14. Найти установившуюся температуру стержня, пренебрегая теплообменом на боковой поверхности и считая, что один конец стержня теплоизолирован, а ко второму концу подводится поток тепла, гармонически меняющийся во времени.

15. Решить задачу 14, считая, что один конец стержня имеет нулевую температуру, а температура второго конца гармонически меняется во времени.

16. Стержень $(0, l)$ составлен из двух однородных кусков одинакового поперечного сечения, соприкасающихся в точке $x = x_0$ и обладающих характеристиками a_1, k_1 и, соответственно, a_2, k_2. Найти установившуюся температуру в таком стержне (тепловые волны), если один конец стержня ($x = 0$) поддерживается при нулевой температуре, а температура второго меняется синусоидально во времени.

17. Левый конец составного стержня задачи 16 поддерживается при температуре, равной нулю, а правый — при температуре $u(l, t) = u_1$, начальная же температура стержня равна нулю. Найти температуру $u(x, t)$ стержня на регулярном режиме (первый член разложения).

18. Найти температуру $u(x, t)$ стержня, начальная температура которого равна нулю, а граничные условия имеют вид

$$u(0, t) = Ae^{-\alpha t}, \qquad u(l, t) = B,$$

где A, B и $\alpha > 0$ — постоянные.

§ 3. Задачи на бесконечной прямой

1. Распространение тепла на бесконечной прямой. Функция источника для неограниченной области. Рассмотрим на бесконечной прямой задачу с начальными данными (задачу Коши):

найти ограниченную функцию $u(x, t)$, определенную в области $-\infty < x < \infty$, $t \geqslant 0$, удовлетворяющую уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad -\infty < x < \infty, \qquad t > 0, \tag{1}$$

и начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad -\infty < x < \infty. \tag{2}$$

Если $\varphi(x)$ — непрерывная функция, то выполнение начального условия будем понимать в том смысле, что $u(x, t)$ непрерывно при $t = 0$, т. е.

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ x \to x_0}} u(x, t) = \varphi(x_0).$$

Как мы видели в п. 7, § 1, решение уравнения теплопроводности однозначно определяется своими начальными условиями, если оно ограничено. Поэтому в формулировку теорем вводится условие ограниченности.

Дадим сначала формальную схему решения поставленной задачи, основанную на разделении переменных.

Будем искать ограниченное нетривиальное решение уравнения (1), представимое в виде произведения

$$u(x, t) = X(x)\, T(t). \tag{3}$$

Подставляя выражение (3) в (1), получаем:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = -\lambda^2,$$

где λ^2 — параметр разделения. Отсюда следует:

$$T' + a^2\lambda^2 T = 0, \tag{4}$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0. \tag{5}$$

Решая уравнения (4) и (5), найдем частные решения уравнения (1) вида

$$u_\lambda(x, t) = A(\lambda)\, e^{-\lambda^2 a^2 t \pm i\lambda x}, \tag{6}$$

удовлетворяющие условию ограниченности. Здесь λ — любое вещественное число $-\infty < \lambda < \infty$; поэтому в (6) возьмем знак «плюс» и образуем функцию

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda)\, e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda x}\, d\lambda. \tag{7}$$

Если производные, входящие в уравнение (1), можно вычислять путем дифференцирования под знаком интеграла (7), то функция (7), очевидно, будет удовлетворять уравнению (1) как суперпозиция частных решений этого уравнения.

Требуя выполнения начального условия при $t = 0$, будем иметь

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda. \tag{8}$$

Воспользуемся теперь формулой обратного преобразования интеграла Фурье:

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, e^{-i\lambda\xi}\, d\xi. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (7) и меняя порядок интегрирования, получим:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi)\, e^{-i\lambda\xi}\, d\xi \right) e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda x}\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t + i\lambda(x-\xi)}\, d\lambda \right) \varphi(\xi)\, d\xi. \tag{10}$$

Внутренний интеграл в (10) равен[1])

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t+i\lambda(x-\xi)}\,d\lambda=\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}. \tag{11}$$

Подставляя (11) в (10), приходим к интегральному представлению искомого решения

$$u(x,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\ \xi;\ t)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{12}$$

где

$$G(x,\ \xi;\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}. \tag{13}$$

Функцию $G(x, \xi; t)$, определяемую формулой (13), часто называют фундаментальным решением уравнения теплопроводности.

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функция

$$G(x,\ \xi;\ t-t_0)=\frac{Q}{c\rho 2\sqrt{\pi a^2(t-t_0)}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \tag{13'}$$

представляет температуру в точке x в момент времени t, если в начальный момент времени $t=t_0$ в точке ξ выделяется количество тепла $Q=c\rho$.

Функция $G(x, \xi, t-t_0)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности по переменным (x, t)[2]), что можно проверить непосредственным дифференцированием.

---

[1]) Б. М. Будак, С. В. Фомин, Кратные интегралы и ряды, «Наука», 1965.

[2]) В самом деле,

$$G_x=-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{x-\xi}{2\left[a^2(t-t_0)\right]^{3/2}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}},$$

$$G_{xx}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[-\frac{1}{2}\,\frac{1}{\left[a^2(t-t_0)\right]^{3/2}}+\frac{(x-\xi)^2}{4\left[a^2(t-t_0)\right]^{5/2}}\right]e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}},$$

$$G_t=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[-\frac{a^2}{2\left[a^2(t-t_0)\right]^{3/2}}+\frac{a^2(x-\xi)^2}{4\left[a^2(t-t_0)\right]^{5/2}}\right]e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}},$$

т. е.

$$G_t=a^2G_{xx}.$$

Количество тепла, находящееся на оси x в момент $t > t_0$, равно

$$c\rho \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t - t_0)\, dx = \frac{Q}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \frac{dx}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}} =$$

$$= \frac{Q}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = Q = c\rho,$$

так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = \sqrt{\pi}$$

$$\left(\alpha = \frac{x-\xi}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}},\quad d\alpha = \frac{dx}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right).$$

Таким образом, количество тепла на нашей прямой не меняется с течением времени. Функция $G(x, \xi, t - t_0)$ зависит от времени только через аргумент $\theta = a^2(t - t_0)$, так что эту функцию можно записать в виде

$$G = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\theta}}. \tag{13''}$$

На рис. 40 изображен график функции G в зависимости от x для различных значений θ. Почти вся площадь, ограниченная этой кривой, находится над промежутком

$$(\xi - \varepsilon,\ \xi + \varepsilon),$$

где ε — сколь угодно малое число, если только $\theta = a^2(t - t_0)$ — достаточно малое число. Величина этой площади, умноженная на $c\rho$, равна количеству тепла, подведенному в начальный момент. Таким образом, для малых значений $t - t_0 > 0$ почти все тепло сосредоточено в малой окрестности точки ξ. Из сказанного выше следует, что в момент t_0 все количество тепла помещается в точке ξ.

Рассматривая изменение температуры в фиксированной точке $x = \xi + h$ с течением времени при $h = 0$, т. е. при $x = \xi$, получим:

$$G_{x=\xi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}}.$$

Таким образом, температура в той точке, где выделяется тепло, для малых θ неограниченно велика.

Если $x \neq \xi$, т. е. $h \neq 0$, то функция G представляется в виде произведения двух множителей

$$G_{x\neq\xi} = \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}}\right] e^{-h^2/4\theta}.$$

Второй сомножитель меньше единицы: при больших θ он ≈ 1, при малых θ он ≈ 0. Отсюда следует, что $G_{x\neq\xi} = G_{x=\xi}$ для больших θ; $G_{x\neq\xi} \ll G_{x=\xi}$ для малых θ. Чем меньше h, т. е. чем ближе x к ξ, тем больше второй множитель.

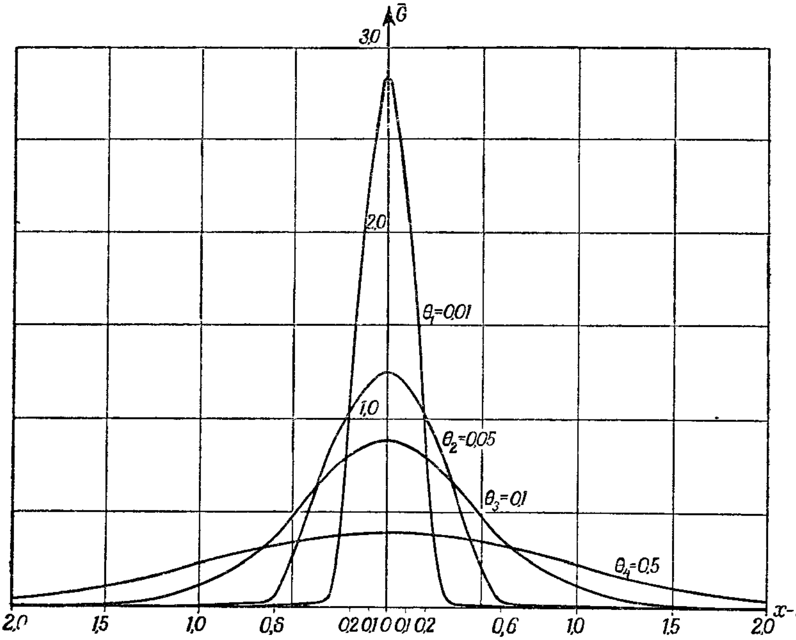

Рис. 40.

Графики функции $G_{x=\xi}$ и $G_{x\neq\xi}$ при $h_2 < h_1$ приведены на рис. 41.

Нетрудно видеть, что

$$\lim_{\theta\to 0} G_{x\neq\xi} = 0.$$

Раскрывая неопределенность, находим:

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\theta}} e^{-h^2/4\theta} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \lim_{\theta\to 0} \frac{\frac{1}{2}\theta^{-3/2}}{\frac{h^2}{4\theta^2} e^{h^2/4\theta}} = 0.$$

Формула (13′) показывает, что во всякой точке x температура, создаваемая мгновенным точечным источником, действующим в начальный момент $t = 0$, отлична от нуля для сколь угодно малых моментов времени. Подобный факт можно было бы интерпретировать как результат бесконечно быстрого распространения температуры (бесконечная скорость). Однако это противоречит молекулярно-кинетическим представлениям о природе тепла. Такое противоречие получается в связи с тем, что выше при выводе уравнения теплопроводности мы пользовались феноменологическими представлениями о растекании тепла, не учитывающими инерционность процесса движения молекул.

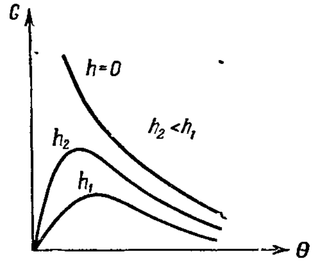

Рис. 41.

Теперь выясним условия применимости формулы (12).

Докажем, что формула

$$u(x, t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{12'}$$

называемая **интегралом Пуассона**, для любой ограниченной функции $|\varphi(\xi)|<M$ представляет при $t>0$ ограниченное решение уравнения теплопроводности, непрерывно примыкающее при $t=0$ к $\varphi(x)$ во всех точках непрерывности этой функций.

Докажем предварительно лемму (**обобщенный принцип суперпозиции**).

Если функция $U(x,t,\alpha)$ по переменным (x, t) удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению

$$L(U)=0$$

при любом фиксированном значении параметра α, то интеграл

$$u(x, t)=\int U(x, t, \alpha)\,\varphi(\alpha)\,d\alpha$$

также является решением того же уравнения $L(u)=0$, если производные, входящие в линейный дифференциальный оператор $L(U)$, можно вычислять при помощи дифференцирования под знаком интеграла.

Доказательство леммы крайне просто. Линейный дифференциальный оператор $L(U)$ представляет сумму производных функции U с некоторыми коэффициентами, зависящими от x и t. Дифференцирование функции u, по предположению, можно производить под знаком интеграла. Коэффициенты также можно внести под знак интеграла. Отсюда следует, что

$$L(u)=\int L(U(x, t, \alpha))\,\varphi(\alpha)\,d\alpha=0,$$

т. е. что функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению $L(u)=0$.

Напомним достаточные условия дифференцируемости под знаком интеграла, зависящего от параметра.

Функция

$$F(x)=\int_a^b f(x, \alpha)\,d\alpha$$

при конечных пределах a и b дифференцируема под знаком интеграла, если $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \alpha)$ является непрерывной функцией переменных x и α в области их изменения (см. Б. М. Будак, С. В. Фомин, Кратные интегралы и ряды, «Наука», 1965).

Нетрудно видеть также, что функция

$$F_1(x)=\int_a^b f(x, \alpha)\,\varphi(\alpha)\,d\alpha$$

при конечных пределах a и b дифференцируема под знаком интеграла при тех же условиях относительно функции $f(x, \alpha)$ и произвольной, ограниченной (и даже абсолютно интегрируемой) функции $\varphi(\alpha)$. Если пределы интегрирования бесконечны, то в этом случае требуется равномерная сходимость интеграла, полученного в результате дифференцирования подынтегральной функции по параметру (см. там же).

Эти же замечания относятся и к кратным интегралам, зависящим от параметров.

Для линейных уравнений $L(u)=0$ имеет место принцип суперпозиции, заключающийся в том, что функция

$$u(x, t)=\sum_{i=1}^{n} C_i u_i(x, t),$$

представленная в виде суммы конечного числа частных решений, является также решением уравнения. Если мы имеем решение $u(x, t, \alpha)$, зависящее от параметра, то интегральная сумма

$$\sum u(x, t, \alpha_n)\,C_n \qquad (C_n=\varphi(\alpha_n)\,\Delta\alpha) \tag{14}$$

также является решением уравнения $L(u)=0$. Доказанная лемма, так же как и лемма на стр. 91, устанавливает условия, при которых предел суммы (14), в нашем случае равный

$$u(x, t)=\int U(x, t, \alpha)\,\varphi(\alpha)\,d\alpha,$$

также является решением уравнения $L(u)=0$. С этой точки зрения доказанную лемму, как и лемму на стр. 91, естественно называть **обобщенным принципом суперпозиции**.

Обратимся к изучению интеграла (12'). Докажем, во-первых, что если функция $\varphi(x)$ ограничена, $|\varphi(x)|<M$, то ин-

теграл (12′) сходится и представляет ограниченную функцию. В самом деле,

$$|u(x,t)| < M\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi =$$

$$= M\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2}d\alpha = M \quad \left(\alpha = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2t}}\right),$$

так как

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2}d\alpha = \sqrt{\pi}.$$

Докажем далее, что интеграл (12′) удовлетворяет уравнению теплопроводности при $t > 0$. Для этого достаточно доказать, что производные этого интеграла при $t > 0$ можно вычислять при помощи дифференцирования под знаком интеграла.

В случае конечных пределов интегрирования это законно, так как все производные функции

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$$

при $t > 0$ непрерывны. Для возможности дифференцирования под знаком интеграла при бесконечных пределах достаточно убедиться в равномерной сходимости интеграла, полученного после дифференцирования под знаком интеграла. Проведем это исследование на примере первой производной по x.

Итак, для доказательства дифференцируемости функции (12) по x, а также равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}(G(x, \xi, t))\,\varphi(\xi)\,d\xi$$

достаточно доказать равномерную сходимость интеграла, стоящего справа; при этом для дифференцируемости в точке (x_0, t_0) достаточно доказать равномерную сходимость интеграла в некоторой области значений переменных, содержащей исследуемые значения (x_0, t_0), например в области

$$t_1 \leqslant t_0 \leqslant t_2, \quad |x| \leqslant \bar{x}.$$

Достаточным условием равномерной сходимости интеграла (аналогичным признаку равномерной сходимости ряда) является существование положительной функции $F(\xi)$, не зависящей от параметров (x, t), которая мажорирует функцию

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} G(x, \xi, t)\varphi(\xi)\right| \leqslant F(\xi), \quad \xi > \bar{x}, \quad \xi < -\bar{x}, \tag{15}$$

и интеграл от которой сходится:

$$\int_{x_1}^{\infty} F(\xi)\,d\xi < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{x_1} F(\xi)\,d\xi < \infty. \tag{15'}$$

Величина x_1 обозначает некоторое число, начиная с которого выполняется неравенство (15).

Найдем оценку сверху для абсолютной величины подынтегрального выражения в формуле для $\frac{\partial u}{\partial x}$:

$$\left|\frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi, t)\right| \cdot |\varphi(\xi)| = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{|\xi - x|}{2[a^2 t]^{3/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} |\varphi(\xi)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{2\sqrt{\pi}} \frac{|\xi| + \bar{x}}{2[a^2 t_1]^{3/2}} e^{-\frac{(\xi-\bar{x})^2}{4a^2 t_2}} = F(\xi) \quad \text{для} \quad \xi < \bar{x} \tag{16}$$

при любых $|x| \leqslant \bar{x}$ и $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Нетрудно убедиться в сходимости интеграла (15′) от функции $F(\xi)$. Интеграл

$$\int_{x_1}^{\infty} F(\xi)\,d\xi = \int_{x_1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{|\xi| + \bar{x}}{2[a^2 t_1]^{3/2}} e^{-\frac{(\xi-\bar{x})^2}{4a^2 t_2}}\,d\xi = \int_{x_1-\bar{x}}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\xi_1 + 2\bar{x}}{2[a^2 t_1]^{3/2}} e^{-\frac{\xi_1^2}{4a^2 t_2}}\,d\xi_1$$

$$(\xi_1 = |\xi| - \bar{x})$$

сходится, так как под знаком интеграла стоит множитель типа $(a\xi + b)e^{-c\xi^2}$. Отсюда заключаем, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial G}{\partial x}(x, \xi, t)\varphi(\xi)\,d.$$

Совершенно аналогично доказывается возможность вычисления всех остальных производных под знаком интеграла. Тем самым доказано, что функция (12′) удовлетворяет уравнению теплопроводности.

Обратимся теперь к выяснению основного свойства интеграла (12′), а именно, докажем, что

$$u(x, t) \to \varphi(x_0) \quad \text{при} \quad t \to 0 \quad \text{и} \quad x \to x_0$$

во всех точках непрерывности функции $\varphi(x)$.

Итак, пусть $\varphi(x)$ непрерывна в некоторой точке x_0. Мы должны доказать, что

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ x\to x_0}} u(x, t)=\varphi(x_0),$$

т. е. каково бы ни было $\varepsilon>0$, можно указать такое $\delta(\varepsilon)$, что

$$|u(x, t)-\varphi(x_0)|<\varepsilon,$$

коль скоро

$$|x-x_0|<\delta(\varepsilon) \quad \text{и} \quad |t|<\delta(\varepsilon).$$

В силу предполагаемой непрерывности функции $\varphi(x)$ в точке x_0 существует такое $\eta(\varepsilon)$, что

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|<\frac{\varepsilon}{6}, \tag{17}$$

если только

$$|x-x_0|<\eta.$$

Разбивая промежуток интеграции на части, представим $u(x, t)$ в виде суммы трех слагаемых:

$$u(x, t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{x_1}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\varphi(\xi)\,d\xi+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{x_1}^{x_2}\ldots\,d\xi+$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{x_2}^{\infty}\ldots\,d\xi=u_1(x, t)+u_2(x, t)+u_3(x, t), \tag{18}$$

где

$$x_1=x_0-\eta \quad \text{и} \quad x_2=x_0+\eta.$$

Главное слагаемое этой суммы u_2 можно представить в виде

$$u_2(x, t)=\frac{\varphi(x_0)}{2\sqrt{\pi}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,d\xi+$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}[\varphi(\xi)-\varphi(x_0)]\,d\xi=I_1+I_2.$$

Интеграл I_1 вычисляется непосредственно

$$I_1=\frac{\varphi(x_0)}{2\sqrt{\pi}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}}{\sqrt{a^2t}}\,d\xi=\frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x_1-x}{2\sqrt{a^2t}}}^{\frac{x_2-x}{2\sqrt{a^2t}}}e^{-\alpha^2}\,d\alpha,$$

где

$$\alpha=\frac{\xi-x}{2\sqrt{a^2t}}, \qquad d\alpha=\frac{d\xi}{2\sqrt{a^2t}}. \tag{19}$$

Как только $|x - x_0| < \eta$, то верхний предел становится положительным, а нижний — отрицательным, и при $t \to 0$ верхний предел стремится к $+\infty$, а нижний к $-\infty$. Отсюда следует, что

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ x\to x_0}} I_1 = \varphi(x_0).$$

Таким образом, можно указать такое δ_1, что

$$|I_1 - \varphi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{6}, \tag{20}$$

если только

$$|x - x_0| < \delta_1 \quad \text{и} \quad |t| < \delta_1.$$

Покажем, что остальные интегралы: I_2, u_1 и u_3 — малы. Оценим прежде всего интеграл I_2:

$$|I_2| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} |\varphi(\xi) - \varphi(x_0)|\, d\xi.$$

Из равенств (18) видно, что при

$$x_1 < \xi < x_2$$

имеет место неравенство

$$|\xi - x_0| < \eta.$$

Пользуясь неравенством (17), а также тем, что

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-\alpha^2} d\alpha < \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = 1,$$

каковы бы ни были x' и x'', получаем:

$$|I_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{6} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi = \frac{\varepsilon}{6} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_1 - x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\frac{x_2 - x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha < \frac{\varepsilon}{6}, \tag{21}$$

где новая переменная α определяется формулой (19). Оценим

$$|u_3(x, t)| = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left| \int_{x_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi)\, d\xi \right| <$$

$$< \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x_2 - x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha \to 0 \quad \text{при} \quad \begin{matrix} x \to x_0 \\ t \to 0 \end{matrix} \tag{22}$$

и аналогично

$$|u_1(x, t)| = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left|\int_{-\infty}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{a^2t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \varphi(\xi)\,d\xi\right| <$$

$$< \frac{M}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x_1-x}{2\sqrt{a^2t}}} e^{-\alpha^2}\,d\alpha \to 0 \quad \text{при} \quad \begin{matrix} x \to x_0 \\ t \to 0, \end{matrix} \tag{23}$$

так как если $x \to x_0$, то $x_2 - x > 0$, и $x_1 - x < 0$, и если $t \to 0$, то в последних членах (22) и (23) нижний предел и, соответственно, верхний предел стремятся к $+\infty$ и $-\infty$. Следовательно, можно указать такое δ_2, что

$$|u_3(x, t)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{и} \quad |u_1(x, t)| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{24}$$

если только

$$|x - x_0| < \delta_2 \quad \text{и} \quad |t| < \delta_2.$$

Пользуясь установленными выше оценками (22), (23), получаем:

$$|u(x, t) - \varphi(x_0)| \leqslant |u_1 + [I_1 - \varphi(x_0)] + I_2 + u_3| \leqslant$$

$$\leqslant |u_1| + |I_1 - \varphi(x_0)| + |I_2| + |u_3| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \tag{25}$$

если только

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{и} \quad |t| < \delta,$$

где δ равно наименьшему из чисел δ_1 и δ_2.

Таким образом, мы доказали, что функция

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} \varphi(\xi)\,d\xi \tag{12'}$$

ограничена, удовлетворяет уравнению теплопроводности и начальному условию.

Если начальное значение задается не при $t = 0$, а при $t = t_0$, то выражение для $u(x, t)$ приобретает вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2(t - t_0)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \varphi(\xi)\,d\xi. \tag{12''}$$

Единственность полученного решения для непрерывной функции $\varphi(x)$ следует из теоремы, доказанной в § 2, п. 3. Если начальная функция $\varphi(x)$ имеет конечное число точек разрыва, то интеграл (12″) представляет ограниченное решение уравнения (1), непрерывное всюду, кроме точек разрыва функции $\varphi(x)$ [1]).

Рассмотрим в качестве примера следующую задачу:

найти решение уравнения теплопроводности, если начальная температура (при $t = t_0 = 0$) имеет постоянные, но различные значения для $x > 0$ и $x < 0$, а именно:

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} T_1 & \text{для} \quad x > 0, \\ T_2 & \text{для} \quad x < 0. \end{cases}$$

Пользуясь формулой (12′), получаем решение задачи в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{T_2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \frac{d\xi}{2\sqrt{a^2 t}} + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \frac{d\xi}{2\sqrt{a^2 t}} =$$

$$= \frac{T_2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2}\, d\alpha + \frac{T_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha =$$

$$= \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_1 - T_2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2}\, d\alpha, \qquad (26)$$

так как

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-z} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha^2}\, d\alpha - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{z} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{z} e^{-\alpha^2}\, d\alpha$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-z}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-z}^{0} e^{-\alpha^2}\, d\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{z} e^{-\alpha^2}\, d\alpha \left(z = \frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}\right).$$

В частности, если

$$T_2 = 0, \qquad T_1 = 1,$$

то

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{z} e^{-\alpha^2}\, d\alpha\right) \left(z = \frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}\right).$$

---

[1]) Пользуясь методом, изложенным в п. 3, § 2, можно убедиться, что функция $u(x, t)$ перечисленными условиями определяется однозначно.

Профиль температуры в заданный момент t дается кривой

$$f(z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\alpha^2}\,d\alpha,$$

где z представляет абсциссу точки, в которой определяется температура, если за единицу длины, в зависимости от t, принимается значение $2\sqrt{a^2t}$. Построение этой кривой не представляет труда, так как интеграл

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\alpha^2}\,d\alpha,$$

называемый обычно **интегралом ошибок**, часто встречается в теории вероятностей и для него существуют подробные таблицы [1]).

Формула (26) при произвольных T_1 и T_2 может быть записана в виде

$$u(x,\ t)=\frac{T_1+T_2}{2}+\frac{T_1-T_2}{2}\,\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2t}}\right).$$

Отсюда видно, что в точке $x=0$ температура все время постоянна и равна полусумме начальных значений справа и слева, так как $\Phi(0)=0$.

Решение неоднородного уравнения

$$u_t=a^2u_{xx}+f(x,\ t)\qquad(-\infty<x<\infty,\ t>0)$$

с нулевыми начальными условиями

$$u(x,\ 0)=0,$$

очевидно, должно представляться формулой

$$u(x,\ t)=\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty}G(x,\ \xi,\ t-\tau)\,f(\xi,\ \tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{27}$$

как то следует из смысла функции $G(x,\ \xi,\ t)$ (см. п. 4, § 2). Мы не будем подробнее заниматься изучением этой формулы и условий применимости, которые надо наложить на функцию $f(x,t)$.

2. Краевые задачи для полуограниченной прямой. Как мы уже отмечали в § 1, п. 4, в тех случаях, когда интересуются распределением температуры вблизи одного из концов стержня, а влияние другого конца несущественно, принимают, что этот

---

[1]) См., например, А. А. Марков, Курс теории вероятностей, где даны таблицы этого интеграла с шестью десятичными знаками. См. также более краткую таблицу в конце книги.

конец находится в бесконечности. Это приводит к задаче об определении решения уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0$$

на полубесконечной прямой $x > 0$ для значений $t > 0$, удовлетворяющего начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (x > 0)$$

и граничному условию, которое, в зависимости от заданного характера граничного режима, берется в одном из следующих видов:

$$u(0, t) = \mu(t) \quad \text{(первая краевая задача)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \nu(t) \quad \text{(вторая краевая задача)}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \lambda\,[u(0, t) - \theta(t)] \quad \text{(третья краевая задача)}.$$

В дальнейшем мы ограничимся подробным исследованием только *первой краевой задачи*, заключающейся в отыскании решения уравнения теплопроводности при дополнительных условиях

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = \mu(t). \tag{28}$$

Для того чтобы условия задачи определяли единственное решение, необходимо наложить некоторые условия в бесконечности. Потребуем в качестве дополнительного требования, чтобы функция $u(x, t)$ была всюду ограничена

$$|u(x, t)| < M \quad \text{для} \quad 0 < x < \infty \quad \text{и} \quad t \geqslant 0,$$

где M — некоторая постоянная. Отсюда следует, что начальная функция $\varphi(x)$ должна также удовлетворять условию ограниченности

$$|\varphi(x)| < M.$$

Решение поставленной задачи можно представить в виде суммы

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t),$$

где $u_1(x, t)$ представляет влияние только начальных условий, а $u_2(x, t)$ — влияние только граничного условия. Эти функции можно определить как решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям

$$u_1(x, 0) = \varphi(x), \quad u_1(0, t) = 0 \tag{28'}$$

и

$$u_2(x, 0) = 0, \quad u_2(0, t) = \mu(t). \tag{28''}$$

Очевидно, что сумма этих функций будет удовлетворять условиям (28). Докажем предварительно две леммы относительно функции $u(x,t)$, определяемой интегралом Пуассона,

$$u(x, t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\psi(\xi)\,d\xi. \tag{29}$$

1. *Если функция* $\psi(x)$ *является нечетной функцией, т. е.*

$$\psi(x)=-\psi(-x),$$

то функция (29)

$$u(x, t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\psi(\xi)\,d\xi$$

обращается в нуль при $x=0$,

$$u(0, t)=0.$$

При этом, конечно, предполагается, что интеграл, определяющий функцию $u(x,t)$, сходится, что имеет место, если $\psi(x)$ ограничена. Подынтегральная функция в интеграле

$$u(0, t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}\psi(\xi)\,d\xi$$

нечетна относительно ξ, так как является произведением нечетной функции на четную. Интеграл же от нечетной функции в пределах, симметричных относительно начала координат, равняется нулю; следовательно,

$$u(0, t)=0,$$

что и доказывает лемму.

2. *Если функция* $\psi(x)$ *является четной функцией, т. е.*

$$\psi(x)=\psi(-x),$$

то производная функция $u(x,t)$ *из формулы* (29) *равна нулю при* $x=0$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t)=0$$

для всех $t>0$.

В самом деле,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-\xi)}{2(a^2t)^{3/2}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\psi(\xi)\,d\xi\,\bigg|_{x=0}=0,$$

так как при $x=0$ подынтегральная функция нечетна, если $\psi(\xi)$ — четная.

Перейдем теперь к построению функции $u_1(x, t)$, удовлетворяющей условиям (28′).

Введем вспомогательную функцию $U(x, t)$, определенную на бесконечной прямой $-\infty < x < \infty$ и удовлетворяющую уравнению, а также условиям

$$U(0, t) = 0,$$
$$U(x, 0) = \varphi(x) \quad \text{для} \quad x > 0.$$

Эту функцию, пользуясь леммой, можно определить при помощи начальной функции $\Psi(x)$, совпадающей с $\varphi(x)$ для $x > 0$ и являющейся нечетным продолжением $\varphi(x)$ для $x < 0$, т. е.

$$\Psi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{для} \quad x > 0, \\ -\varphi(-x) & \text{для} \quad x < 0, \end{cases}$$

так что

$$U(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \Psi(\xi)\, d\xi.$$

Рассматривая значения функции $U(x, t)$ только в интересующей нас области $x \geqslant 0$, получим:

$$u(x, t) = U(x, t) \quad \text{при} \quad x \geqslant 0.$$

Пользуясь определением функции $\Psi(x)$, будем иметь:

$$U(x, t) =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \Psi(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \Psi(\xi)\, d\xi =$$
$$= -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi)\, d\xi + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \varphi(\xi)\, d\xi,$$

причем в первом интеграле сделана замена $\xi' = -\xi$ и использовано равенство

$$\Psi(\xi) = -\varphi(-\xi) = -\varphi(\xi').$$

Соединяя оба интеграла вместе, получим искомую функцию

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right\} \varphi(\xi)\, d\xi \qquad (30)$$

в виде, не содержащем вспомогательных функций. Заметим, что при $x = 0$ выражение в фигурных скобках обращается в нуль и $u_1(0, t) = 0$.

Пользуясь леммой 2, нетрудно убедиться, что решение уравнения теплопроводности с однородным граничным условием второго рода $\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x}(0, t) = 0$ и начальным условием $\bar{u}_1(x, 0) = \varphi(x)$ представляется в виде

$$\bar{u}_1(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right\} \varphi(\xi)\, d\xi. \qquad (30')$$

Применим полученную формулу к решению задачи об остывании равномерно нагретого стержня, на границе которого поддерживается постоянная температура, которую мы примем равной нулю. Задача состоит в определении решения уравнения теплопроводности, удовлетворяющего условиям

$$v_1(x, t_0) = T, \qquad v_1(0, t) = 0.$$

Учитывая, что начальное условие задается не при $t = 0$, а при $t = t_0$, вместо формулы (30) получим:

$$v_1(x, t) = \frac{T}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} \right\} \frac{d\xi}{\sqrt{a^2(t-t_0)}}. \qquad (31)$$

Разбивая интеграл на два слагаемых и вводя переменные

$$\alpha = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}, \qquad \alpha_1 = \frac{\xi + x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}},$$

получим:

$$v_1(x, t) = T\Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right), \qquad (31')$$

где

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2}\, d\alpha$$

— интеграл ошибок.

Обратимся теперь к отысканию функции $u_2(x, t)$, представляющей вторую часть решения первой краевой задачи.

Пусть

$$\mu(t) = \mu_0 = \text{const}.$$

Функция

$$\bar{v}(x, t) = \mu_0 \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right) \qquad (32)$$

является решением уравнения теплопроводности, удовлетворяющим условиям

$$\bar{v}(x, t_0) = \mu_0, \quad \bar{v}(0, t) = 0.$$

Отсюда следует, что функция

$$v(x, t) = \mu_0 - \bar{v}(x, t) = \mu_0 \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right)\right] \tag{33}$$

и является искомой, так как она удовлетворяет тому же уравнению и условиям

$$v(x, t_0) = 0 \quad (x > 0) \quad \text{и} \quad v(0, t) = \mu_0 \quad (t > t_0).$$

Представим $v(x, t)$ в виде

$$v(x, t) = \mu_0 U(x, t - t_0),$$

где

$$U(x, t - t_0) = 1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}}^{\infty} e^{-\alpha^2}\, d\alpha \tag{34}$$

является решением той же задачи, что и $v(x,t)$, при $\mu_0 = 1$.

По определению функция $U(x, t - t_0)$ имеет смысл только при $t \geqslant t_0$. Продолжим определение этой функции, полагая

$$U(x, t - t_0) \equiv 0 \quad \text{для} \quad t < t_0.$$

Очевидно, что это определение согласуется со значением функции $U(x,t)$ при $t = 0$ и определенная таким образом функция будет удовлетворять уравнению теплопроводности для всех t при $x > 0$. Граничное значение этой функции (при $x = 0$) является ступенчатой функцией, равной нулю при $t < t_0$ и равной единице при $t > t_0$. Функция $U(x,t)$ весьма часто встречается в приложениях и является вспомогательным звеном для нахождения функции $u_2(x,t)$.

Рассмотрим вторую вспомогательную задачу, заключающуюся в нахождении решения уравнения теплопроводности со следующими начальными и граничными условиями:

$$v(x, t_0) = 0, \qquad v(0, t) = \mu(t) = \begin{cases} \mu_0 & \text{для} \quad t_0 < t < t_1, \\ 0 & \text{для} \quad t > t_1. \end{cases}$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что

$$v(x, t) = \mu_0 [U(x, t - t_0) - U(x, t - t_1)].$$

Вообще, если граничная функция $\mu(t)$ задается в виде ступенчатой функции

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu_0 & \text{для} \quad t_0 < t \leqslant t_1, \\ \mu_1 & \text{для} \quad t_1 < t \leqslant t_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \mu_{n-1} & \text{для} \quad t_{n-1} < t \leqslant t_n, \end{cases}$$

то, рассуждая совершенно аналогично, получим, что решение краевой задачи с подобной функцией $\mu(t)$ может быть записано следующим образом:

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{n-2} \mu_i [U(x, t-t_i) - U(x, t-t_{i+1})] + \mu_{n-1} U(x, t-t_{n-1}). \tag{35}$$

Пользуясь теоремой о конечном приращении, получим:

$$u(x, t) = \sum_{i=0}^{n-2} \mu_i \left.\frac{\partial U(x, t-\tau)}{\partial t}\right|_{\tau_i} \Delta\tau + \mu_{n-1} U(x, t-t_{n-1}) \tag{36}$$

$$\text{для} \quad t_i \leqslant \tau_i \leqslant t_{i+1}.$$

Обратимся теперь к задаче о нахождении решения $u(x, t)$ уравнения теплопроводности с нулевым начальным условием и граничным условием

$$u(0, t) = \mu(t) \qquad (t > 0),$$

где $\mu(t)$ — произвольная кусочно-непрерывная функция. Приближенное решение этой задачи легко получить в виде (36), если функцию $\mu(t)$ заменить кусочно-постоянной функцией. Переходя к пределу при уменьшении интервалов постоянства вспомогательной функции, получим, что предел суммы (36) будет равен

$$\int_0^t \frac{\partial U}{\partial t}(x, t-\tau)\,\mu(\tau)\,d\tau,$$

так как при $x > 0$

$$\lim_{t-t_{n-1}\to 0} \mu_{n-1} U(x, t-t_{n-1}) = 0.$$

Очевидно, что искомое решение $u_2(x, t)$ второй задачи должно быть равно

$$u_2(x, t) = \int_0^t \frac{\partial U}{\partial t}(x, t-\tau)\,\mu(\tau)\,d\tau. \tag{37}$$

Мы не будем подробно останавливаться на правомерности предельного перехода и выяснении условий применимости этой формулы в отношении функции $\mu(\tau)$.

Нетрудно убедиться в том, что

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}}^{\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{a^2 x}{[a^2 t]^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} =$$

$$= -2a^2 \frac{\partial G}{\partial x}(x, 0, t) = 2a^2 \left.\frac{\partial G}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} \quad \left(G = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\right).$$

Таким образом, искомое решение в случае произвольной функции $\mu(t)$ может быть представлено в виде

$$u_2(x, t) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int_{t_0}^{t} \frac{x}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\left[\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right]} \mu(\tau)\, d\tau$$

или

$$u_2(x, t) = 2a^2 \int_{t_0}^{t} \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, 0, t-\tau)\, \mu(\tau)\, d\tau\,^{1)}. \tag{38}$$

Отметим, что в процессе получения формулы (38) мы нигде не пользовались специальными свойствами уравнения теплопроводности, кроме его линейности. Мы нигде не пользовались также аналитической формулой функции $U(x, t)$, а только тем, что она удовлетворяет граничным и начальным условиям

$$U(0, t) = 1 \quad \text{для} \quad t > 0,$$
$$U(x, 0) = 0 \quad \text{для} \quad x > 0$$

или

$$U(0, t) = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad t > 0, \\ 0 & \text{для} \quad t < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что если мы имеем дело с решением какого-либо линейного дифференциального уравнения при граничном условии

$$u(0, t) = \mu(t) \qquad (t > 0),$$

нулевых начальных условиях и нулевых дополнительных граничных условиях, если такие имеют место (например, при $x = l$), то решение этой задачи может быть представлено в виде

$$u(x, t) = \int_{0}^{t} \frac{\partial U}{\partial t}(x, t-\tau)\, \mu(\tau)\, d\tau, \tag{39}$$

где $U(x, t)$ — решение аналогичной краевой задачи при

$$U(0, t) = 1.$$

Сформулированный здесь принцип, называемый **принципом Дюгамеля**, показывает, что основную трудность при решении краевых задач представляет постоянное граничное значение. Если краевая задача с постоянным граничным значением решена, то решение краевой задачи с переменным граничным условием представляется формулой (39). Этим принципом часто

[1]) Это представление решения первой краевой задачи с нулевыми начальными условиями дано здесь для удобства сравнения с решением той же задачи, полученным в гл. VI, § 4 другим методом.

пользуются при решении многих краевых задач, приводя решение только для постоянного граничного условия, не оговаривая, что решение краевой задачи с переменным $\mu(t)$ дается формулой (39).

Сумма функций

$$u_1(x, t) + u_2(x, t)$$

дает решение первой краевой задачи для полубесконечной прямой для однородного уравнения.

Пользуясь формулой (27) п. 1 § 3 и принципом нечетного продолжения, нетрудно убедиться в том, что решение неоднородного уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \qquad (0 < x < \infty, \ t > 0)$$

при нулевом начальном и нулевом граничном условии ($u(0, t) = 0$) дается формулой

$$u_3(x, t) =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^t \frac{1}{\sqrt{a^2(t-\tau)}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right\} f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau. \qquad (40)$$

Сумма

$$u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) = u(x, t)$$

дает решение первой краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t),$$
$$u(0, t) = \mu(t), \quad u(x, 0) = \varphi(x).$$

§ 4. Задачи без начальных условий

Если изучается процесс теплопроводности в момент, достаточно удаленный от начального, то влияние начальных условий практически не сказывается на распределении температуры в момент наблюдения. В этом случае ставится задача об отыскании решения уравнения теплопроводности, удовлетворяющего граничным условиям одного из трех типов, заданным для всех $t > -\infty$. Если стержень ограничен, то задаются граничные условия на обоих концах стержня. Для полубесконечного стержня задается лишь одно граничное условие.

Рассмотрим первую краевую задачу для полубесконечного стержня:

найти ограниченное решение уравнения теплопроводности в области $x > 0$, удовлетворяющее условию

$$u(0, t) = \mu(t), \qquad (1)$$