изменения граничного режима и подвергая u_1 и u_2 описанной выше обработке, можно определить a^2 — коэффициент температуропроводности материала, из которого сделан стержень. Естественно, что для применимости изложенной выше теории стержень должен быть теплоизолирован с боков, а также должен быть проведен контроль температуры на другом конце стержня, чтобы иметь возможность пользоваться теорией температурных волн в полубесконечном стержне.

Для возможности использования теории температурных волн в полубесконечном стержне надо убедиться в том, что температура на свободном конце стержня постоянна. Это контролируется с помощью дополнительной термопары.

II. Влияние радиоактивного распада на температуру земной коры

Для суждения о внутреннем температурном состоянии Земли мы имеем немногие данные, получаемые из наблюдений на ее поверхности. Основные сведения о термическом поле земной коры заключаются в следующем. Суточные и годовые колебания температуры происходят в сравнительно тонком поверхностном слое (порядка 10—20 *м* для годовых колебаний). Ниже этого слоя температура с течением времени меняется очень медленно.

Наблюдения в шахтах и скважинах, относящиеся к верхним 2—3 *км* земной коры, показывают, что температура с глубиной повышается в среднем на 3° С на каждые 100 *м*.

Первые попытки, относящиеся к концу прошлого столетия, дать теоретическое объяснение наблюдаемого геотермического градиента встретили непреодолимые трудности[1]). Эти попытки исходили из представления об охлаждении Земли, раскаленной в прошлом. Начальная температура, характеризующая этот процесс остывания, должна иметь порядок $T_0 = 1200°$ С (температура плавления горных пород), а поверхностная температура имеет порядок 0° С и не могла значительно (больше 100°) отклоняться от этой величины за весь период существования жизни на Земле. Простейшая количественная теория остывания Земли приводит к решению уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

в полупространстве $0 < z < \infty$ при следующих начальных и граничных условиях:

$$u(z, 0) = T_0, \qquad u(0, t) = 0.$$

[1]) Х. С. Карслоу, Теория теплопроводности, гл. III, Гостехиздат, 1947.

Решение этой задачи было рассмотрено в § 3 настоящей главы и дается формулой

$$u(z, t) = T_0 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\frac{z}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Градиент этой функции при $z = 0$ равен

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{z^2}{4a^2 t}}\Bigg|_{z=0} = \frac{T_0}{\sqrt{\pi}\sqrt{a^2 t}}.$$

Подставляя сюда известные значения геотермического градиента $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \gamma = 3 \cdot 10^{-4}$ *град/см*, $T_0 = 1200°$ С, а также значение $a^2 = 0{,}006$ *см²/сек*, соответствующее среднему экспериментально определяемому коэффициенту температуропроводности гранитов и базальтов, получим для продолжительности процесса остывания значение $t = 0{,}85 \cdot 10^{15}$ *сек* $= 27\,000\,000$ лет. Такое представление о возрасте Земли никак не согласовывалось с геологическими данными. Приближенный характер рассматриваемой теории (пренебрежение кривизной Земли, непостоянство коэффициента температуропроводности, приближенность значения T_0) не может, конечно, изменить порядка найденного значения для возраста Земли, который по современным данным оценивается приблизительно в $2 \cdot 10^9$ лет.

Физическая схема температурного режима Земли подверглась существенному пересмотру после открытия явления *радиоактивного распада*. Радиоактивные элементы, рассеянные в земной коре, при распаде вызывают ее нагревание, так что уравнение теплопроводности должно иметь вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f \qquad \left(f = \frac{A}{c\rho}\right),$$

где A — объемная плотность тепловых источников. На основании многочисленных измерений радиоактивности горных пород и их тепловыделения принято значение

$$A = 1{,}3 \cdot 10^{-12} \textit{ кал/см}^3\textit{сек}.$$

Это значение учитывает тепло, выделяемое ураном, торием и калием вместе с их продуктами распада.

Предположим, что плотность радиоактивных источников внутри земного шара постоянна и равна значению A, определенному для верхних слоев земной коры. В этом случае количество тепла, выделяющегося во всем земном шаре за единицу времени, будет равно

$$Q=\frac{4}{3}\pi R^3 A.$$

Сделаем второе предположение о том, что Земля радиоактивным теплом не нагревается. В этом случае поток тепла через единицу поверхности

$$q=k\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=0}\geqslant\frac{Q}{4\pi R^2},$$

где k и $\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0}$ суть коэффициент теплопроводности и геотермический градиент у поверхности Земли.

Отсюда для $\frac{\partial u}{\partial z}$ при $z=0$ находим значение

$$\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=0}\geqslant\frac{AR}{3k}\cong 6{,}3\cdot 10^{-2}\ \textit{град/см},$$

где $R=6{,}3\cdot 10^3$ *км* — радиус Земли и $k=0{,}004$ — среднее значение коэффициента теплопроводности осадочных пород.

Таким образом, геотермический градиент, вычисленный в предположении, что распределение радиоактивных элементов постоянно и что Земля не нагревается благодаря радиоактивному распаду, на два порядка превышает наблюдаемое значение геотермического коэффициента

$$\gamma=3\cdot 10^{-4}\ \textit{град/см}.$$

Откажемся от гипотезы постоянства распределения радиоактивных элементов и предположим, что радиоактивные элементы расположены в слое мощности H у поверхности Земли. Пренебрегая кривизной Земли, получим для определения стационарной температуры уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\begin{cases}-\dfrac{A}{k} & \text{для}\quad 0\leqslant z\leqslant H,\\ 0 & \text{для}\quad z>H\end{cases}$$

с условиями

$$u(0)=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z\to\infty}=0.$$

Очевидно, что решение поставленной задачи равно

$$u(z)=\begin{cases}\dfrac{A}{k}\left(Hz-\dfrac{z^2}{2}\right), & 0\leqslant z\leqslant H,\\ \dfrac{A}{k}\dfrac{H^2}{2}, & z\geqslant H,\end{cases}$$

так как эта функция непрерывна вместе с первой призводной при $z = H$ и удовлетворяет условиям задачи.

Определяя значение градиента этой функции при $z = 0$, равное

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{AH}{k},$$

и сопоставляя его с наблюдаемым значением $\gamma = 3 \cdot 10^{-4}$ *град/см*, находим, что

$$H = \frac{\gamma k}{A} \cong 10^6 \text{ см} = 10 \text{ км}.$$

Оценим влияние сделанной гипотезы стационарности температуры на величину геотермического градиента. Рассмотрим для этого решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + f,$$

$$f = \begin{cases} \dfrac{A}{c\rho}, & 0 \leqslant z \leqslant H, \\ 0, & z > H \end{cases}$$

с нулевыми начальными и граничными условиями

$$w(z, 0) = 0,$$
$$w(0, t) = 0.$$

Решение этой задачи представляется, как мы видели в § 3, интегралом

$$w(z, t) = \int_0^\infty \int_0^t G(z, \zeta; t - \tau) f(\zeta)\, d\tau\, d\zeta,$$

где G — функция источника для полубесконечной прямой, равная

$$G(z, \zeta; t - \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 (t - \tau)}} \left\{ e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(z+\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right\}.$$

Вычислим значение градиента при $z = 0$, принимая во внимание значение функции f:

$$\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=0} = \frac{A}{c\rho\, 2\sqrt{\pi}} \int_0^H \int_0^t \frac{\zeta}{\sqrt{[a^2(t-\tau)]^3}}\, e^{-\frac{\zeta^2}{4a^2(t-\tau)}}\, d\zeta\, d\tau =$$

$$= \frac{A}{c\rho\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{a^2(t-\tau)}} \int_0^{\frac{H^2}{4a^2(t-\tau)}} e^{-\alpha}\, d\alpha\, d\tau =$$

$$= \frac{A}{c\rho\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{a^2\theta}} \left[1 - e^{-\frac{H^2}{4a^2\theta}}\right] d\theta, \quad \text{где } \theta = t - \tau.$$

Таким образом,

$$\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=0}=\frac{A}{c\rho\sqrt{\pi}}\left\{\frac{2\sqrt{t}}{a}-\frac{H}{a^2}\int_{\sigma_0}^{\infty}e^{-\sigma^2}\frac{d\sigma}{\sigma^2}\right\},$$

где

$$\sigma=\frac{H}{2\sqrt{a^2\theta}},\quad \sigma_0=\frac{H}{2\sqrt{a^2t}},\quad \frac{d\sigma}{\sigma^2}=-\frac{a^2}{H}\frac{d\theta}{\sqrt{a^2\theta}}.$$

Вычислим интеграл

$$\int_{\sigma_0}^{\infty}e^{-\sigma^2}\frac{d\sigma}{\sigma^2}=-\left.\frac{e^{-\sigma^2}}{\sigma}\right|_{\sigma_0}^{\infty}-2\int_{\sigma_0}^{\infty}e^{-\sigma^2}d\sigma=\frac{e^{-\sigma_0^2}}{\sigma_0}-2\int_{\sigma_0}^{\infty}e^{-\sigma^2}d\sigma,$$

откуда

$$\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=0}=\frac{A}{c\rho a^2}\left\{\frac{2a\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}\left[1-e^{-\frac{H^2}{4a^2t}}\right]+H\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{H}{2\sqrt{a^2t}}}^{\infty}e^{-\sigma^2}d\sigma\right\}. \quad (1)$$

Отметим, что

$$\lim_{t\to\infty}\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=0}=\frac{A}{k}H,$$

так как $c\rho a^2=k$, предел первого слагаемого в фигурных скобках равен нулю, а предел второго слагаемого равен H.

Вычислим отклонение $\frac{\partial w}{\partial z}$ от его предельного значения для

$$t=2\cdot 10^9 \text{ лет}=6\cdot 10^{16} \textit{ сек.}$$

Значение σ_0 мало:

$$\sigma_0=\frac{H}{2\sqrt{a^2t}}=\frac{10^6}{2\sqrt{6\cdot 10^{-3}\cdot 6\cdot 10^{16}}}=\frac{1}{2\cdot 19}\cong 0{,}025.$$

Разлагая функции, входящие в формулу (1), в ряды, получим:

$$\frac{A}{k}H-\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=0}=\frac{A}{k}H\left\{\frac{-1}{\sqrt{\pi}\,\sigma_0}[\sigma_0^2+\ldots]+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\sigma_0\right\}\cong\frac{A}{k}H\cdot 0{,}014,$$

т. е. $\left.\frac{\partial w}{\partial z}\right|_{z=0}$ отличается от своего предельного значения на 1,4%.

Нетрудно было бы вычислить функцию $w(z,t)$ для $z>0$ и убедиться, что для $z\geqslant H$, $w(z,t)$ далеко еще не достигает своего предельного значения для t, равного возрасту Земли[1]) (хотя, как мы убедились, градиент у поверхности практически равен своему предельному значению).

---

[1]) А. Н. Тихонов, О влиянии радиоактивного распада на температуру земной коры. Изв. АН СССР, отд. матем. и естеств. наук, 1937, стр. 431—459.

Приведенные выше рассуждения носят, конечно, лишь оценочный характер; однако, принимая во внимание весьма большую устойчивость скорости радиоактивного распада, не изменяющейся под воздействием доступных нам температур и давлений, мы должны прийти к заключению о том, что концентрация радиоактивных элементов должна быстро убывать с глубиной, если основываться на значении A для верхних слоев земной коры, установленном многочисленными измерениями. Физическое объяснение, позволяющее установить закон убывания концентрации радиоактивных элементов с глубиной, до сих пор отсутствует.

III. Метод подобия в теории теплопроводности

Для решения ряда задач теплопроводности весьма полезен *метод подобия.* В качестве примера рассмотрим две задачи.

1. Функция источника для бесконечной прямой. Уравнение теплопроводности, как нетрудно видеть, остается неизменным при преобразовании переменных

$$x' = kx, \qquad t' = k^2 t, \tag{1}$$

т. е., если масштабы длины меняются в k раз, то масштаб времени следует изменить в k^2 раз.

Будем искать сначала решение уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{2}$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_0 & \text{при} \quad x > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases} \tag{3}$$

При указанном выше изменении масштабов начальное условие (3) остается также без изменения, поэтому для функции $u(x, t)$ должно иметь место равенство

$$u(x, t) = u(kx, k^2 t) \tag{4}$$

при любых значениях x, t и k.

Полагая

$$k = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \tag{5}$$

получим:

$$u(x, t) = u\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}, \frac{1}{4}\right) = u_0 f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right). \tag{6}$$

Таким образом, u зависит только от аргумента

$$z = \frac{x}{2\sqrt{t}}. \tag{7}$$