Полученное уравнение является уравнением параболического типа, подобным уравнению теплопроводности, и может быть записано в виде

$$W_t = \frac{\partial}{\partial x}(BW_x) + \alpha W_x + \beta W, \tag{9}$$

где

$$\alpha = -A + B_x, \quad \beta = -A_x + B_{xx} = \alpha_x.$$

Из уравнения (9) видно, что величина B имеет физический смысл коэффициента диффузии. Если рассматриваемый процесс однороден в пространстве и времени, т. е. функция W зависит только от разности $\xi = x - x_0$ и $\theta = t - t_0$, то коэффициенты A и B не зависят от x и t и являются постоянными. Уравнение (8) в этом случае является уравнением с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -A\frac{\partial W}{\partial x} + B\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \tag{10}$$

Если функция W зависит только от $|x - \xi|$, т. е. вероятности смещения направо и налево на одинаковые расстояния от точки ξ равны, то очевидно, что A должно быть равно нулю. Аналитически это следует из формулы (5) в силу того, что подынтегральная функция нечетна.

В этом случае уравнение (8) является простейшим уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial W}{\partial t} = B\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \tag{11}$$

VI. δ-функция

1. Определение δ-функции. Наряду с непрерывно распределенными величинами (масса, заряд, тепловые источники, механический импульс и т. п.) часто приходится иметь дело с сосредоточенными величинами (точечная масса, точечный заряд, точечный источник тепла, сосредоточенный импульс и т. д.). Не следует забывать, что эти понятия являются «предельными образами» и могут быть характеризованы при помощи понятия «обобщенных функций»[1]).

Имея в виду физический смысл задачи, рассмотрим потенциал в точке M (см. главу IV, § 5) единичной массы, сосредоточенной внутри некоторого объема T в окрестности точки M_0. Возьмем какую-либо последовательность функций $\{\rho_n\}$ ($\rho_n > 0$), каждая из которых равна нулю вне шара $S_{\varepsilon_n}^{M_0}$ радиуса ε_n с центром в точке M_0, где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, и для

[1]) См. подробнее Р. Курант, Уравнения с частными производными, Москва, 1964, а также И. М. Гельфанд и Е. Г. Шилов, Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, 1959.

которых, начиная с некоторого n,

$$\iiint_T \rho_n(P)\,d\tau_P = \iiint_{S_{\varepsilon_n}^{M_0}} \rho_n(P)\,d\tau_P = 1. \tag{1}$$

Рассматривая последовательность функций

$$u_n = \iiint_T \frac{\rho_n}{r}\,d\tau,$$

являющихся потенциалами масс, распределенных с плотностями ρ_n, и совершая предельный переход при $n \to \infty$, получим:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{r_{M_0M}}. \tag{2}$$

Этот результат, очевидно, не зависит от выбора последовательности $\{\rho_n\}$. Хотя последовательность $\{u_n\}$ и сходится к $1/r$, однако последовательность $\{\rho_n\}$ не имеет предела в классе рассматриваемых кусочно-дифференцируемых функций. «Предельный образ», соответствующий последовательности $\{\rho_n\}$, называют функцией $\delta(M, M_0)$.

Основным свойством, определяющим δ-функцию, является следующее формальное операторное соотношение:

$$\iiint_T \delta(M_0, M) f(M)\,d\tau_M = \begin{cases} f(M_0), & \text{если } M_0 \in T, \\ 0, & \text{если } M_0 \notin T, \end{cases} \tag{3}$$

где $f(M)$ — произвольная непрерывная функция точки M. Имея в виду, что при $n \to \infty$ функции ρ_n равномерно стремятся к нулю во всякой области, не содержащей точки M_0, и неограниченно возрастают в окрестности $S_{\varepsilon_n}^{M_0}$ точки M_0, иногда определяют δ-функцию формально при помощи соотношений

$$\left.\begin{aligned} &\delta(M, M_0) = 0 \quad \text{при} \quad M \neq M_0, \\ &\delta(M, M_0) = \infty \quad \text{при} \quad M = M_0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

и

$$\iiint_T \delta(M, M_0)\,d\tau_M = \begin{cases} 1 & \text{при } M_0 \in T, \\ 0 & \text{при } M_0 \notin T. \end{cases} \tag{5}$$

Равенство (5) является очевидным следствием формулы (3) при $f = 1$.

При рассмотрении последовательностей функций в различных задачах приходится иметь дело с разными определениями сходимости.

Говорят, что последовательность функций

$$\{u_n(x)\} = u_1(x), \quad u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots \tag{6}$$

сходится равномерно на интервале (a, b), если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что при $n, m > N$ для любого x из (a, b) будет выполняться условие

$$|u_n(x) - u_m(x)| < \varepsilon \text{ при } n, m > N.$$

Говорят, что последовательность (6) сходится в среднем на интервале (a, b), если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что при $n, m > N$

$$\int_a^b |u_n(x) - u_m(x)|^2 dx < \varepsilon.$$

Говорят, что последовательность (6) сходится слабо на интервале (a, b), если для любой непрерывной функции f существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x) u_n(x) dx.$$

При рассмотрении сходящихся последовательностей обычно вводят предельные элементы последовательностей. Рассмотрим класс непрерывных функций на интервале (a, b). В случае равномерной сходимости предельный элемент принадлежит тому же классу функций, что не всегда имеет место для сходимости в среднем и слабой сходимости.

Если предельный элемент не принадлежит рассматриваемому классу функций, то вводят предельные элементы, расширяя исходный класс. При этом под расширением понимается совокупность исходных и предельных элементов. С понятием расширения встречаются в теории действительного числа, когда иррациональные числа вводятся как предельные элементы, определяемые классом эквивалентных последовательностей.

Говоря о предельных элементах в смысле слабой сходимости, мы будем говорить, что две последовательности, $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$, имеют один и тот же предельный элемент, если эти последовательности эквивалентны, т. е. последовательность $\{u_n - v_n\}$ слабо сходится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)[u_n(x) - v_n(x)] dx = 0.$$

Будем называть последовательность неотрицательных функций $\{\delta_n\}$ нормированной локальной последовательностью точки x_0, если функция δ_n равна нулю вне интервала $(x_0 - \varepsilon_n,\ x_0 + \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, а

$$\int_a^b \delta_n(x)\,dx = 1.$$

Очевидно, что последовательность $\{\delta_n\}$ сходится слабо. Предельный элемент последовательности $\{\delta_n\}$ обычно называют δ-функцией точки x_0.

В том случае, если предельный в смысле слабой сходимости элемент u последовательности $\{u_n\}$ выходит из класса функций u_n, то интеграл от произведения некоторой функции $f(x)$ на элемент u определяется как предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,u_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,u\,dx.$$

Очевидно, что для δ-функции точки x_0 имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)\,\delta(x_0, x)\,dx = f(x_0).$$

Это соотношение часто принимают за определение δ-функции.

2. Разложение δ-функции в ряд Фурье. δ-функцию можно определить так же, как предельный образ других последовательностей, эквивалентных в смысле слабой сходимости приведенной выше последовательности $\delta_n(x)$ локальных нормированных функций точки x_0.

Рассмотрим последовательность функций

$$\bar{\delta}_n(x_0, x) = \frac{1}{2l} + \frac{1}{l}\sum_{m=1}^{n}\left(\cos\frac{m\pi}{l}x_0\cdot\cos\frac{m\pi}{l}x + \sin\frac{m\pi}{l}x_0\sin\frac{m\pi}{l}x\right) =$$

$$= \frac{1}{2l} + \frac{1}{l}\sum_{m=1}^{n}\cos\frac{m\pi}{l}(x - x_0) \qquad (7)$$

или в комплексной форме

$$\bar{\delta}_n(x, x_0) = \frac{1}{2l}\sum_{-n}^{n} e^{im\frac{\pi}{l}(x-x_0)}, \qquad (7')$$

определенную на интервале $(-l, l)$.

Очевидно, что для любой функции $g(x)$, разлагаемой в ряд Фурье, имеет место следующее предельное равенство:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-l}^{l} \bar{\delta}_n(x_0, x)\,g(x)\,dx = g(x_0), \qquad (8)$$

которое показывает, что в классе функций $\{g(x)\}$, разлагаемых в ряды Фурье, приведенная выше последовательность $\delta_n(x_0, x)$ эквивалентна в смысле слабой сходимости последовательности $\bar{\delta}_n(x_0, x)$, т. е. что

$$\delta(x_0, x) = \frac{1}{2l} + \frac{1}{l}\sum_{m=1}^{\infty}\cos\frac{m\pi}{l}(x_0 - x), \tag{9}$$

если это равенство понимать с изложенной выше точки зрения слабой сходимости.

С этой же точки зрения имеет место равенство

$$\delta(x_0, x) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)\,\varphi_n(x_0), \tag{10}$$

где $\{\varphi_n(x)\}$ — полная ортогональная и нормированная система функций, определенная на некотором интервале (a, b), а также равенство

$$\delta(x_0, x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x_0 - x)}\,dk = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos k(x_0 - x)\,dk. \tag{11}$$

Покажем, что при вычислении интегралов, содержащих δ-функцию, можно пользоваться рядом (9), производя почленное интегрирование подынтегральной функции.

Рассмотрим некоторую функцию $g(x)$, разложимую в ряд Фурье, и интеграл

$$\int_{-l}^{l} g(x)\,\delta(x_0, x)\,dx.$$

Подставляя сюда вместо $\delta(x_0, x)$ ее выражение из формулы (9), выполним почленное интегрирование ряда, стоящего под знаком интеграла. В результате получим:

$$g(x) = \frac{\bar{g}_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\bar{g}_m\cos\frac{\pi m}{l}x + \bar{\bar{g}}_m\sin\frac{\pi m}{l}x\right), \tag{11'}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
\bar{g}_0 &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} g(x_0)\,dx_0,\\
\bar{g}_m &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} g(x_0)\cos\frac{\pi m}{l}x_0\,dx_0,\\
\bar{\bar{g}}_m &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} g(x_0)\sin\frac{\pi m}{l}x_0\,dx_0.
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Сопоставление формулы (11) с равенством

$$\int_{-l}^{l} \delta(x, x_0) g(x)\, dx = g(x_0) \qquad (-l < x_0 < l)$$

показывает, что выполненное выше почленное интегрирование ряда для δ-функции приводит к правильному результату.

Таким образом, в классе функций, разложимых в ряд Фурье, последовательность частичных сумм

$$\frac{1}{2l} \sum_{n=-k}^{k} e^{i \frac{\pi n}{l}(x-x')}$$

эквивалентна нормированной локальной последовательности $\{\delta_n\}$.

Другие формы представления δ-функции также основаны на использовании некоторых функциональных последовательностей, эквивалентных в смысле слабой сходимости последовательности $\{\delta_n\}$.

3. Применение δ-функции к построению функции источника. Рассмотрим следующую задачу:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \tag{13}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \tag{14}$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0. \tag{15}$$

Заданной функции $\varphi(x)$ соответствует единственное решение задачи

$$u(x, t) = \mathscr{L}[\varphi(x)].$$

Допустим, что оператор $\mathscr{L}$ можно представить в виде

$$u(x, t) = \mathscr{L}[\varphi(x)] = \int_0^l G(x, \xi, t)\, \varphi(\xi)\, d\xi, \tag{16}$$

где $G(x, \xi, t)$ — ядро оператора $\mathscr{L}$.

Для того чтобы найти ядро $G(x, \xi, t)$, положим:

$$\varphi(x) = \delta(x - x_0). \tag{14'}$$

Заменяя в формуле (16) $\varphi(x)$ δ-функцией, получим:

$$u(x, t) = G(x, x_0, t), \tag{17}$$

т. е. $G(x, x_0, t)$ является решением задачи (13) при начальном условии (14′).

Представим δ-функцию в виде ряда Фурье

$$\delta(x - x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} \sin\frac{n\pi}{l} x \sin\frac{n\pi}{l} x_0.$$

Ядро G, очевидно, надо искать в виде суммы

$$G(x, x_0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin\frac{n\pi}{l} x, \tag{18}$$

каждое слагаемое которой должно удовлетворять уравнению теплопроводности. Отсюда следует, что

$$A_n(t) = B_n e^{-a^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 t}.$$

Из начального условия сразу же получаем:

$$B_n = \frac{2}{l}\sin\frac{n\pi}{l} x_0.$$

Таким образом, мы формально получили для ядра G выражение

$$G(x, x_0, t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 a^2 t} \sin\frac{n\pi}{l} x \sin\frac{n\pi}{l} x_0, \tag{19}$$

совпадающее с представлением для функции источника, которое было исследовано в § 3. Решение задачи (13) — (15) дается формулой (16), где $G(x, x_0, t)$ — функция, определяемая формулой (19).

Подобным же образом можно найти выражение для функции источника на неограниченной прямой. Функция G в этом случае будет определяться условиями

$$u_t - a^2 u_{xx} = 0 \qquad (-\infty < x < \infty), \tag{20}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \delta(x - x_0). \tag{21}$$

Имея в виду разложение δ-функции в интеграл Фурье

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos\lambda(x - x_0)\, d\lambda,$$

будем искать $G(x, x_0, t)$ в виде

$$G(x, x_0, t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} A_\lambda(t) \cos\lambda(x - x_0)\, d\lambda. \tag{22}$$

Из уравнения (20) находим:

$$A_\lambda(t) = A_\lambda^{(0)} e^{-a^2\lambda^2 t}. \tag{23}$$

Полагая $t = 0$ и сравнивая формулы (23) и (21), получаем:

$$A_\lambda^{(0)} = 1.$$

Таким образом,

$$G(x, x_0, t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda(x-x_0)\,d\lambda.$$

Вычисление этого интеграла дает:

$$G(x, x_0, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}\,e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}.$$

Отсюда следует, что решение задачи о распространении начальной температуры на бесконечной прямой должно выражаться формулой

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t)\,\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{24}$$

Выяснение границы применимости формул, полученных методом δ-функции, требует специального исследования.

В качестве примера рассмотрим теперь неоднородное уравнение

$$u_t = a^2 u_{xx} + \frac{F(x, t)}{c\rho}, \tag{25}$$

где $F(x, t)$ — плотность распределенных тепловых источников. Если в точке $x=\xi$ в момент $t=t_0$ помещен мгновенный источник тепла мощности Q_0, то

$$F(x, t) = Q_0\delta(x-\xi)\,\delta(t-t_0). \tag{26}$$

Найдем решение неоднородного уравнения

$$u_t = a^2 u_{xx} + \frac{Q_0}{c\rho}\delta(x-\xi)\,\delta(t-t_0) \qquad (t_0 > 0) \tag{27}$$

при нулевом начальном условии

$$u(x, 0) = 0.$$

Учитывая интегральное представление

$$\delta(x-\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\lambda(x-\xi)\,d\lambda,$$

будем искать функцию $u(x, t)$ в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty u_\lambda(t)\cos\lambda(x-\xi)\,d\lambda.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (27), получаем уравнение для $u_\lambda(t)$:

$$\dot{u}_\lambda(t) + a^2\lambda^2 u_\lambda(t) = \frac{Q_0}{c\rho}\,\delta(t - t_0)$$

с начальным условием

$$u_\lambda(0) = 0.$$

Как известно, решение неоднородного уравнения

$$\dot{u} + \alpha^2 u = f(t), \quad u(0) = 0$$

имеет вид

$$u(t) = \int_0^t e^{-\alpha^2(t-\tau)} f(\tau)\,d\tau. \tag{28}$$

В нашем случае

$$u_\lambda(t) = \frac{Q_0}{c\rho}\int_0^t e^{-a^2\lambda^2(t-\tau)}\,\delta(\tau - t_0)\,d\tau = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0, \\ \dfrac{Q_0}{c\rho}\,e^{-a^2\lambda^2(t-t_0)} & \text{при } t > t_0. \end{cases} \tag{29}$$

Таким образом,

$$u(x, t) = \frac{Q_0}{c\rho}\,\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-a^2\lambda^2(t-t_0)} \cos\lambda(x - \xi)\,d\lambda = \frac{Q_0}{c\rho}\,G(x, \xi, t - t_0),$$

где

$$G(x, \xi, t - t_0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2(t - t_0)}}\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-t_0)}}$$

— функция влияния мгновенного точечного источника.

Подобный метод построения функции влияния часто используется в теоретической физике[1]).

[1]) См. подробное изложение теории δ-функции и многочисленные примеры ее применения в книге Д. Д. Иваненко и А. А. Соколова, Классическая теория поля, гл. I, Гостехиздат, 1951.