Приведенные выше рассуждения носят, конечно, лишь оценочный характер; однако, принимая во внимание весьма большую устойчивость скорости радиоактивного распада, не изменяющейся под воздействием доступных нам температур и давлений, мы должны прийти к заключению о том, что концентрация радиоактивных элементов должна быстро убывать с глубиной, если основываться на значении A для верхних слоев земной коры, установленном многочисленными измерениями. Физическое объяснение, позволяющее установить закон убывания концентрации радиоактивных элементов с глубиной, до сих пор отсутствует.

III. Метод подобия в теории теплопроводности

Для решения ряда задач теплопроводности весьма полезен *метод подобия*. В качестве примера рассмотрим две задачи.

1. Функция источника для бесконечной прямой. Уравнение теплопроводности, как нетрудно видеть, остается неизменным при преобразовании переменных

$$x' = kx, \qquad t' = k^2 t, \tag{1}$$

т. е., если масштабы длины меняются в k раз, то масштаб времени следует изменить в k^2 раз.

Будем искать сначала решение уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx} \tag{2}$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_0 & \text{при} \quad x > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x < 0. \end{cases} \tag{3}$$

При указанном выше изменении масштабов начальное условие (3) остается также без изменения, поэтому для функции $u(x, t)$ должно иметь место равенство

$$u(x, t) = u(kx, k^2 t) \tag{4}$$

при любых значениях x, t и k.

Полагая

$$k = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \tag{5}$$

получим:

$$u(x, t) = u\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}, \frac{1}{4}\right) = u_0 f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right). \tag{6}$$

Таким образом, u зависит только от аргумента

$$z = \frac{x}{2\sqrt{t}}. \tag{7}$$

Вычисляя производные для u из формулы (6)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_0 \frac{d^2 f}{dz^2} \cdot \frac{1}{4t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{x \cdot u_0}{4t^{3/2}} \frac{df}{dz} = -u_0 \cdot \frac{z}{2t} \frac{df}{dz},$$

подставляя в уравнение теплопроводности (2) и сокращая на множитель $u_0/4t$, получаем:

$$a^2 \frac{d^2 f}{dz^2} = -2z \frac{df}{dz} \tag{8}$$

при дополнительных условиях

$$f(-\infty) = 0, \quad f(\infty) = 1, \tag{9}$$

соответствующих начальному условию для функции u.

Интегрируя уравнение (8) будем иметь:

$$a^2 \frac{f''}{f'} = -2z, \quad f' = Ce^{-\frac{z^2}{a^2}},$$

$$f = C \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{\xi^2}{a^2}} d\xi = C_1 \int_{-\infty}^{\frac{z}{a}} e^{-\zeta^2} d\zeta.$$

Здесь нижний предел выбран так, чтобы выполнялось первое условие (9). Чтобы удовлетворить второму условию (9), следует положить:

$$C_1 = 1/\sqrt{\pi}.$$

Таким образом,

$$u(x, t) = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}} e^{-\xi^2} d\xi = \frac{u_0}{2}\left[1 + \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{a^2 t}}\right)\right], \tag{10}$$

где

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi$$

(интеграл ошибок). Если начальное значение имеет вид

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_0 & \text{при} \quad x > \bar{x}, \\ 0 & \text{при} \quad x < \bar{x}, \end{cases} \tag{11}$$

то

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2}\left[1 + \Phi\left(\frac{x - \bar{x}}{2\sqrt{a^2 t}}\right)\right]. \tag{12}$$

Обратимся теперь к решению второй вспомогательной задачи, где начальные значения задаются в виде

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x_2 < x, \\ u_0 & \text{при} \quad x_1 < x < x_2, \\ 0 & \text{при} \quad x < x_1. \end{cases} \tag{13}$$

В этом случае

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2}\left[\Phi\left(\frac{x - x_1}{2\sqrt{a^2 t}}\right) - \Phi\left(\frac{x - x_2}{2\sqrt{a^2 t}}\right)\right].$$

Начальная температура u_0 соответствует количеству тепла

$$Q = c\rho (x_2 - x_1) u_0.$$

Если

$$Q = c\rho,$$

то

$$u(x, t) = -\frac{1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x - x_2}{2\sqrt{a^2 t}}\right) - \Phi\left(\frac{x - x_1}{2\sqrt{a^2 t}}\right)\right]. \tag{14}$$

Функция влияния источника, сосредоточенного в точке, очевидно, представляет предел функции $u(x, t)$ при $x_2 - x_1 \to 0$.

Предельный переход в формуле (14) дает:

$$u(x, t) = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{x - \xi}{2\sqrt{a^2 t}}\right)\right]_{\xi = x_1}, \tag{15}$$

так как в правой части формулы (14) стоит разностное отношение, пределом которого является производная в (15).

Производя дифференцирование, находим:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} e^{-\frac{(x - x_1)^2}{4a^2 t}}, \tag{16}$$

т. е. $u(x, t) = G(x, x_1, t)$ — функция мгновенного точечного источника.

2. Краевые задачи для квазилинейного уравнения теплопроводности. Рассмотрим квазилинейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) = c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \tag{17}$$

с коэффициентом теплопроводности, зависящим от температуры.

Найдем решение этого уравнения, удовлетворяющее граничному и начальному условиям

$$u(0, t) = u_1, \quad u(x, 0) = u_2. \tag{18}$$

предельными значениями производной по внешней (внутренней) нормали в точке P_0[1]).

Исследуем разрывы внутренней нормальной производной потенциала простого слоя на Σ. Производная $\frac{dV}{dz}$ в точке M оси z, направленной по внутренней нормали, равна

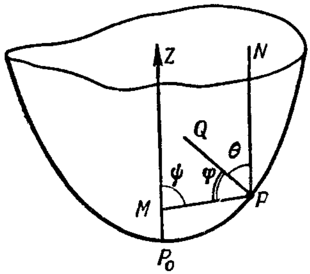

Рис. 63.

$$\frac{dV}{dz}(M) = \iint_{\Sigma} \mu(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right) d\sigma_P = \iint_{\Sigma} \frac{\cos\psi}{R_{MP}^2} \mu(P)\, d\sigma_P, \quad (44)$$

где ψ — угол между осью z и вектором $\overrightarrow{MP}$. Проведем из точки P (рис. 63) нормаль PQ и прямую PN, параллельную оси z (нормали в точке P_0), и обозначим через θ угол NPQ, равный углу между нормалями в точках P и P_0[2]). Выражение для потенциала двойного слоя $W(M)$ содержит множитель $\frac{\cos\varphi}{R^2}$, где $\varphi = \angle MPQ$. Так как угол MPN равен $\pi - \psi$, то

$$\cos(\pi - \psi) = \cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta\cos\Omega = -\cos\psi,$$

где Ω — двугранный угол с ребром PQ[3]). Отсюда следует, что

$$\frac{\partial V}{\partial z}(M) = -\iint_{\Sigma} (\mu\cos\theta)\frac{\cos\varphi}{R^2}\, d\sigma - \iint_{\Sigma} \mu\sin\theta\cos\Omega\frac{\sin\varphi}{R^2}\, d\sigma = -W_1 - I(M), \quad (45)$$

---

[1]) Предел разностного отношения $\frac{V(M) - V(P_0)}{MP_0}$ при $M \to P_0$ равен пределу извне для производной по внешней нормали или пределу изнутри для производной по внутренней нормали, в зависимости от того, с какой стороны точка M приближается к точке P_0.

[2]) Очевидно, что θ и $\sin\theta$ стремятся к нулю, когда $P \to P_0$. Если поверхность обладает конечной кривизной в окрестности точки P_0, т. е. ее уравнение можно представить в виде

$$z = f(x, y),$$

где $f(x, y)$ имеет вторые производные, то $\sin\theta$ будет дифференцируемой функцией x, y и, следовательно,

$$\sin\theta < Ar$$

(для поверхностей Ляпунова $\sin\theta < Ar^{\delta}$).

[3]) Если направление PQ принять за ось новой сферической системы, то эта формула совпадает с формулой (13) на стр. 326.

для преобразованной функции уравнение $\frac{\partial}{\partial x}\left[(1+\alpha u)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=$ $=\frac{\partial u}{\partial t}$ с начальными и граничными условиями $u(x,0)=0$, $u(0,t)=1$. Полагая

$$u(x,t)=f(z),\quad z=\frac{x}{2\sqrt{t}},$$

получаем для f уравнение

$$\frac{d}{dz}\left[(1+\alpha f)\frac{df}{dz}\right]=-2z\frac{df}{dz},\quad f(0)=1,\quad f(\infty)=0. \tag{22}$$

Если коэффициент теплопроводности $k(u)$ является степенной функцией температуры, $k(u)=k_0u^\sigma$, $k_0=\text{const}>0$, $\sigma>0$, а вместо (18) заданы условия $u(0,t)=u_0t^n$, $n>0$, $u(x,0)=0$, то уравнение (17) при $c\rho=1$ имеет решения вида $u(x,t)=$ $=t^nf(z)$, где $z=x/ct^m$, $m=(1+n\sigma)/2$, $c=\text{const}>0$. В частности, при $n=\sigma$ получаем решения типа «температурной волны», распространяющейся с конечной скоростью $c: u(x,t)=$ $=u_0t^n\left(1-\frac{x}{ct}\right)^{1/n}$ при $x\leqslant ct$, $u(x,t)=0$ при $x\geqslant ct$ (см. Дополнение I, рис. 87). На рис. 42 приведены результаты численного интегрирования уравнения (22) для различных значений α.

IV. Задача о фазовом переходе

При изменении температуры тела может происходить изменение его физического состояния, в частности при переходе температуры через точку плавления — переход из жидкой фазы в твердую (или обратный переход). На поверхности фазового перехода все время сохраняется постоянная температура. При движении поверхности фазового перехода происходит выделение скрытой теплоты затвердевания (плавления). Сформулируем те дополнительные условия, которые должны выполняться на поверхности затвердевания[1]).

Рассмотрим плоскую задачу, когда поверхностью раздела является плоскость $x=\xi(t)$. За время t, $t+\Delta t$ граница $x=\xi$ переместится от точки $\xi=x_1$ до точки $\xi=x_2=x_1+$ $+\Delta\xi$. При этом затвердевает масса $\rho\Delta\xi$ (или расплавляется, если $\Delta\xi<0$) и выделяется соответствующее количество тепла $\lambda\rho\Delta\xi$.

Для выполнения теплового баланса это количество тепла должно равняться разности количеств тепла, прошедших через

[1]) Ф. Франк и Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, гл. XIII, Гостехиздат, 1937.