для преобразованной функции уравнение $\frac{\partial}{\partial x}\left[(1+\alpha u)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=$ $=\frac{\partial u}{\partial t}$ с начальными и граничными условиями $u(x,0)=0$, $u(0,t)=1$. Полагая

$$u(x,t)=f(z), \quad z=\frac{x}{2\sqrt{t}},$$

получаем для f уравнение

$$\frac{d}{dz}\left[(1+\alpha f)\frac{df}{dz}\right]=-2z\frac{df}{dz}, \quad f(0)=1, \quad f(\infty)=0. \qquad (22)$$

Если коэффициент теплопроводности $k(u)$ является степенной функцией температуры, $k(u)=k_0u^\sigma$, $k_0=\text{const}>0$, $\sigma>0$, а вместо (18) заданы условия $u(0,t)=u_0t^n$, $n>0$, $u(x,0)=0$, то уравнение (17) при $c\rho=1$ имеет решения вида $u(x,t)=$ $=t^nf(z)$, где $z=x/ct^m$, $m=(1+n\sigma)/2$, $c=\text{const}>0$. В частности, при $n=\sigma$ получаем решения типа «температурной волны», распространяющейся с конечной скоростью $c: u(x,t)=$ $=u_0t^n\left(1-\frac{x}{ct}\right)^{1/n}$ при $x\leqslant ct$, $u(x,t)=0$ при $x\geqslant ct$ (см. Дополнение I, рис. 87). На рис. 42 приведены результаты численного интегрирования уравнения (22) для различных значений α.

IV. Задача о фазовом переходе

При изменении температуры тела может происходить изменение его физического состояния, в частности при переходе температуры через точку плавления — переход из жидкой фазы в твердую (или обратный переход). На поверхности фазового перехода все время сохраняется постоянная температура. При движении поверхности фазового перехода происходит выделение скрытой теплоты затвердевания (плавления). Сформулируем те дополнительные условия, которые должны выполняться на поверхности затвердевания[1]).

Рассмотрим плоскую задачу, когда поверхностью раздела является плоскость $x=\xi(t)$. За время t, $t+\Delta t$ граница $x=\xi$ переместится от точки $\xi=x_1$ до точки $\xi=x_2=x_1+$ $+\Delta\xi$. При этом затвердевает масса $\rho\Delta\xi$ (или расплавляется, если $\Delta\xi<0$) и выделяется соответствующее количество тепла $\lambda\rho\Delta\xi$.

Для выполнения теплового баланса это количество тепла должно равняться разности количеств тепла, прошедших через

---

[1]) Ф. Франк и Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, гл. XIII, Гостехиздат, 1937.

границы $\xi = x_1$ и $\xi = x_2$, т. е. должно выполняться условие

$$\left[k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x_1} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x_2}\right] \Delta t = \lambda\rho\,\Delta\xi,$$

где k_1 и k_2 — коэффициенты теплопроводности первой и второй фазы, а λ — скрытая теплота плавления.

Переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, мы и получим дополнительное условие на границе раздела в следующем виде:

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=\xi} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=\xi} = \lambda\rho \frac{d\xi}{dt}.$$

Это условие имеет место как для процесса затвердевания $\left(\text{когда } \Delta\xi > 0 \text{ и } \frac{d\xi}{dt} > 0\right)$, так и для процесса плавления $\left(\text{когда } \Delta\xi < 0 \text{ и } \frac{d\xi}{dt} < 0\right)$; направление процесса определяется знаком левой части.

Рассмотрим процесс замерзания воды, при котором температура фазового перехода равна нулю. Будем рассматривать массу воды $x \geqslant 0$, ограниченную с одной стороны плоскостью $x = 0$. В начальный момент $t = 0$ вода обладает постоянной температурой $c > 0$. Если на поверхности $x = 0$ все время поддерживается постоянная температура $c_1 < 0$, то граница замерзания $x = \xi$ будет со временем проникать в глубь жидкости.

Задача о распределении температуры при наличии фазового перехода и о скорости движения границы раздела фаз (например, внутри замерзающей воды) сводится к решению уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial t} &= a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \quad \text{для} \quad 0 < x < \xi, \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \quad \text{для} \quad \xi < x < \infty \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

с дополнительными условиями

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= c_1 \quad \text{при} \quad x = 0, \\ u_2 &= c \quad \text{при} \quad t = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

и условиями на границе замерзания

$$u_1 = u_2 = 0 \quad \text{при} \quad x = \xi, \qquad (3)$$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\Big|_{x=\xi} - k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\Big|_{x=\xi} = \lambda\rho \frac{d\xi}{dt}, \qquad (4)$$

где k_1, a_1^2 и k_2, a_2^2 — коэффициенты теплопроводности и температуропроводности твердой и, соответственно, жидкой фаз. Задачу (1) — (4) часто называют задачей Стефана, задачей о фазовом переходе или задачей о промерзании.

Решение задачи будем искать в виде

$$u_1 = A_1 + B_1\Phi\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right), \qquad u_2 = A_2 + B_2\Phi\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right),$$

где A_1, B_1, A_2 и B_2 — пока неопределенные постоянные, а Φ — интеграл ошибок

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\xi^2}\,d\xi.$$

Удовлетворяя условиям (2) и (3), получим:

$$A_1 = c_1, \quad A_2 + B_2 = c$$

из условия (2) и

$$A_1 + B_1\Phi\left(\frac{\xi}{2a_1\sqrt{t}}\right) = 0,$$

$$A_2 + B_2\Phi\left(\frac{\xi}{2a_2\sqrt{t}}\right) = 0$$

из условия (3). Последние условия должны иметь место для любых значений t. Это возможно лишь при выполнении соотношения

$$\xi = \alpha\sqrt{t}, \tag{5}$$

где α — некоторая постоянная. Соотношение (5) определяет закон движения границы замерзания.

Для постоянных A_1, B_1, A_2, B_2 и α получаются выражения

$$\left.\begin{aligned} &A_1 = c_1, && B_1 = -\frac{c_1}{\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)},\\ &A_2 = -\frac{c\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}{1-\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}, && B_2 = \frac{c}{1-\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Чтобы определить постоянную α, надо воспользоваться соотношением (4)

$$\frac{k_1c_1e^{-\frac{\alpha^2}{4a_1^2}}}{a_1\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} + \frac{k_2ce^{-\frac{\alpha^2}{4a_2^2}}}{a_2\left[1-\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_2}\right)\right]} = -\lambda\rho\alpha\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{7}$$

Решение этого трансцендентного уравнения и дает значение α. Наличие хотя бы одного решения при $c_1 < 0$, $c > 0$ следует уже из того, что при изменении α от 0 до ∞ левая часть уравнения изменяется от $-\infty$ до $+\infty$[1]), а правая — от 0 до $-\infty$. В случае, если c равно температуре плавления ($c = 0$), то выражения (6) и (7) для определения коэффициентов принимают более простой вид:

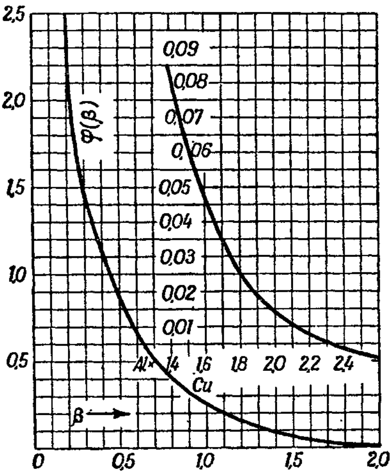

Рис. 43.

$$A_2 = B_2 = 0,$$

$$A_1 = c_1, \quad B_1 = -\frac{c_1}{\Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} \qquad (6')$$

и

$$\frac{k_1 c_1 e^{-\frac{\alpha^2}{4a_1^2}}}{a_1 \Phi\left(\frac{\alpha}{2a_1}\right)} = -\lambda\rho\alpha\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \qquad (7')$$

Положив $\alpha/2a_1 = \beta$, можем переписать уравнение (7′) в таком виде:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-\beta^2}}{\Phi(\beta)} = -D\beta,$$

где постоянная D определяется выражением

$$D = \frac{\lambda\rho\, a_1^2}{k_1 c_1} < 0.$$

Воспользовавшись графиком функции $\varphi(\beta') = \frac{e^{-\beta^2}}{\sqrt{\pi}\,\Phi(\beta)}$, данным на рис. 43, легко графически определить значение α.

Решение задачи о промерзании может быть также получено при помощи метода подобия, приведенного в приложении III к этой главе. Задача о промерзании является в некотором смысле предельным случаем нелинейных краевых задач, рассмотренных в приложении III. В самом деле, коэффициенты теплопроводности и теплоемкости в задаче о промерзании являются кусочно-постоянными функциями, и, кроме того, при $u = 0$ теплоемкость имеет бесконечно большое значение. Этот случай можно получить как предельный при $\varepsilon \to 0$, когда скрытая теплота выделяется не мгновенно, а на некотором промежутке

[1]) Асимптотическое представление функции $1 - \Phi(z)$ при $z \to \infty$ см. стр. 718.

$-\varepsilon$, $+\varepsilon$, причем должно выполняться условие

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} c(u)\,du = \lambda.$$

Однако эту задачу можно решить и непосредственно, пользуясь методом подобия. Нетрудно проверить, что все условия задачи останутся неизменными, если масштаб длины увеличить в k раз, а масштаб времени — в k^2 раз. Это значит, что решение задачи зависит от аргумента $\frac{x}{\sqrt{t}}$, т. е. что

$$u(x, t) = f\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right).$$

Отсюда, в частности, следует, что движение нулевой изотермы будет описываться уравнением $\xi = \alpha\sqrt{t}$, где α — значение аргумента, при котором $f(\alpha) = 0$. Для определения функции f мы имеем следующие условия:

$$a_1^2 \frac{d^2 f_1}{dz^2} = -2z \frac{df_1}{dz} \quad \text{для} \quad 0 < z < \alpha,$$

$$a_2^2 \frac{d^2 f_2}{dz^2} = -2z \frac{df_2}{dz} \quad \text{для} \quad \alpha < z < \infty;$$

$$f_1(0) = c_1; \quad f_2(\infty) = c; \quad f_1(\alpha) = f_2(\alpha) = 0;$$

$$k_1 f_1'(\alpha) - k_2 f_2'(\alpha) = \lambda\rho \frac{\alpha}{2}.$$

Поэтому функция $f(z)$ имеет следующий вид:

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) = A_1 + B_1 \Phi\left(\dfrac{z}{2a_1}\right), & \text{если} \quad 0 < z < \alpha, \\ f_2(z) = A_2 + B_2 \Phi\left(\dfrac{z}{2a_2}\right), & \text{если} \quad \alpha < z < \infty. \end{cases}$$

Для определения постоянных A_1, B_1, A_2, B_2 мы должны использовать условия (2) и (3), из которых вытекают формулы (6). Для определения α получается условие (7). Таким образом, аналитическая часть решения в обоих методах одинакова.

Изложенные здесь соображения показывают, что задачу о промерзании можно решать также и в тех случаях, когда скрытая теплота выделяется не при фиксированной температуре, а на некотором интервале температур. Подобным же методом можно решить задачу, если имеется не одна, а несколько критических температур, что встречается при фазовых превращениях в процессе перехода от одной кристаллической структуры к другой, например при перекристаллизации стали. Наиболее эффективным методом численного решения задач о фазовых переходах является метод конечных разностей, который применим для случая двух и трех пространственных переменных при наличии нескольких фазовых переходов (см. Дополнение I, § 4).

V. Уравнение Эйнштейна — Колмогорова

Микроскопические частицы, находящиеся в среде в свободном, взвешенном состоянии, совершают беспорядочное движение, называемое броуновским. Обозначим вероятность для частицы, вышедшей из точки M_0 в момент t_0, находиться в момент t в малой окрестности ΔV точки M функцией

$$W(M, t; M_0, t_0) \cdot \Delta V. \tag{1}$$

Вероятность здесь понимается в том смысле, что если в течение некоторого малого промежутка $t_0 + \Delta t$ из точки M_0 выходит достаточно большое количество частиц N (причем взаимодействие между ними пренебрежимо мало), то концентрация этих частиц при $\Delta t \to 0$ в точке M в момент t будет равна $W(M, t; M_0, t_0)$, если за единицу массы частиц принять всю массу выходящих из точки M_0 частиц.

С подобным же явлением мы встречаемся при диффузии газа, происходящей в какой-либо (например, воздушной) среде. Функция $W(M, t; M_0, t_0)$ представляет функцию точечного источника, соответствующего единичной массе.

Очевидно, что

$$\int W(M, t; M_0, t_0)\,dV_M = 1 \qquad (t > t_0) \tag{2}$$

и что если начальная концентрация частиц в некоторый момент времени t_0 равна $\varphi(M)$, то концентрация $u(M, t)$ этих частиц в момент $t > t_0$ будет равна

$$u(M, t) = \int W(M, t; P, t_0)\,\varphi(P)\,dV_P, \tag{3}$$

где интеграл берется по всему пространству.

Из последнего равенства следует уравнение [1])

$$W(M, t; M_0, t_0) = \int W(M, t; P, \theta)\,W(P, \theta; M_0, t_0)\,dV_P \tag{4}$$
$$(t_0 < \theta < t),$$

имеющее место для любого значения $t_0 < \theta < t$. Это последнее уравнение называют **уравнением Эйнштейна — Колмогорова**.

---

[1]) М. А. Леонтович, Статистическая физика, гл. VI, Гостехиздат, 1944; А. Н. Колмогоров, Аналитические методы теории вероятности, Успехи математических наук, вып. V, 1938.