пользуются при решении многих краевых задач, приводя решение только для постоянного граничного условия, не оговаривая, что решение краевой задачи с переменным $\mu(t)$ дается формулой (39).

Сумма функций

$$u_1(x, t) + u_2(x, t)$$

дает решение первой краевой задачи для полубесконечной прямой для однородного уравнения.

Пользуясь формулой (27) п. 1 § 3 и принципом нечетного продолжения, нетрудно убедиться в том, что решение неоднородного уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t) \qquad (0 < x < \infty,\ t > 0)$$

при нулевом начальном и нулевом граничном условии ($u(0, t) = 0$) дается формулой

$$u_3(x, t) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^t \frac{1}{\sqrt{a^2(t-\tau)}} \left\{ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right\} f(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau. \qquad (40)$$

Сумма

$$u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) = u(x, t)$$

дает решение первой краевой задачи

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t),$$
$$u(0, t) = \mu(t), \quad u(x, 0) = \varphi(x).$$

§ 4. Задачи без начальных условий

Если изучается процесс теплопроводности в момент, достаточно удаленный от начального, то влияние начальных условий практически не сказывается на распределении температуры в момент наблюдения. В этом случае ставится задача об отыскании решения уравнения теплопроводности, удовлетворяющего граничным условиям одного из трех типов, заданным для всех $t > -\infty$. Если стержень ограничен, то задаются граничные условия на обоих концах стержня. Для полубесконечного стержня задается лишь одно граничное условие.

Рассмотрим первую краевую задачу для полубесконечного стержня:

найти ограниченное решение уравнения теплопроводности в области $x > 0$, удовлетворяющее условию

$$u(0, t) = \mu(t), \qquad (1)$$

где $\mu(t)$ — *заданная функция. Предполагается, что функции* $u(x, t)$ и $\mu(t)$ *ограничены всюду, т. е.*

$$|u(x, t)| < M,$$
$$|\mu(t)| < M.$$

Как будет показано ниже (см. мелкий шрифт), функция $u(x, t)$ определяется однозначно. Возьмем наиболее часто встречающийся случай граничного условия

$$\mu(t) = A\cos\omega t. \tag{2}$$

Эта задача изучалась еще Фурье и впервые была применена при определении температурных колебаний почвы[1]).

Запишем граничное условие в виде

$$\mu(t) = Ae^{i\omega t}. \tag{2'}$$

Из линейности уравнения теплопроводности следует, что действительная и мнимая части некоторого комплексного решения уравнения теплопроводности каждая в отдельности удовлетворяет тому же уравнению.

Если найдено решение уравнения теплопроводности, удовлетворяющее условию (2'), то его действительная часть удовлетворяет условию (2), а мнимая — условию

$$u(0, t) = \mu_1(t) = A\sin\omega t.$$

Итак, рассмотрим задачу:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \tag{3}$$
$$u(0, t) = Ae^{i\omega t}.$$

Ее решение будем искать в виде

$$u(x, t) = Ae^{\alpha x + \beta t}, \tag{4}$$

где α и β — неопределенные пока постоянные.

Подставляя выражение (4) в уравнение (3) и граничное условие, находим:

$$\alpha^2 = \frac{1}{a^2}\beta, \quad \beta = i\omega,$$

откуда

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{\beta}{a^2}} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{a^2}}\sqrt{i} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{a^2}}\,\frac{(1+i)}{\sqrt{2}} =$$
$$= \pm\left[\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}} + i\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\right].$$

1) См. приложение 1.

Для $u(x,t)$ имеем:

$$u(x,\ t)=Ae^{\pm\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,x+i\left(\pm\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,x+\omega t\right)}. \tag{5}$$

Действительная часть этого решения

$$u(x,\ t)=Ae^{\pm\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,x}\cos\left(\pm\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,x+\omega t\right) \tag{6}$$

удовлетворяет уравнению теплопроводности и граничному условию (2). Формула (6) в зависимости от выбора знака определяет не одну, а две функции. Однако только функция, соответствующая знаку минус, удовлетворяет требованию ограниченности. Таким образом, решение поставленной задачи получаем в виде

$$u(x,\ t)=Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,x}\cos\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,x+\omega t\right). \tag{7}$$

Аналогично решается задача без начальных условий для ограниченного отрезка:

$$\left.\begin{aligned} u_t&=a^2u_{xx},\\ u(0,\ t)&=A\cos\omega t,\\ u(l,\ t)&=0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Переписывая граничное условие в виде

$$\hat{u}(0,\ t)=Ae^{-i\omega t},\qquad \hat{u}(l,\ t)=0,$$

будем искать решение в форме

$$\hat{u}(x,\ t)=X(x)\,e^{-i\omega t}. \tag{9}$$

Подставляя это выражение в уравнение (8), получим для функции $X(x)$ уравнение

$$X''+\frac{i\omega}{a^2}X=0\quad\text{или}\quad X''+\gamma^2X=0,$$

$$\gamma=\sqrt{\frac{i\omega}{a^2}}=\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,(1+i) \tag{10}$$

и дополнительные условия

$$X(0)=A,\quad X(l)=0. \tag{11}$$

Отсюда для функции $X(x)$ будем иметь:

$$X(x)=A\frac{\sin\gamma(l-x)}{\sin\gamma l}=X_1(x)+iX_2(x), \tag{12}$$

где X_1 и X_2 — вещественная и мнимая части функции $X(x)$. Для функций $\hat{u}(x,t)$ получаем выражение

$$\hat{u}(x,\ t) = A\frac{\sin\gamma(l-x)}{\sin\gamma l}e^{-i\omega t}. \tag{13}$$

Выделяя вещественную часть функции $\hat{u}(x,t)$, находим решение исходной задачи без начальных условий в виде

$$u(x,\ t) = X_1(x)\cos\omega t + X_2(x)\sin\omega t. \tag{14}$$

Мы не даем здесь явного выражения для X_1 и X_2, хотя это и нетрудно сделать.

Если граничная функция представляет собой комбинацию гармоник разных частот, то решение такой задачи может быть получено как суперпозиция решений, соответствующих отдельным гармоникам.

Докажем единственность задачи без начальных условий для полуограниченной прямой. Будем исходить из формулы

$$u(x,t) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}}\int_{t_0}^{t}\frac{x}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}u(0,\ \tau)\,d\tau +$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{1}{\sqrt{a^2(t-t_0)}}\left\{e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}}\right\}u(\xi,t_0)\,d\xi = I_1 + I_2 \tag{15}$$

$$(t \geqslant t_0),$$

которая представляет любое ограниченное решение уравнения теплопроводности через его начальное значение $u(x,t_0)$ и граничное $u(0,t) = \mu(t)$ в области $x \geqslant 0$, $t \geqslant t_0$.

Покажем, что

$$\lim_{t_0\to-\infty} I_2(x,\ t) = 0, \tag{16}$$

если только

$$|u(x,\ t)| < M$$

при любом t. Действительно,

$$|I_2| < \frac{M}{\sqrt{\pi}}\left\{\int_{-\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}}^{\infty} e^{-\alpha_1^2}\,d\alpha_1 - \int_{\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}}^{\infty} e^{-\alpha_2^2}\,d\alpha_2\right\} =$$

$$= \frac{M}{\sqrt{\pi}}2\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}} e^{-\alpha^2}\,d\alpha,$$

где

$$\alpha_1 = \frac{\xi - x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}} \quad \text{и} \quad \alpha_2 = \frac{\xi + x}{2\sqrt{a^2(t-t_0)}}.$$

Отсюда и следует равенство (16), так как x и t фиксированы, а $t_0 \to -\infty$. Если в формуле (15) фиксировать x и t и устремить $t_0 \to -\infty$, то $u(x, t)$ будет равно пределу только первого слагаемого, и мы получим формулу

$$u(x, t) = \frac{a^2}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{t} \frac{x}{[a^2(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \mu(\tau)\, d\tau, \tag{17}$$

доказывающую, что двух различных решений нашей задачи быть не может. Можно также доказать, что для любой ограниченной кусочно-непрерывной функции $\mu(t)$ формула (17) представляет решение поставленной задачи.

Аналогично может быть исследована задача без начальных условий для ограниченного отрезка $(0 \leqslant x \leqslant l)$. Эта задача без условия ограниченности имеет многозначное решение, так как функция

$$u_n(x, t) = Ce^{-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 a^2 t} \sin \frac{\pi n}{l} x$$

при любом n представляет решение этой задачи с нулевыми граничными значениями. Однако решения такого типа при $t \to -\infty$ неограниченны, и не составляет труда доказать единственность ограниченного решения поставленной задачи.

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ III

1. Найти функцию влияния мгновенного точечного источника тепла для:

а) полуограниченного стержня при граничных условиях 1-го и 2-го рода и при отсутствии теплообмена на боковой поверхности;

б) неограниченного стержня при наличии теплообмена на боковой поверхности;

в) полуограниченного стержня при наличии теплообмена на боковой поверхности и при граничных условиях первых двух типов.

2. Найти функцию влияния мгновенного точечного источника тепла для полуограниченного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью для третьей краевой задачи [граничное условие вида $\frac{\partial u}{\partial x} - hu(0, t) = f(t)$].

3. Решить уравнение теплопроводности для случаев а), б), в) задачи 1, если:

1) в точке $x = \xi_0$ действует источник тепла $Q = Q(t)$, в частности $Q = Q_0 = \text{const}$;

2) задано начальное распределение температуры $u(x, 0) = \varphi(x)$, в частности

$$\varphi(x) = \begin{cases} u_0 & \text{при } 0 < x < l, \\ 0 & \text{вне интервала } (0, l); \end{cases}$$

3) тепловые источники распределены с плотностью $f(x, t)$ по всему стержню, а начальная температура равна нулю; рассмотреть, в частности, случай $f = q_0 = \text{const}$ (стационарные источники).

4. Полуограниченный стержень с теплоизолированной боковой поверхностью был равномерно нагрет до температуры

$$u(x, 0) = u_0 = \text{const} \quad (x > 0).$$

Конец стержня, начиная с момента $t = 0$, поддерживается при температуре, равной 0,

$$u(0, t) = 0 \quad (t > 0).$$

Найти температуру стержня $u(x, t)$ и, пользуясь таблицами интеграла ошибок

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\alpha^2}\, d\alpha,$$

построить графики по x на интервале $0 \leqslant x \leqslant l$ функции $u(x, t)$ при $t = l^2/16a^2$, $t = l^2/2a^2$, $t = l^2/a^2$.

Указание. Удобно ввести безразмерные переменные

$$x' = x/l, \quad \theta = a^2t/l^2, \quad v = u/u_0.$$

5. Конец полуограниченного цилиндра в начальный момент времени $t = 0$ открывают в атмосфере, где концентрация некоторого газа равна u_0. Найти концентрацию газа в цилиндре $u(x, t)$ для $t > 0$ и $x > 0$, если начальная концентрация $u(x, t) = 0$. Пользуясь таблицами интеграла ошибок, установить, через какое время в слое, отстоящем на расстоянии l от конца цилиндра, концентрация газа достигнет 95% внешней концентрации. Найти закон движения фронта постоянной концентрации.

6. К концу полуограниченного стержня, начальная температура которого была равна нулю, подводится тепловой поток $ku_x(0, t) = q(t)$. Найти температуру $u(x, t)$ стержня, если:

а) стержень теплоизолирован с боков;

б) на боковой поверхности стержня происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой нулевой температуры.

Рассмотреть частный случай $q = q_0 = \text{const}$.

7. Конец полуограниченного стержня поддерживается при постоянной температуре u_0; на боковой поверхности стержня происходит теплообмен со средой, постоянная температура которой равна u_1. Начальная температура стержня равна нулю. Найти $u(x, t)$ — температуру стержня.

8. Решить задачи 6а, 6б, считая, что $u(x, 0) = u_0 = \text{const}$.

9. Найти установившуюся температуру вдоль полуограниченного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью, на конце которого

а) задана температура $u(0, t) = A \cos \omega t$;

б) задан тепловой поток $Q(t) = B \sin \omega t$;

в) происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой меняется по закону $v(t) = C \sin \omega t$.

10. Пользуясь методом отражения, построить функцию влияния мгновенного точечного источника для ограниченного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью при граничных условиях 1-го и 2-го рода.

11. Неограниченный стержень составлен из двух однородных стержней, соприкасающихся в точке $x = 0$ и обладающих характеристиками a_1, k_1 и, соответственно, a_2, k_2. Начальная температура

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} T_1 & \text{при} \quad x < 0, \\ T_2 & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

Найти температуру $u(x, t)$ стержня для случая, когда боковая поверхность теплоизолирована.

ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЛАВЕ III

1. Температурные волны

Задача о распространении температурных волн в почве является одним из первых примеров приложения математической теории теплопроводности, развитой Фурье, к изучению явлений природы.