переходах является метод конечных разностей, который применим для случая двух и трех пространственных переменных при наличии нескольких фазовых переходов (см. Дополнение I, § 4).

V. Уравнение Эйнштейна — Колмогорова

Микроскопические частицы, находящиеся в среде в свободном, взвешенном состоянии, совершают беспорядочное движение, называемое броуновским. Обозначим вероятность для частицы, вышедшей из точки M_0 в момент t_0, находиться в момент t в малой окрестности ΔV точки M функцией

$$W(M, t; M_0, t_0) \cdot \Delta V. \qquad (1)$$

Вероятность здесь понимается в том смысле, что если в течение некоторого малого промежутка $t_0 + \Delta t$ из точки M_0 выходит достаточно большое количество частиц N (причем взаимодействие между ними пренебрежимо мало), то концентрация этих частиц при $\Delta t \to 0$ в точке M в момент t будет равна $W(M, t; M_0, t_0)$, если за единицу массы частиц принять всю массу выходящих из точки M_0 частиц.

С подобным же явлением мы встречаемся при диффузии газа, происходящей в какой-либо (например, воздушной) среде. Функция $W(M, t; M_0, t_0)$ представляет функцию точечного источника, соответствующего единичной массе.

Очевидно, что

$$\int W(M, t; M_0, t_0) dV_M = 1 \qquad (t > t_0) \qquad (2)$$

и что если начальная концентрация частиц в некоторый момент времени t_0 равна $\varphi(M)$, то концентрация $u(M, t)$ этих частиц в момент $t > t_0$ будет равна

$$u(M, t) = \int W(M, t; P, t_0) \varphi(P) dV_P, \qquad (3)$$

где интеграл берется по всему пространству.

Из последнего равенства следует уравнение[1])

$$W(M, t; M_0, t_0) = \int W(M, t; P, \theta) W(P, \theta; M_0, t_0) dV_P \qquad (4)$$
$$(t_0 < \theta < t),$$

имеющее место для любого значения $t_0 < \theta < t$. Это последнее уравнение называют **уравнением Эйнштейна — Колмогорова**.

[1]) М. А. Леонтович, Статистическая физика, гл. VI, Гостехиздат, 1944; А. Н. Колмогоров, Аналитические методы теории вероятности, Успехи математических наук, вып. V, 1938.

Покажем, что при определенных условиях, наложенных на функцию $W(M, t;\ M_0, t_0)$, решение уравнения Эйнштейна — Колмогорова удовлетворяет некоторому уравнению с частными производными параболического типа. Рассмотрим случай, когда положение точки M характеризуется одной координатой x. Предположим, что функция $W(x, t;\ x_0, t_0)$ удовлетворяет следующим условиям:

1°

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\overline{x-\xi}}{\tau}=\lim\frac{1}{\tau}\int (x-\xi)\,W(x,\ t+\tau;\ \xi,\ t)\,dx=A(\xi,\ t). \qquad (5)$$

Если за время τ частица переходит из положения ξ в положение x, то $\frac{\overline{x-\xi}}{\tau}$ является средней скоростью частицы. Таким образом, первое условие означает требование существования конечной скорости упорядоченного движения частицы.

2°

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\overline{(x-\xi)^2}}{\tau}=\lim\frac{1}{\tau}\int (x-\xi)^2\,W(x,\ t+\tau;\ \xi,\ t)\,dx=2B(\xi,\ t). \qquad (6)$$

Величина $(x-\xi)^2$ не зависит от направления смещения точки x относительно точки ξ. Среднее значение квадрата отклонения за время τ

$$\overline{(x-\xi)^2}=\int (x-\xi)^2\,W(x,\ t+\tau;\ \xi,\ t)\,dx$$

обычно рассматривается как мера неупорядоченности движения за этот промежуток времени. Требование 2° означает предположение линейной зависимости среднего квадрата от времени при малых τ.

3°

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{\overline{|x-\xi|^3}}{\tau}=\lim\frac{1}{\tau}\int |x-\xi|^3\cdot W(x,\ t+\tau;\ \xi,\ t)\,dx=0. \qquad (7)$$

Функция $W(x, t+\tau;\ \xi, t)$, являющаяся функцией точечного источника, для малых значений τ должна быстро убывать, когда $|x-\xi|\to\infty$, и возрастать, когда $|x-\xi|$ мало.

Для получения дифференциального уравнения Эйнштейна — Колмогорова умножим обе части уравнения (4) на произвольную функцию $\psi(x)$, обращающуюся в нуль вместе со своей производной на границах области интегрирования, и проинтегрируем по всей этой области:

$$\int W(x,\ t+\tau;\ x_0,\ t_0)\,\psi(x)\,dx=$$
$$=\int W(\xi,\ t;\ x_0,\ t_0)\,d\xi\int W(x,\ t+\tau;\ \xi,\ t)\,\psi(x)\,dx.$$

Разложив в правой части функцию $\psi(x)$ в ряд Тейлора по $x-\xi$:

$$\psi(x)=\psi(\xi)+\psi'(\xi)(x-\xi)+\frac{\psi''(\xi)}{2}(x-\xi)^2+\frac{\psi'''(\xi^*)}{3!}(x-\xi)^3,$$

где ξ^* — среднее значение, заключенное между x и ξ, и разделив на τ, после простых преобразований будем иметь:

$$\int\psi(x)\frac{W(x,t+\tau;\,x_0,t_0)-W(x,t;\,x_0,t_0)}{\tau}dx=$$

$$=\int W(\xi,t;\,x_0,t_0)\left[\psi'(\xi)\overline{\frac{x-\xi}{\tau}}+\psi''(\xi)\overline{\frac{(x-\xi)^2}{2\tau}}\right]d\xi+$$

$$+\frac{1}{3!\tau}\int\int\psi'''(\xi^*)(x-\xi)^3W(\xi,t;\,x_0,t_0)W(x,t+\tau;\,\xi,t)\,d\xi\,dx.$$

Предполагая, что $\psi'''(x)$ ограничена

$$|\psi'''(x)|<A$$

и учитывая, что

$$\int W(\xi,t;\,x_0,t_0)\,d\xi=1,$$

мы получим:

$$\left|\frac{1}{\tau}\int\int\psi'''(\xi^*)(x-\xi)^3W(\xi,t;\,x_0,t_0)W(x,t+\tau;\,\xi,t)\,d\xi\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{A}{\tau}\int|x-\xi|^3W(x,t+\tau;\,\xi,t)\,dx=\frac{\overline{A|x-\xi|^3}}{\tau}.$$

Из условия 3° вытекает, что это выражение при $\tau\to0$ стремится к нулю. Поэтому, переходя к пределу при $\tau\to0$ и используя условия 1°, 2°, получаем:

$$\int\psi(x)\frac{\partial W(x,t;\,x_0,t_0)}{\partial t}dx=$$

$$=\int W(\xi,t;\,x_0,t_0)[\psi'(\xi)A(\xi,t)+\psi''(\xi)B(\xi,t)]\,d\xi.$$

После интегрирования по частям правой части, принимая во внимание, что функция ψ обращается в нуль вместе со своей производной на границе области интегрирования, получим:

$$\int\psi(x)\left[\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial(AW)}{\partial x}-\frac{\partial^2(BW)}{\partial x^2}\right]dx=0.$$

Так как это соотношение должно иметь место для произвольной функции $\psi(x)$, то для функции вероятности $W(x,t;\,x_0,t_0)$ мы получаем дифференциальное уравнение Эйнштейна—Колмогорова

$$\frac{\partial W}{\partial t}=-\frac{\partial(AW)}{\partial x}+\frac{\partial^2(BW)}{\partial x^2}. \tag{8}$$

Полученное уравнение является уравнением параболического типа, подобным уравнению теплопроводности, и может быть записано в виде

$$W_t=\frac{\partial}{\partial x}(BW_x)+\alpha W_x+\beta W, \tag{9}$$

где

$$\alpha=-A+B_x, \qquad \beta=-A_x+B_{xx}=\alpha_x.$$

Из уравнения (9) видно, что величина B имеет физический смысл коэффициента диффузии. Если рассматриваемый процесс однороден в пространстве и времени, т. е. функция W зависит только от разности $\xi=x-x_0$ и $\theta=t-t_0$, то коэффициенты A и B не зависят от x и t и являются постоянными. Уравнение (8) в этом случае является уравнением с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial W}{\partial t}=-A\frac{\partial W}{\partial x}+B\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \tag{10}$$

Если функция W зависит только от $|x-\xi|$, т. е. вероятности смещения направо и налево на одинаковые расстояния от точки ξ равны, то очевидно, что A должно быть равно нулю. Аналитически это следует из формулы (5) в силу того, что подынтегральная функция нечетна.

В этом случае уравнение (8) является простейшим уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial W}{\partial t}=B\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \tag{11}$$

VI. δ-функция

1. Определение δ-функции. Наряду с непрерывно распределенными величинами (масса, заряд, тепловые источники, механический импульс и т. п.) часто приходится иметь дело с сосредоточенными величинами (точечная масса, точечный заряд, точечный источник тепла, сосредоточенный импульс и т. д.). Не следует забывать, что эти понятия являются «предельными образами» и могут быть характеризованы при помощи понятия «обобщенных функций»[1]).

Имея в виду физический смысл задачи, рассмотрим потенциал в точке M (см. главу IV, § 5) единичной массы, сосредоточенной внутри некоторого объема T в окрестности точки M_0. Возьмем какую-либо последовательность функций $\{\rho_n\}$ ($\rho_n>0$), каждая из которых равна нулю вне шара $S_{\varepsilon_n}^{M_0}$ радиуса ε_n с центром в точке M_0, где $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$, и для

[1]) См. подробнее Р. Курант, Уравнения с частными производными, Москва, 1964, а также И. М. Гельфанд и Е. Г. Шилов, Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, 1959.