Найти температуру стержня $u(x,t)$ и, пользуясь таблицами интеграла ошибок

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\alpha^2}\,d\alpha,$$

построить графики по x на интервале $0 \leqslant x \leqslant l$ функции $u(x,t)$ при $t = l^2/16a^2$, $t = l^2/2a^2$, $t = l^2/a^2$.

Указание. Удобно ввести безразмерные переменные

$$x' = x/l,\quad \theta = a^2t/l^2,\quad v = u/u_0.$$

5. Конец полуограниченного цилиндра в начальный момент времени $t = 0$ открывают в атмосфере, где концентрация некоторого газа равна u_0. Найти концентрацию газа в цилиндре $u(x,t)$ для $t > 0$ и $x > 0$, если начальная концентрация $u(x,t) = 0$. Пользуясь таблицами интеграла ошибок, установить, через какое время в слое, отстоящем на расстоянии l от конца цилиндра, концентрация газа достигнет 95% внешней концентрации. Найти закон движения фронта постоянной концентрации.

6. К концу полуограниченного стержня, начальная температура которого была равна нулю, подводится тепловой поток $ku_x(0,t) = q(t)$. Найти температуру $u(x,t)$ стержня, если:

а) стержень теплоизолирован с боков;

б) на боковой поверхности стержня происходит теплообмен (по закону Ньютона) со средой нулевой температуры.

Рассмотреть частный случай $q = q_0 = \text{const}$.

7. Конец полуограниченного стержня поддерживается при постоянной температуре u_0; на боковой поверхности стержня происходит теплообмен со средой, постоянная температура которой равна u_1. Начальная температура стержня равна нулю. Найти $u(x,t)$ — температуру стержня.

8. Решить задачи 6а, 6б, считая, что $u(x,0) = u_0 = \text{const}$.

9. Найти установившуюся температуру вдоль полуограниченного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью, на конце которого

а) задана температура $u(0,t) = A\cos\omega t$;

б) задан тепловой поток $Q(t) = B\sin\omega t$;

в) происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, температура которой меняется по закону $v(t) = C\sin\omega t$.

10. Пользуясь методом отражения, построить функцию влияния мгновенного точечного источника для ограниченного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью при граничных условиях 1-го и 2-го рода.

11. Неограниченный стержень составлен из двух однородных стержней, соприкасающихся в точке $x = 0$ и обладающих характеристиками a_1, k_1 и, соответственно, a_2, k_2. Начальная температура

$$u(x,0)=\varphi(x)=\begin{cases} T_1 & \text{при } x<0,\\ T_2 & \text{при } x>0.\end{cases}$$

Найти температуру $u(x,t)$ стержня для случая, когда боковая поверхность теплоизолирована.

ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЛАВЕ III

I. Температурные волны

Задача о распространении температурных волн в почве является одним из первых примеров приложения математической теории теплопроводности, развитой Фурье, к изучению явлений природы.

Температура на поверхности земли носит, как известно, ярко выраженную суточную и годовую периодичность. Обратимся к задаче о распространении периодических температурных колебаний в почве, которую будем рассматривать как однородное полупространство $0 \leqslant x \leqslant \infty$. Эта задача является характерной задачей без начальных условий, так как при многократном повторении температурного хода на поверхности влияние начальной температуры будет меньше влияния других факторов, которыми мы пренебрегаем (например, неоднородность почвы). Таким образом, приходим к следующей задаче[1]:

найти ограниченное решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \leqslant x < \infty, \quad -\infty < t), \tag{1}$$

удовлетворяющее условию

$$u(0, t) = A \cos \omega t. \tag{2}$$

Эта задача была рассмотрена в главе III. Ее решение имеет вид (см. гл. III, § 4, (7))

$$u(x, t) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,x} \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,x - \omega t\right). \tag{3}$$

На основании полученного решения можно дать следующую характеристику процесса распространения температурной волны в почве. Если температура поверхности длительное время периодически меняется, то в почве также устанавливаются колебания температуры с тем же периодом, причем:

1. Амплитуда колебаний экспоненциально убывает с глубиной

$$A(x) = Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,x},$$

т. е., если глубины растут в арифметической прогрессии, то амплитуды убывают в геометрической прогрессии (первый закон Фурье).

2. Температурные колебания в почве происходят со сдвигом фазы. Время δ запаздывания максимумов (минимумов) температуры в почве от соответствующих моментов на поверхности пропорционально глубине

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{2\omega a^2}}\,x$$

(второй закон Фурье).

3. Глубина проникновения тепла в почву зависит от периода колебаний температуры на поверхности. Относительное

---

[1]) Х. С. Карслоу, Теория теплопроводности, гл. III, Гостехиздат, 1947.

изменение температурной амплитуды равно

$$\frac{A(x)}{A} = e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,x}.$$

Эта формула показывает, что чем меньше период, тем меньше глубина проникновения температуры. Для температурных колебаний с периодами T_1 и T_2 глубины x_1 и x_2, на которых происходит одинаковое относительное изменение температуры, связаны соотношением

$$x_2 = \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}\,x_1$$

(третий закон Фурье). Так, например, сравнение суточных и годовых колебаний, для которых $T_2 = 365\ T_1$, показывает, что

$$x_2 = \sqrt{365}\,x_1 = 19{,}1 x_1,$$

т. е. что глубина проникновения годовых колебаний при одинаковой амплитуде на поверхности была бы в 19,1 раза больше глубины проникновения суточных колебаний.

В качестве примера приведем результаты наблюдений над годовыми температурными колебаниями на станции Гош в Приамурье[1]):

Глубина (*м*)	1	2	3	4
Амплитуды (°C)	11,5	6,8	4,2	2,6

Эти данные показывают, что амплитуда годовых колебаний на глубине 4 *м* уменьшается до 13,3% своего значения на поверхности, равного 19,5°. На основании этих данных можно определить коэффициент температуропроводности почвы

$$\ln\frac{A(x)}{A} = -\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}\,x, \quad a^2 = \frac{\omega x^2}{2\ln^2\frac{A(x)}{A}},$$

откуда находим, что коэффициент температуропроводности почвы равен

$$a^2 = 4\cdot 10^{-3}\ \text{см}^2/\text{сек}.$$

Время запаздывания максимальной температуры на глубине 4 *м* достигает 4 месяцев.

Следует, однако, иметь в виду, что изложенная здесь теория относится к распространению тепла в сухой почве или горных породах. Наличие влаги усложняет температурные явления в почве, при замерзании происходит выделение скрытой теплоты, не учитываемое этой теорией.

[1]) М. И. Сумгин, С. П. Качурин, Н. И. Толстихин, В. Ф. Тумель, Общее мерзлотоведение, гл. V, Изд. АН СССР, 1940.

Температуропроводность является одной из характеристик тела, важных для изучения его физических свойств, а также для различных технических расчетов. На изучении распространения температурных волн в стержнях основан один из лабораторных методов определения температуропроводности[1]).

Пусть на конце достаточно длинного стержня поддерживается периодическая температура $\mu(t)$. Представив эту функцию в виде ряда Фурье

$$\mu(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi n}{T}t+b_n\sin\frac{2\pi n}{T}t\right)=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left[\frac{2\pi n}{T}\left(t-\delta_n^0\right)\right],$$

$$A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2},\qquad \delta_n^0=\frac{T}{2\pi n}\operatorname{arctg}\frac{b_n}{a_n},$$

где T — период, и взяв температурные волны, соответствующие каждому слагаемому, получим, что температура $u(x,t)$ для любого x будет периодической функцией времени и ее n-я гармоника равна

$$u_n(x,\ t)=a_n(x)\cos\frac{2\pi n}{T}t+b_n(x)\sin\frac{2\pi n}{T}t=$$

$$=A_n e^{-\sqrt{\frac{\pi n}{Ta^2}}\,x}\cos\left[\sqrt{\frac{\pi n}{Ta^2}}\,x-\frac{2\pi n}{T}t+\frac{2\pi n}{T}\delta_n^0\right]$$

или

$$\frac{\sqrt{a_n^2(x_1)+b_n^2(x_1)}}{\sqrt{a_n^2(x_2)+b_n^2(x_2)}}=e^{-\sqrt{\frac{\pi n}{Ta^2}}\,(x_1-x_2)}.$$

Эта формула показывает, что если произвести измерение температуры в каких-нибудь двух точках, x_1 и x_2, за полный период, то, находя коэффициенты $a_n(x_1)$, $b_n(x_1)$, $a_n(x_2)$, $b_n(x_2)$ при помощи гармонического анализа, можно определить коэффициент температуропроводности стержня a^2.

Периодические колебания температуры в стержне можно вызвать, например, следующим образом. Поместим один из концов стержня в электрическую печь и будем через одинаковые промежутки времени включать и выключать ток. В результате такого периодического нагревания в стержне через некоторое время установятся периодические колебания температуры; измеряя с помощью термопар температуры $u(x_1, t)$ и $u(x_2,\ t)$ в каких-либо двух точках, x_1, и x_2, за полный период

[1]) Специальный физический практикум, т. I, Гостехиздат, 1945, задача 35.

изменения граничного режима и подвергая u_1 и u_2 описанной выше обработке, можно определить a^2 — коэффициент температуропроводности материала, из которого сделан стержень. Естественно, что для применимости изложенной выше теории стержень должен быть теплоизолирован с боков, а также должен быть проведен контроль температуры на другом конце стержня, чтобы иметь возможность пользоваться теорией температурных волн в полубесконечном стержне.

Для возможности использования теории температурных волн в полубесконечном стержне надо убедиться в том, что температура на свободном конце стержня постоянна. Это контролируется с помощью дополнительной термопары.

II. Влияние радиоактивного распада на температуру земной коры

Для суждения о внутреннем температурном состоянии Земли мы имеем немногие данные, получаемые из наблюдений на ее поверхности. Основные сведения о термическом поле земной коры заключаются в следующем. Суточные и годовые колебания температуры происходят в сравнительно тонком поверхностном слое (порядка 10—20 *м* для годовых колебаний). Ниже этого слоя температура с течением времени меняется очень медленно.

Наблюдения в шахтах и скважинах, относящиеся к верхним 2—3 *км* земной коры, показывают, что температура с глубиной повышается в среднем на 3° С на каждые 100 *м*.

Первые попытки, относящиеся к концу прошлого столетия, дать теоретическое объяснение наблюдаемого геотермического градиента встретили непреодолимые трудности[1]). Эти попытки исходили из представления об охлаждении Земли, раскаленной в прошлом. Начальная температура, характеризующая этот процесс остывания, должна иметь порядок $T_0 = 1200°$ С (температура плавления горных пород), а поверхностная температура имеет порядок 0° С и не могла значительно (больше 100°) отклоняться от этой величины за весь период существования жизни на Земле. Простейшая количественная теория остывания Земли приводит к решению уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

в полупространстве $0 < z < \infty$ при следующих начальных и граничных условиях:

$$u(z, 0) = T_0, \qquad u(0, t) = 0.$$

[1]) Х. С. Карслоу, Теория теплопроводности, гл. III, Гостехиздат, 1947.