsilon(\xi)$ можно считать положительной, непрерывной и дифференцируемой функцией, для которой

$$c\rho\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon}\varphi_\varepsilon(\xi)\,d\xi=Q, \tag{20}$$

так как левая часть этого уравнения и представляет количество тепла, вызвавшее изменение температуры на величину $\varphi_\varepsilon(\xi)$. Процесс распространения температуры в этом случае определяется формулой (19):

$$u_\varepsilon(x,\ t)=\int\limits_0^l G(x,\ \xi,\ t)\,\varphi_\varepsilon(\xi)\,d\xi. \tag{21}$$

Совершим теперь предельный переход при $\varepsilon\to0$. Принимая во внимание непрерывность G при $t>0$ и равенство (20) и применяя теорему среднего значения при фиксированных значениях x, t, будем иметь:

$$u_\varepsilon(x,\ t)=\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon}G(x,\ \xi,\ t)\,\varphi_\varepsilon(\xi)\,d\xi=$$
$$=G(x,\ \xi^*,\ t)\int\limits_{\xi-\varepsilon}^{\xi+\varepsilon}\varphi_\varepsilon(\xi)\,d\xi=G(x,\ \xi^*,\ t)\frac{Q}{c\rho}, \tag{21'}$$

где ξ^* — некоторая средняя точка интервала $(\xi-\varepsilon,\ \xi+\varepsilon)$. В силу непрерывности функции $G(x,\xi,t)$ по ξ при $t>0$ получаем:

$$\lim_{\varepsilon\to0}u_\varepsilon(x,\ t)=\frac{Q}{c\rho}G(x,\ \xi,\ t)=$$
$$=\frac{Q}{c\rho}\cdot\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2a^2t}\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\sin\frac{\pi n}{l}\xi. \tag{22}$$

Отсюда следует, что $G(x,\xi,t)$ представляет температуру в точке x в момент t, вызванную действием мгновенного точечного источника мощности $Q=c\rho$, помещенного в момент $t=0$ в точке ξ промежутка $(0,\ l)$.

Отметим следующее свойство функции $G(x,\xi,t)$: функция $G(x,\xi,t)\geqslant0$ при любых x, ξ и $t>0$. Действительно, рассмотрим начальную функцию $\varphi_\varepsilon(x)$, обладающую перечисленными выше свойствами, и соответствующее ей решение (21'). Из неотрицательности начального и граничных условий в силу принципа максимального значения следует, что

$$u_\varepsilon(x, t) \geqslant 0$$

для всех $0 \leqslant x \leqslant l$ и $t > 0$. Отсюда, воспользовавшись формулой (21′), имеем:

$$u_\varepsilon(x, t) = G(x, \xi^*, t)\frac{Q}{c\rho} \geqslant 0 \quad (\text{при } t > 0). \tag{21″}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, из (21′) получим неравенство

$$G(x, \xi, t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x, \quad \xi \leqslant l \quad \text{и} \quad t > 0,$$

которое и надо было доказать.

Этот результат имеет простой физический смысл. Однако установить его непосредственно из формулы (19) было бы затруднительно, поскольку $G(x, \xi, t)$ представляется знакопеременным рядом.

3. Краевые задачи с разрывными начальными условиями. Изложенная выше теория относится к решениям уравнения теплопроводности, непрерывным в замкнутой области $0 \leqslant x \leqslant \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Эти условия непрерывности являются весьма ограничительными. В самом деле, рассмотрим простейшую задачу об остывании равномерно нагретого стержня при нулевой температуре на краях. Дополнительные условия имеют вид

$$u(x, 0) = u_0, \qquad u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Если $u_0 \neq 0$, то решение этой задачи должно быть разрывным в точках $(0, 0)$ и $(l, 0)$. Этот пример показывает, что поставленные выше условия непрерывности начального значения и условия сопряжения его с граничными значениями исключают из рассмотрения практически важные случаи. Однако формула (19) дает решение краевой задачи и в этом случае.

В приложениях часто пользуются формулами, выходящими за границы условий их применимости, зачастую вообще не ставя вопроса об условии применимости формул. Последовательное обоснование всех формул было бы весьма громоздким и часто отвлекало бы внимание исследователя от количественных и качественных сторон явления, характерных для физической сущности процесса.

Однако мы считаем нужным, по крайней мере на простейших примерах, дать обоснование математического аппарата, достаточное для решения основных задач.

Рассмотрим краевые задачи с кусочно-непрерывными начальными функциями, не предполагая, что начальная функция сопряжена с граничными условиями. Этот класс дополнительных условий является достаточно общим для потребностей практики и достаточно простым для изложения теории. Нашей целью является доказать, что та же формула (19) дает решение поставленной задачи. Проведем ее исследование в несколько этапов. Докажем предварительно теорему:

Решение уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (0 < x < l, \ t > 0), \tag{4}$$

непрерывное в замкнутой области $(0 \leqslant x \leqslant l, \ 0 \leqslant t \leqslant T)$ *и удовлетворяющее условиям*

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \qquad t \geqslant 0, \tag{5}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \tag{2}$$

где $\varphi(x)$ — *произвольная непрерывная функция, обращающаяся в нуль при* $x = 0$, $x = l$, *определено однозначно и представляется формулой*

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t)\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{19}$$

Эта теорема была доказана выше в предположении дополнительного условия о кусочно-непрерывной дифференцируемости функции $\varphi(\xi)$.

Освободимся от этого условия. Рассмотрим последовательность непрерывных кусочно-дифференцируемых функций $\varphi_n(\xi)$ $(\varphi_n(0) = \varphi_n(l) = 0)$, равномерно сходящуюся к $\varphi(x)$. (В качестве $\varphi_n(x)$ можно выбрать, например, функции, представимые ломаными линиями, совпадающими с $\varphi(x)$ в точках $\frac{l \cdot k}{n}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$). Функции $u_n(x, t)$, определяемые формулой (19) через $\varphi_n(x)$, удовлетворяют всем условиям теоремы, так как $\varphi_n(x)$ удовлетворяют условию кусочной дифференцируемости. Эти функции равномерно сходятся и определяют в пределе непрерывную функцию $u(x, t)$. В самом деле, для любого ε можно указать такое $n(\varepsilon)$, что

$$|\varphi_{n_1}(x) - \varphi_{n_2}(x)| < \varepsilon \quad (0 \leqslant x \leqslant l), \quad \text{если} \quad n_1, \ n_2 \geqslant n(\varepsilon),$$

так как эти функции по условию сходятся равномерно. Отсюда в силу принципа максимальных значений следует также, что

$$|u_{n_1}(x, t) - u_{n_2}(x, t)| < \varepsilon \ (0 \leqslant x \leqslant l, \ 0 \leqslant t \leqslant T), \text{ если } n_1, \ n_2 \geqslant n(\varepsilon),$$

что и доказывает равномерную сходимость последовательности функций $u_n(x, t)$ к некоторой непрерывной функции $u(x, t)$.

Если мы, фиксировав точку (x, t), перейдем к пределу под знаком интеграла, то получим, что функция

$$u(x, t) = \lim_{n \to \infty} u_n(x, t) = \lim_{n \to \infty} \int_0^l G(x, \xi, t)\varphi_n(\xi)\,d\xi = \int_0^l G(x, \xi, t)\varphi(\xi)\,d\xi$$

непрерывна в замкнутой области $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$ и удовлетворяет начальному условию (2). В силу сноски на стр. 200 нетрудно убедиться, что она также удовлетворяет уравнению (4) при $t > 0$. Доказательство теоремы закончено.

Формула (19) дает единственное непрерывное решение рассматриваемой задачи.

Обратимся к доказательству теоремы единственности для случая кусочно-непрерывной начальной функции $\varphi(x)$, не предполагая, что эта функция сопряжена с граничными условиями. Докажем, что *функция, непрерывная в области $t > 0$, удовлетворяющая уравнению теплопроводности*

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{4}$$

в области $0 < x < l$, $t > 0$, нулевым граничным условиям

$$u(0, t) = u(l, t) = 0 \tag{5}$$

и начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \tag{2}$$

определена однозначно, если:

1) *она непрерывна в точках непрерывности функции $\varphi(x)$ и*

2) *ограничена в замкнутой области $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant \bar{t}_0$, где $\bar{t}_0$ — произвольное положительное число.*

Предположим, что такая функция существует. Очевидно, что в силу предшествующей теоремы она может быть представлена в области $t > \bar{t}$ формулой

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t - \bar{t})\, \varphi_{\bar{t}}(\xi)\, d\xi \qquad (t > \bar{t} > 0) \tag{19'}$$

при любом $\bar{t}$, где $\bar{t}$ — вспомогательное значение,

$$0 < \bar{t} \leqslant t, \qquad \varphi_{\bar{t}}(x) = u(x, \bar{t}).$$

Совершим предельный переход в этой формуле при $\bar{t} \to 0$, сохраняя x и t неизменными. Покажем [1]), что возможен переход под знаком интеграла

[1]) Доказываемая ниже теорема является частным случаем теоремы Лебега о возможности перехода к пределу под знаком интеграла, если последовательность функций $F_n(x)$ почти всюду сходится к предельной суммируемой функции $F(x)$ и если эта последовательность ограничена суммируемой функцией. Это доказательство приводится, чтобы избежать пользования теоретико-множественными понятиями. Если воспользоваться теоретико-множественными понятиями, то совершенно аналогично можно доказать теорему о том, что решение уравнения теплопроводности $u(x, t)$, удовлетворяющее нулевым граничным условиям, однозначно определено:

1) если $u(x, t) \leqslant F(x)$, где $F(x)$ — некоторая суммируемая функция и

2) если почти всюду

$$\lim_{t \to 0} u(x, t) = \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — заданная начальная суммируемая функция.

и, следовательно, функция $u(x, t)$ представима в виде интеграла

$$u(x, t) = \int_0^l G(x, \xi, t)\,\varphi(\xi)\,d\xi \qquad [\varphi(\xi) = u(\xi, 0)], \tag{19}$$

однозначно ее определяющего.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — точки разрыва функции $\varphi(x)$. Полагая $x_0 = 0$ и $x_{n+1} = l$ (рис. 38) и беря замкнутые отрезки I_k $(x_k + \delta \leqslant x \leqslant x_{k+1} - \delta)$

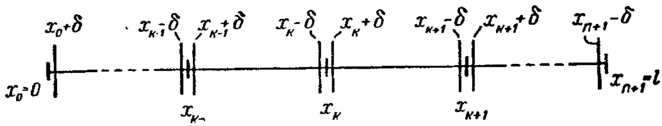

Рис. 38.

$(k = 0, 1, \ldots, n)$, где δ — некоторое фиксированное достаточно малое число, нетрудно убедиться, что подынтегральная функция из (19′) равномерно сходится к подынтегральной функции из (19) на всяком отрезке I_k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$. На отрезках $\bar{I}_k$ $(x_k - \delta \leqslant x \leqslant x_k + \delta)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$, $\bar{I}_0$ $(x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \delta)$, и $\bar{I}_{n+1}$ $(x_{n+1} - \delta \leqslant x \leqslant x_{n+1})$ подынтегральные выражения в (19) и (19′) ограничены некоторым числом N при любом $\bar{t}\,(0 \leqslant \bar{t} \leqslant \bar{t}_0)$ в силу предположенной ограниченности функции $u(x, t)$ и в силу непрерывности $G(x, \xi, t)$ при $0 \leqslant \xi \leqslant l$, $t > 0$. Разбивая разность интегралов (19) и (19′) на $2n + 3$ интеграла, взятых по I_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ и $\bar{I}_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n + 1)$, видим, что эта разность может быть сделана меньше наперед заданного числа ε, если

$$\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2n+3}\,\frac{1}{4N},$$

так что

$$\left| \int_{\bar{I}_k} \left[G(x, \xi, t - \bar{t})\,\varphi_{\bar{t}}(\xi) - G(x, \xi, t)\,\varphi(\xi) \right] d\xi \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2n+3},$$

и если $\bar{t}$ выбрано настолько малым, что

$$\left| G(x, \xi, t - \bar{t})\,\varphi_{\bar{t}}(\xi) - G(x, \xi, t)\,\varphi(\xi) \right| < \frac{1}{l}\,\frac{\varepsilon}{2n+3} \quad \text{для} \quad t \leqslant \bar{t} \quad \text{на} \quad I_k \quad (k = 0, 1, \ldots, n),$$

так что

$$\int_{I_k} \left[G(x, \xi, t - \bar{t})\,\varphi_{\bar{t}}(\xi) - G(x, \xi, t)\,\varphi(\xi) \right] d\xi < \frac{\varepsilon}{2n+3} \quad \text{для} \quad t \leqslant \bar{t} \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Отсюда следует неравенство

$$\left| \int_0^l \left[G(x, \xi, t - \bar{t})\,\varphi_{\bar{t}}(\xi) - G(x, \xi, t)\,\varphi(\xi) \right] d\xi \right| < \varepsilon \quad \text{для} \quad t \leqslant \bar{t},$$

доказывающее законность перехода к пределу при $\bar{t} \to 0$ под знаком интеграла. Таким образом, если существует функция $u(x, t)$, удовлетворяющая условиям теоремы, то она представима в виде (19), что и доказывает единственность такой функции.

Докажем теперь, что *формула* (19) *представляет ограниченное решение уравнения* (4), *удовлетворяющее условиям* (2) *для любой кусочно-непрерывной функции* $\varphi(x)$, *непрерывное во всех точках непрерывности* $\varphi(x)$.

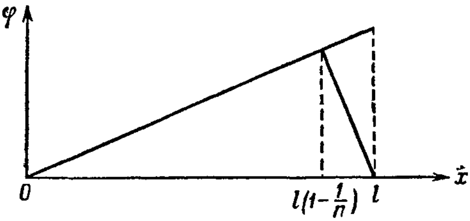

Рис. 39.

Эту теорему мы докажем в два приема. Докажем, что она верна, если $\varphi(x)$ — линейная функция:

$$\varphi(x) = cx. \qquad (2')$$

Рассмотрим последовательность вспомогательных непрерывных функций (рис. 39)

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} cx & \text{для} \quad 0 \leqslant x \leqslant l\left(1 - \frac{1}{n}\right), \\ \alpha(l - x) & \text{для} \quad l\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leqslant x \leqslant l, \quad \alpha = (n-1)c. \end{cases}$$

Функции $u_n(x, t)$, определенные при помощи формулы (19) для $\varphi_n(x)$, являются непрерывными решениями уравнения теплопроводности с нулевыми граничными условиями и начальными условиями

$$u_n(x, 0) = \varphi_n(x).$$

Так как

$$\varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant l),$$

то в силу принципа максимальных значений

$$u_n(x, t) \leqslant u_{n+1}(x, t).$$

Функция $U_0(x) = cx$ является непрерывным решением уравнения теплопроводности. В силу принципа максимального значения

$$u_n(x, t) \leqslant U_0(x),$$

так как это неравенство имеет место при $x = 0$, $x = l$ и $t = 0$. Таким образом, $u_n(x, t)$ есть монотонно неубывающая последовательность, ограниченная сверху функцией $U_0(x)$, откуда следует, что эта последовательность сходится. Нетрудно видеть, что

$$u(x, t) = \lim_{n\to\infty} u_n(x, t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^l G(x, \xi, t)\varphi_n(\xi)\,d\xi =$$

$$= \int_0^l G(x, \xi, t)\varphi(\xi)\,d\xi \leqslant U_0(x),$$

так как переход к пределу под знаком интеграла законен. В силу сноски на стр. 204 эта функция удовлетворяет уравнению и нулевым граничным условиям при $t > 0$. Докажем, что эта функция непрерывна при $t = 0$ для $0 \leqslant x < l$. Пусть $x_0 < l$. Выберем n так, чтобы $x_0 < l\left(1 - \frac{1}{n}\right)$. В этом случае $\varphi_n(x_0) = U_0(x_0)$. Принимая во внимание, что

$$u_n(x, t) \leqslant u(x, t) \leqslant U_0(x)$$

и что

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ t\to 0}} u_n(x, t) = \lim_{x\to x_0} U_0(x) = \varphi(x_0),$$

заключаем, что существует предел

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ t\to 0}} u(x, t) = \varphi(x_0),$$

не зависящий от способа стремления $x \to x_0$ и $t \to 0$. Отсюда и следует непрерывность $u(x, t)$ в точке $(x_0, 0)$. Эта функция ограничена, так как она не превосходит $U_0(x)$. Итак, для $\varphi(x) = cx$ теорема доказана.

Заменой x на $l - x$ убеждаемся в том, что теорема верна для

$$\varphi(x) = b(l - x). \tag{2''}$$

Отсюда следует, что она верна для любой функции типа

$$\varphi(x) = B + Ax,$$

так как подобная функция может быть получена суммированием (2′) и (2″). Далее, отсюда следует также, что теорема верна для любой непрерывной функции без предположения о том, что $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. В самом деле, любую функцию $\varphi(x)$ такого типа можно представить в виде

$$\varphi(x) = \left[\varphi(0) + \frac{x}{l}(\varphi(l) - \varphi(0))\right] + \psi(x),$$

где слагаемое в квадратных скобках — линейная функция, а $\psi(x)$ — непрерывная функция, обращающаяся в нуль на концах отрезка: $\psi(0) = \psi(l) = 0$. Так как мы убедились уже в том, что для каждого слагаемого теорема применима, то отсюда следует, что теорема верна и для $\varphi(x)$.

Обратимся теперь к доказательству теоремы для произвольной кусочно-непрерывной функции $\varphi(x)$. Формула (19) и в этом случае определяет решение, удовлетворяющее уравнению и нулевым граничным условиям.

Пусть точка x_0 — какая-либо точка непрерывности функции $\varphi(x)$. Докажем, что для любого ε можно найти $\delta(\varepsilon)$ такое, что $|u(x,t)-\varphi(x_0)|<\varepsilon$, если $|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$ и $t<\delta(\varepsilon)$. В силу непрерывности функции $\varphi(x)$ в точке x_0 существует $\eta(\varepsilon)$ такое, что

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\qquad \text{для}\quad |x-x_0|<\eta(\varepsilon),$$

откуда

$$\varphi(x_0)-\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\varphi(x)\leqslant\varphi(x_0)+\frac{\varepsilon}{2}\quad \text{для}\quad |x-x_0|<\eta(\varepsilon). \tag{23}$$

Построим вспомогательные непрерывные дифференцируемые функции $\bar\varphi(x)$ и $\underline{\varphi}(x)$:

$$\left.\begin{aligned}\bar\varphi(x)&=\varphi(x_0)+\frac{\varepsilon}{2} &&\text{для}\quad |x-x_0|<\eta(\varepsilon),\\ \bar\varphi(x)&\geqslant\varphi(x) &&\text{для}\quad |x-x_0|>\eta(\varepsilon),\end{aligned}\right\}\tag{а}$$

$$\left.\begin{aligned}\underline{\varphi}(x)&=\varphi(x_0)-\frac{\varepsilon}{2} &&\text{для}\quad |x-x_0|<\eta(\varepsilon),\\ \underline{\varphi}(x)&\leqslant\varphi(x) &&\text{для}\quad |x-x_0|>\eta(\varepsilon).\end{aligned}\right\}\tag{б}$$

На интервале $|x-x_0|>\eta(\varepsilon)$ функции $\bar\varphi$ и $\underline{\varphi}$ удовлетворяют только условиям (а) и (б), а в остальном произвольны. В силу неравенств (23),

$$\underline{\varphi}(x)\leqslant\varphi(x)\leqslant\bar\varphi(x). \tag{24}$$

Рассмотрим функции

$$\bar u(x,t)=\int_0^l G(x,\xi,t)\,\bar\varphi(\xi)\,d\xi,$$

$$\underline{u}(x,t)=\int_0^l G(x,\xi,t)\,\underline{\varphi}(\xi)\,d\xi.$$

В силу непрерывности функций $\bar\varphi(x)$ и $\underline{\varphi}(x)$ функции $\bar u(x,t)$ и $\underline{u}(x,t)$ непрерывны в точке x_0, т. е. найдется такое $\delta(\varepsilon)$, что

$$\left.\begin{aligned}|\bar u(x,t)-\bar\varphi(x)|&\leqslant\frac{\varepsilon}{2},\\ |\underline{u}(x,t)-\underline{\varphi}(x)|&\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}\right\}\quad \text{для}\quad |x-x_0|<\delta(\varepsilon),\quad t<\delta(\varepsilon),$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}(x, t) &\leqslant \bar{\varphi}(x) + \frac{\varepsilon}{2} = \varphi(x_0) + \varepsilon,\\ \underline{u}(x, t) &\geqslant \underline{\varphi}(x) - \frac{\varepsilon}{2} = \varphi(x_0) - \varepsilon\end{aligned}\right\} \quad \text{для} \quad |x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad t < \delta(\varepsilon),$$

В силу неотрицательности функции $G(x, \xi, t)$ из формулы (24) следует, что

$$\underline{u}(x, t) \leqslant u(x, t) \leqslant \bar{u}(x, t). \tag{25}$$

Отсюда получаем неравенства

$$\varphi(x_0) - \varepsilon \leqslant u(x, t) \leqslant \varphi(x_0) + \varepsilon \quad \text{для} \quad |x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad t < \delta(\varepsilon)$$

или

$$|u(x, t) - \varphi(x_0)| < \varepsilon \quad \text{для} \quad |x - x_0| < \delta(\varepsilon), \quad t < \delta(\varepsilon),$$

что и требовалось доказать. Ограниченность функции $|u(x, t)|$ следует из (25) и из ограниченности функций $\bar{u}(x, t)$ и $\underline{u}(x, t)$. Этим теорема доказана.

4. Неоднородное уравнение теплопроводности. Рассмотрим неоднородное уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = 0 \tag{26}$$

и граничными условиями

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= 0,\\ u(l, t) &= 0.\end{aligned}\right. \tag{5}$$

Будем искать решение этой задачи $u(x, t)$ в виде ряда Фурье по собственным функциям задачи (11), т. е. по функциям $\left\{\sin \frac{\pi n}{l} x\right\}$:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x, \tag{27}$$

считая при этом t параметром. Для нахождения функции $u(x, t)$ надо определить функции $u_n(t)$. Представим функцию $f(x, t)$ в виде ряда

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi, t) \sin \frac{\pi n}{l} \xi \, d\xi. \tag{28}$$

Подставляя предполагаемую форму решения в исходное уравнение (1), будем иметь:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n}{l}x\left\{\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 u_n(t) + \dot{u}(t) - f_n(t)\right\} = 0.$$

Это уравнение будет удовлетворено, если все коэффициенты разложения равны нулю, т. е.

$$\dot{u}_n(t) = -a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 u_n(t) + f_n(t). \tag{29}$$

Пользуясь начальным условием для $u(x, t)$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0)\sin\frac{\pi n}{l}x = 0,$$

получаем начальное условие для $u_n(t)$:

$$u_n(0) = 0. \tag{30}$$

Решая обыкновенное дифференциальное уравнение (29) с нулевым начальным условием (30)[1]), находим:

$$u_n(t) = \int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2(t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau. \tag{31}$$

Подставляя выражение (31) для $u_n(t)$ в формулу (27), получим решение исходной задачи в виде

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2(t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau\right]\sin\frac{\pi n}{l}x. \tag{32}$$

Воспользуемся выражением (28) для $f_n(\tau)$ и преобразуем найденное решение (32):

$$u(x, t) = \int_0^t\int_0^l\left\{\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2(t-\tau)}\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\sin\frac{\pi n}{l}\xi\right\}f(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau =$$

$$= \int_0^t\int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{33}$$

где

$$G(x, \xi, t-\tau) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2(t-\tau)}\sin\frac{\pi n}{l}x\cdot\sin\frac{\pi n}{l}\xi \tag{34}$$

совпадает с функцией источника, определяемой формулой (18).

[1]) См. мелкий шрифт в конце п. 4, § 3, гл. II.

Выясним физический смысл полученного решения

$$u(x, t)=\int_0^t\int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau. \tag{33}$$

Предположим, что функция $f(\xi,\tau)$ отлична от нуля лишь в достаточно малой окрестности точки $M_0(\xi_0,\tau_0)$

$$\xi_0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0+\Delta\xi, \qquad \tau_0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0+\Delta\tau.$$

Функция $F(\xi,\tau)=c\rho f(\xi,\tau)$ представляет плотность тепловых источников. Общее количество тепла, выделяющееся на отрезке $(0, l)$ за все время действия источника (т. е. за $\Delta\tau$), равно

$$Q=\int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau}\int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} c\rho f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau. \tag{35}$$

Применим теорему о среднем к выражению

$$u(x, t)=\int_0^t\int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau=$$

$$=\int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta\tau}\int_{\xi_0}^{\xi_0+\Delta\xi} G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau=G(x, \bar{\xi}, t-\bar{\tau})\cdot\frac{Q}{c\rho}=\bar{u}(x, t),$$

где

$$\xi_0<\bar{\xi}<\xi_0+\Delta\xi, \qquad \tau_0<\bar{\tau}<\tau_0+\Delta\tau.$$

Переходя к пределу при $\Delta\xi\to 0$ и $\Delta\tau\to 0$, получим функцию

$$u(x, t)=\lim_{\substack{\Delta\xi\to 0\\ \Delta\tau\to 0}}\bar{u}(x, t)=\frac{Q}{c\rho}G(x, \xi_0, t-\tau_0), \tag{36}$$

которую можно интерпретировать как функцию влияния мгновенного источника тепла, сосредоточенного в точке ξ_0 в момент τ_0.

Если известна функция $\frac{Q}{c\rho}G(x, \xi, t-\tau)$, представляющая действие единичного мгновенного сосредоточенного источника, то действие источников, непрерывно распределенных с плотностью $F(x, t)=c\rho f(x, t)$, должно выражаться формулой (33), как это непосредственно следует из физического смысла функции $G(x, \xi, t-\tau)$.

Итак, температурное влияние тепловых источников, действующих в области $(\xi_0, \xi_0+\Delta\xi)(\tau_0, \tau_0+\Delta\tau)$, дается выражением

$$G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau)\,\Delta\xi\,\Delta\tau \quad \left(\frac{Q}{c\rho}=f(\xi, \tau)\,\Delta\xi\,\Delta\tau\right).$$

Если источники распределены непрерывно, то, суммируя тепловые влияния источников, действующих во всей области $0 \leqslant \xi \leqslant l$, $0 \leqslant \tau \leqslant t$, получим после предельного перехода при $\Delta\xi \to 0$ и $\Delta\tau \to 0$

$$u(x, t) = \int_0^t \int_0^l G(x, \xi, t-\tau) f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau.$$

Таким образом, исходя из физического смысла функции источника $G(x, \xi, t)$, можно было бы сразу написать выражение (33) для функции, дающей решение неоднородного уравнения.

Имея форму, в которой должно представляться решение задачи, можно исследовать условия применимости этой формулы в отношении функции $f(\xi, \tau)$. Мы не будем проводить этого исследования.

Мы рассматривали здесь неоднородное уравнение с нулевыми начальными условиями. Если начальное условие отлично от нуля, то к этому решению следует прибавить решение однородного уравнения с заданным начальным условием $u(x, 0) = \varphi(x)$, найденное в п. 1.

5. Общая первая краевая задача. Рассмотрим общую первую краевую задачу для уравнения теплопроводности:

найти решение уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \tag{1}$$

с дополнительными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} u(0, t) &= \mu_1(t), \\ u(l, t) &= \mu_2(t). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Введем новую неизвестную функцию $v(x, t)$

$$u(x, t) = U(x, t) + v(x, t), \tag{37}$$

представляющую отклонение от некоторой известной функции $U(x, t)$.

Эта функция $v(x, t)$ будет определяться как решение уравнения

$$v_t - a^2 v_{xx} = \bar{f}(x, t),$$

$$\bar{f}(x, t) = f(x, t) - [U_t - a^2 U_{xx}]$$

с дополнительными условиями

$$\begin{aligned} v(x, 0) &= \bar{\varphi}(x), & \bar{\varphi}(x) &= \varphi(x) - U(x, 0), \\ v(0, t) &= \bar{\mu}_1(t), & \bar{\mu}_1(t) &= \mu_1(t) - U(0, t), \\ v(l, t) &= \bar{\mu}_2(t), & \bar{\mu}_2(t) &= \mu_2(t) - U(l, t). \end{aligned}$$

Выберем вспомогательную функцию $U(x,t)$ таким образом, чтобы

$$\bar{\mu}_1(t)=0 \quad \text{и} \quad \bar{\mu}_2(t)=0,$$

для чего достаточно положить[1])

$$U(x, t)=\mu_1(t)+\frac{x}{l}[\mu_2(t)-\mu_1(t)].$$

Таким образом, нахождение функции $u(x,t)$, дающей решение общей краевой задачи, сведено к нахождению функции $v(x,t)$, дающей решение краевой задачи с нулевыми граничными условиями. Метод нахождения функции $v(x,t)$ дан в п. 4.

Изложенная выше формальная схема решения задач при наличии неоднородностей в уравнении и граничных условиях не всегда удобна для представления искомой функции $u(x,t)$. Трудности, возникающие при нахождении вспомогательной функции $v(x,t)$, зависят от функции $U(x,t)$, от которой ищется отклонение.

В частности, для задач со стационарными неоднородностями удобнее выделять стационарное решение и искать отклонение от этого решения[2]).

Рассмотрим, например, задачу для ограниченного стержня $(0, l)$, концы которого поддерживаются при постоянных температурах u_0 и u_1:

$$\begin{gathered} u_t=a^2u_{xx},\\ u(x, 0)=\varphi(x),\\ u(0, t)=u_0,\\ u(l, t)=u_1. \end{gathered}$$

Решение будем искать в виде суммы

$$u(x, t)=\bar{u}(x)+v(x, t),$$

где $\bar{u}(x)$ — стационарная температура, а $v(x,t)$ — отклонение от стационарной температуры.

Для функций $\bar{u}(x)$ и $v(x,t)$ будем иметь условия

$$\begin{array}{ll} \bar{u}''=0, & v_t=a^2v_{xx};\\ \bar{u}(0)=u_0, & v(x, 0)=\varphi(x)-\bar{u}(x)=\varphi_1(x);\\ \bar{u}(l)=u_1, & v(0, t)=0,\\ & v(l, t)=0. \end{array}$$

Отсюда находим:

$$\bar{u}(x)=u_0+\frac{x}{l}(u_1-u_0).$$

---

[1]) См. гл. II, § 3, п. 5.

[2]) См. гл. II, § 3, п. 6.

Функцию $v(x, t)$, определяемую начальным условием и однородными граничными условиями, без труда находим методом разделения переменных.

Задачи

1. Вывести уравнение для процесса нагревания однородной тонкой проволоки постоянным электрическим током, если на ее поверхности происходит теплообмен с окружающей средой.

2. Вывести уравнение диффузии в среде, равномерно движущейся в направлении оси x со скоростью w. Рассмотреть случай одной независимой переменной.

3. Исходя из уравнений Максвелла, предполагая $E_x = E_z = 0$, $H_z = 0$ и пренебрегая токами смещения, показать, что в однородной проводящей среде составляющая электромагнитного поля E_y удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t},$$

где σ — проводимость среды, c — скорость света. Вывести уравнения для H_x.

4. Дать физическое истолкование следующих граничных условий в задачах теплопроводности и диффузии:

$$\text{а)}\ u(0, t) = 0, \qquad \text{б)}\ u_x(0, t) = 0,$$

$$\text{в)}\ \left.\begin{aligned} &u_x(0, t) - hu(0, t) = 0, \\ &u_x(l, t) + hu(l, t) = 0 \end{aligned}\right. \quad (h > 0).$$

5. Решить задачу об остывании равномерно нагретого однородного стержня при нулевой температуре на концах, предполагая отсутствие теплообмена на боковой поверхности.

6. Начальная температура стержня $u(x, 0) = u_0 = \text{const}$ при $0 < x < l$. Температура концов поддерживается постоянной $u(0, t) = u_1$; $u(l, t) = u_2$ при $0 < t < \infty$. Найти температуру стержня, если теплообмен на боковой поверхности отсутствует. Найти стационарную температуру.

7. Решить задачу 6 при следующих граничных условиях: на одном конце поддерживается постоянная температура, второй конец теплоизолирован.

8. Решить задачу о нагревании тонкой однородной проволоки постоянным электрическим током, если начальная температура, граничная температура, а также температура окружающей среды равны нулю.

9. Цилиндр длины l, заполненный воздухом при давлении и температуре окружающей среды, открывают с одного конца в начальный момент времени, и из окружающей атмосферы, где концентрация некоторого газа равна u_0, начинается диффузия газа в цилиндр. Найти количество газа, диффундировавшего в цилиндр за время t, если начальная концентрация газа в цилиндре равна нулю.

10. Решить задачу 9 в предположении, что левый конец цилиндра закрыт полупроницаемой перегородкой.

11. Решить задачу об остывании однородного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью, если его начальная температура $u(x, 0) = \varphi(x)$, а на концах происходит теплообмен со средой нулевой температуры. Рассмотреть частный случай $\varphi(x) = u_0$.

12. Решить задачу 11, предполагая, что температура окружающей среды равна U_0.

13. Решить задачу 11, считая, что на боковой поверхности происходит теплообмен со средой, температура которой:

а) равна нулю

б) постоянна и равна u_1.

14. Найти установившуюся температуру стержня, пренебрегая теплообменом на боковой поверхности и считая, что один конец стержня теплоизолирован, а ко второму концу подводится поток тепла, гармонически меняющийся во времени.

15. Решить задачу 14, считая, что один конец стержня имеет нулевую температуру, а температура второго конца гармонически меняется во времени.

16. Стержень $(0, l)$ составлен из двух однородных кусков одинакового поперечного сечения, соприкасающихся в точке $x = x_0$ и обладающих характеристиками a_1, k_1 и, соответственно, a_2, k_2. Найти установившуюся температуру в таком стержне (тепловые волны), если один конец стержня $(x = 0)$ поддерживается при нулевой температуре, а температура второго меняется синусоидально во времени.

17. Левый конец составного стержня задачи 16 поддерживается при температуре, равной нулю, а правый — при температуре $u(l, t) = u_1$, начальная же температура стержня равна нулю. Найти температуру $u(x, t)$ стержня на регулярном режиме (первый член разложения).

18. Найти температуру $u(x, t)$ стержня, начальная температура которого равна нулю, а граничные условия имеют вид

$$u(0, t) = Ae^{-\alpha t}, \qquad u(l, t) = B,$$

где A, B и $\alpha > 0$ — постоянные.

§ 3. Задачи на бесконечной прямой

1. Распространение тепла на бесконечной прямой. Функция источника для неограниченной области. Рассмотрим на бесконечной прямой задачу с начальными данными (задачу Коши):

найти ограниченную функцию $u(x, t)$, определенную в области $-\infty < x < \infty$, $t \geqslant 0$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad t > 0, \tag{1}$$

и начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad -\infty < x < \infty. \tag{2}$$

Если $\varphi(x)$ — непрерывная функция, то выполнение начального условия будем понимать в том смысле, что $u(x, t)$ непрерывно при $t = 0$, т. е.

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ x \to x_0}} u(x, t) = \varphi(x_0).$$

Как мы видели в п. 7, § 1, решение уравнения теплопроводности однозначно определяется своими начальными условиями, если оно ограничено. Поэтому в формулировку теорем вводится условие ограниченности.

Дадим сначала формальную схему решения поставленной задачи, основанную на разделении переменных.

Будем искать ограниченное нетривиальное решение уравнения (1), представимое в виде произведения

$$u(x, t) = X(x)\,T(t). \tag{3}$$