ГЛАВА IV

УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

При исследовании стационарных процессов различной физической природы (колебания, теплопроводность, диффузия и др.) обычно приходят к уравнениям эллиптического типа. Наиболее распространенным уравнением этого типа является уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0.$$

Функция u называется гармонической в области T, если она непрерывна в этой области вместе со своими производными до 2-го порядка и удовлетворяет уравнению Лапласа.

При изучении свойств гармонических функций были разработаны различные математические методы, оказавшиеся плодотворными и в применении к уравнениям гиперболического и параболического типов.

§ 1. Задачи, приводящие к уравнению Лапласа

1. Стационарное тепловое поле. Постановка краевых задач. Рассмотрим стационарное тепловое поле. В главе III было показано, что температура нестационарного теплового поля удовлетворяет дифференциальному уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2 \Delta u \qquad \left(a^2 = \frac{k}{c\rho}\right).$$

Если процесс стационарен, то устанавливается распределение температуры $u(x, y, z)$, не меняющееся с течением времени и, следовательно, удовлетворяющее уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0. \tag{1}$$

При наличии источников тепла получаем уравнение

$$\Delta u = -f, \quad f = \frac{F}{k}, \tag{2}$$

где F — плотность тепловых источников, а k — коэффициент теплопроводности. Неоднородное уравнение Лапласа (2) часто называют уравнением Пуассона.

Рассмотрим некоторый объем T, ограниченный поверхностью Σ. Задача о стационарном распределении температуры $u(x, y, z)$ внутри тела T формулируется следующим образом:

найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую внутри T уравнению

$$\Delta u = -f(x, y, z) \tag{2}$$

и граничному условию, которое может быть взято в одном из следующих видов:

I. $u = f_1$ на Σ (первая краевая задача),

II. $\frac{\partial u}{\partial n} = f_2$ на Σ (вторая краевая задача),

III. $\frac{\partial u}{\partial n} + h(u - f_3) = 0$ на Σ (третья краевая задача),

где f_1, f_2, f_3, h — заданные функции, $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по внешней нормали к поверхности Σ [1]).

Физический смысл этих граничных условий очевиден (см. гл. III, § 1). Первую краевую задачу для уравнения Лапласа часто называют задачей Дирихле, а вторую задачу — задачей Неймана.

Если ищется решение в области T_0, внутренней (или внешней) по отношению к поверхности Σ, то соответствующую задачу называют внутренней (или внешней) краевой задачей.

2. Потенциальное течение жидкости. Потенциал стационарного тока и электростатического поля. В качестве второго примера рассмотрим потенциальное течение жидкости без источников. Пусть внутри некоторого объема T с границей Σ имеет место стационарное течение несжимаемой жидкости (плотность $\rho = \text{const}$), характеризуемое скоростью $v(x, y, z)$. Если течение жидкости не вихревое, то скорость v является потенциальным вектором, т. е.

$$v = -\operatorname{grad} \varphi, \tag{3}$$

где φ — скалярная функция, называемая потенциалом скорости. Если отсутствуют источники, то

$$\operatorname{div} v = 0. \tag{4}$$

Подставляя сюда выражение (3) для v, получим:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0$$

---

[1]) Очевидно, что стационарное распределение температуры может установиться лишь при условии равенства нулю суммарного потока тепла через границу области. Отсюда следует, что функция f_2 должна удовлетворять дополнительному требованию:

$$\iint_{\Sigma} f_2 \, d\sigma = 0.$$

или

$$\Delta\varphi = 0, \tag{5}$$

т. е. потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа.

Пусть в однородной проводящей среде имеется стационарный ток с объемной плотностью $\boldsymbol{j}(x, y, z)$. Если в среде нет объемных источников тока, то

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0. \tag{6}$$

Электрическое поле $\boldsymbol{E}$ определяется через плотность тока из дифференциального закона Ома

$$\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{j}}{\lambda}, \tag{7}$$

где λ — проводимость среды. Поскольку процесс стационарный, то электрическое поле является безвихревым или потенциальным[1]), т. е. существует такая скалярная функция $\varphi(x, y, z)$, для которой

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi \qquad (\boldsymbol{j} = -\lambda \operatorname{grad} \varphi). \tag{8}$$

Отсюда на основании формул (6) и (7) заключаем, что

$$\Delta\varphi = 0, \tag{9}$$

т. е. потенциал электрического поля стационарного тока удовлетворяет уравнению Лапласа.

Рассмотрим электрическое поле стационарных зарядов. Из стационарности процесса следует, что

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \tag{10}$$

т. е. поле является потенциальным и

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \tag{8}$$

Пусть $\rho(x, y, z)$ — объемная плотность зарядов, имеющихся в среде, характеризуемой диэлектрической постоянной $\varepsilon = 1$. Исходя из основного закона электродинамики

$$\iint\limits_S E_n\, dS = 4\pi \sum e_i = 4\pi \iiint\limits_T \rho\, d\tau, \tag{11}$$

где T — некоторый объем, S — поверхность, его ограничивающая, $\sum e_i$ — сумма всех зарядов внутри T, и пользуясь теоремой Остроградского

$$\iint\limits_S E_n\, dS = \iiint\limits_T \operatorname{div} \boldsymbol{E}\, d\tau, \tag{12}$$

---

[1]) Из второго уравнения Максвелла $\frac{\mu}{c}\dot{\boldsymbol{H}} = -\operatorname{rot} \boldsymbol{E}$ следует, что $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0$.

получаем:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho.$$

Подставляя сюда выражение (8) для $\boldsymbol{E}$, будем иметь:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \tag{13}$$

т. е. электростатический потенциал φ удовлетворяет уравнению Пуассона. Если объемных зарядов нет ($\rho = 0$), то потенциал φ должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0.$$

Основные краевые задачи для рассмотренных процессов относятся к трем типам, приведенным выше. Мы не будем здесь останавливаться на некоторых других краевых задачах, характерных для различных физических процессов. Некоторые из этих задач будут приведены в приложениях.

3. Уравнение Лапласа в криволинейной системе координат. Выведем выражение для оператора Лапласа в ортогональной криволинейной системе координат. Пусть в пространстве вместо декартовых координат x, y, z введены криволинейные координаты q_1, q_2, q_3 с помощью соотношений

$$q_1 = f_1(x, y, z), \quad q_2 = f_2(x, y, z), \quad q_3 = f_3(x, y, z), \tag{14}$$

разрешая которые относительно x, y, z, можно написать

$$x = \varphi_1(q_1, q_2, q_3), \quad y = \varphi_2(q_1, q_2, q_3), \quad z = \varphi_3(q_1, q_2, q_3). \tag{15}$$

Полагая $q_1 = C_1$, $q_2 = C_2$, $q_3 = C_3$, где C_1, C_2, C_3 — постоянные, получим три семейства координатных поверхностей:

$$f_1(x, y, z) = C_1, \quad f_2(x, y, z) = C_2$$

и

$$f_3(x, y, z) = C_3. \tag{16}$$

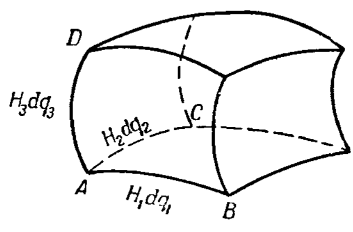

Рис. 44.

Рассмотрим элемент объема в новых координатах, ограниченный тремя парами координатных поверхностей (рис. 44). Вдоль ребра AB $q_2 = \text{const}$, $q_3 = \text{const}$, вдоль AD $q_1 = \text{const}$, $q_2 = \text{const}$, вдоль AC $q_1 = \text{const}$, $q_3 = \text{const}$. Направляющие косинусы касательной к ребрам AB, AC и AD пропорциональны соответственно

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}, \ \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}, \ \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1}; \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}, \ \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2}, \ \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2}; \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}, \ \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_3}, \ \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_3}.$$

Условие ортогональности ребер будет иметь вид

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_i}\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_k} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_i}\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_k} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_i}\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_k} = 0 \qquad (i \neq k). \tag{17}$$

Вычислим элемент длины в новых координатах

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3}dq_3\right)^2 + \\ + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial q_3}dq_3\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial\varphi_3}{\partial q_3}dq_3\right)^2. \tag{18}$$

Раскрывая скобки и учитывая условия ортогональности (17), получаем:

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2, \tag{19}$$

где

$$\left.\begin{aligned} H_1^2 &= \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_1}\right)^2, \\ H_2^2 &= \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_2}\right)^2, \\ H_3^2 &= \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_3}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Вдоль каждого из ребер элементарного объема меняется только одна координата, поэтому для длины этих ребер согласно формуле (19) будем иметь:

$$ds_1 = H_1\,dq_1, \qquad ds_2 = H_2\,dq_2, \qquad ds_3 = H_3\,dq_3, \tag{21}$$

так что элемент объема равен

$$dv = ds_1\,ds_2\,ds_3 = H_1H_2H_3\,dq_1\,dq_2\,dq_3. \tag{22}$$

Рассмотрим теперь некоторое векторное поле $A(x, y, z)$. Вычислим $\operatorname{div} A$, определяемую известной формулой векторного анализа

$$\operatorname{div} A = \lim_{v_M \to 0} \frac{\iint\limits_S A_n\,dS}{v_M}, \tag{23}$$

где S — поверхность, ограничивающая некоторый объем v_M, содержащий рассматриваемую точку M. Применим эту формулу к элементу объема dv, изображенному на рис. 44.

Пользуясь теоремой о среднем, можно представить разность потоков вектора A через противоположные грани, например через правую и левую грани, в виде

$$Q_1 = A_1\,ds_2\,ds_3\big|_{q_1+dq_1} - A_1\,ds_2\,ds_3\big|_{q_1}.$$

Принимая во внимание формулы (21), получим:

$$Q_1 = \left[H_2H_3A_1\big|_{q_1+dq_1} - H_2H_3A_1\big|_{q_1}\right]dq_2\,dq_3 = \\ = \frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3A_1)\,dq_1\,dq_2\,dq_3. \tag{24}$$

Аналогично вычисляются две другие разности потоков через противоположные грани

$$Q_2 = \frac{\partial}{\partial q_2}(H_3 H_1 A_2)\, dq_1\, dq_2\, dq_3, \tag{25}$$

$$Q_3 = \frac{\partial}{\partial q_3}(H_1 H_2 A_3)\, dq_1\, dq_2\, dq_3. \tag{26}$$

Подставляя в формулу (23) значение $\iint\limits_S A_n\, ds = Q_1 + Q_2 + Q_3$ и пользуясь формулой (22), получаем выражение дивергенции в криволинейных ортогональных координатах

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2 H_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(H_3 H_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(H_1 H_2 A_3)\right]. \tag{27}$$

Предположим, что поле $\boldsymbol{A}$ потенциальное, т. е.

$$\boldsymbol{A} = \operatorname{grad} u. \tag{28}$$

Тогда

$$A_1 = \frac{\partial u}{\partial s_1} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}; \quad A_2 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}; \quad A_3 = \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}. \tag{29}$$

Подставляя в (27) выражения (29) для A_1, A_2, A_3, получим выражение для оператора Лапласа

$$\Delta u = \operatorname{div} \operatorname{grad} u =$$

$$= \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right]. \tag{30}$$

Таким образом, уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ в ортогональных криволинейных координатах q_1, q_2 и q_3 записывается следующим образом:

$$\Delta u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right] = 0. \tag{31}$$

Рассмотрим два частных случая.

1. Сферические координаты. В этом случае $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$, и формулы преобразования (15) принимают вид

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \qquad y = r \sin\theta \sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta.$$

Вычислим ds^2:

$$ds^2 = (\sin\theta\cos\varphi\, dr + r\cos\theta\cos\varphi\, d\theta - r\sin\theta\sin\varphi\, d\varphi)^2 + \\ + (\sin\theta\sin\varphi\, dr + r\cos\theta\sin\varphi\, d\theta + r\sin\theta\cos\varphi\, d\varphi)^2 + \\ + (\cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta)^2;$$

после раскрытия скобок и упрощений находим:

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2,$$

т. е.

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = r\sin\theta.$$

Подставляя значения H_1, H_2, H_3 в формулу (31), получим уравнение Лапласа в сферических координатах

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\right]=0$$

или окончательно

$$\Delta_{r,\theta,\varphi}u=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0. \quad (32)$$

2. Цилиндрические координаты. В этом случае $q_1=\rho$, $q_2=\varphi$, $q_3=z$;

$$x=\rho\cos\varphi,\qquad y=\rho\sin\varphi,\qquad z=z,$$

так что

$$H_1=1,\qquad H_2=\rho,\qquad H_3=1.$$

Уравнение Лапласа в цилиндрических координатах принимает вид

$$\Delta_{\rho,\varphi,z}u=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0. \quad (33)$$

Если искомая функция u не зависит от z, то уравнение (33) упрощается:

$$\Delta_{\rho,\varphi}u=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0. \quad (34)$$

4. Некоторые частные решения уравнения Лапласа. Большой интерес представляют решения уравнения Лапласа, обладающие сферической или цилиндрической симметрией, т. е. зависящие только от одной переменной r или ρ.

Решение уравнения Лапласа $u=U(r)$, обладающее сферической симметрией, будет определяться из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right)=0.$$

Интегрируя это уравнение, находим:

$$U=\frac{C_1}{r}+C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Полагая, например, $C_1=1$, $C_2=0$, получаем функцию

$$U_0=\frac{1}{r}, \quad (35)$$

которую часто называют *фундаментальным решением уравнения Лапласа в пространстве.*

Аналогично, полагая

$$u=U(\rho)$$

и пользуясь уравнением (33) или (34), найдем решение, обладающее цилиндрической или круговой симметрией (в случае двух независимых переменных), в виде

$$U(\rho)=C_1 \ln \rho + C_2.$$

Выбирая $C_1=-1$ и $C_2=0$, будем иметь:

$$U_0=\ln \frac{1}{\rho}. \qquad (36)$$

Функцию $U_0(\rho)$ часто называют **фундаментальным решением уравнения Лапласа на плоскости** (для двух независимых переменных).

Функция $U_0=\frac{1}{r}$ удовлетворяет уравнению $\Delta u=0$ всюду, кроме точки $r=0$, где она обращается в бесконечность. С точностью до множителя пропорциональности она совпадает с полем точечного заряда e, помещенного в начале координат; потенциал этого поля равен

$$u=\frac{e}{r}.$$

Аналогично, функция $\ln \frac{1}{\rho}$ удовлетворяет уравнению Лапласа всюду, кроме точки $\rho=0$, где она обращается в (положительную) бесконечность, и с точностью до множителя совпадает с полем заряженной линии (см. подробнее § 5, п. 2), потенциал которого равен

$$u=2e_1 \ln \frac{1}{\rho},$$

где e_1 — плотность заряда, рассчитанная на единицу длины. Эти функции имеют большое значение в теории гармонических функций.

5. Гармонические функции и аналитические функции комплексного переменного. Весьма общим методом решения двумерных задач для уравнения Лапласа является метод, использующий функции комплексного переменного.

Пусть

$$w=f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$$

— некоторая функция комплексного переменного $z=x+iy$, причем u и v являются вещественными функциями переменных x и y. Наибольший интерес представляют так называемые аналитические функции, для которых существует производная

$$\frac{dw}{dz}=\lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}.$$

Приращение $\Delta z=\Delta x+i\Delta y$, очевидно, может стремиться к нулю многими способами. Для каждого из способов стремления

Δz к нулю, вообще говоря, может получиться свое значение предела. Однако если функция $w=f(z)$ аналитическая, то предел $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=f'(z)$ не зависит от выбора пути.

Необходимыми и достаточными условиями аналитичности функции являются так называемые **условия Коши — Римана**

$$\left.\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -v_x. \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

Эти условия можно получить, например, следующим образом.

Пусть $w=u+iv=f(z)$ — аналитическая функция. Вычисляя производные

$$w_x=u_x+iv_x=\frac{\partial w(z)}{\partial z}z_x=\frac{dw}{dz}$$

$$w_y=u_y+iv_y=\frac{\partial w(z)}{dz}z_y=i\frac{dw}{dz}$$

и требуя равенства значений $\frac{dw}{dz}$, определяемых из этих двух соотношений, получаем:

$$u_x+iv_x=v_y-iu_y=\frac{dw}{dz},$$

откуда и следуют условия Коши — Римана. На доказательстве достаточности этих условий мы не будем останавливаться.

В теории функций комплексного переменного доказывается, что функция, аналитическая в некоторой области G плоскости $z=x+iy$, имеет в этой области производные всех порядков и разлагается в степенной ряд. В частности, для такой функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют непрерывные производные 2-го порядка по x и y.

Дифференцируя первое равенство формулы (37) по x, а второе по y, получим:

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \quad \text{или} \quad \Delta_2 v=0.$$

Подобным же образом, меняя порядок дифференцирования, находим:

$$v_{xx}+v_{yy}=0 \quad \text{или} \quad \Delta_2 u=0.$$

Таким образом, действительная и мнимая части аналитической функции удовлетворяют уравнению Лапласа. Обычно говорят, что u и v, удовлетворяющие условию Коши — Римана, являются сопряженными гармоническими функциями.

Рассмотрим преобразование

$$\left.\begin{aligned} x&=x(u, v), \quad & u&=u(x, y), \\ y&=y(u, v), \quad & v&=v(x, y), \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

взаимно однозначно отображающее некоторую область G плоскости (x, y), на область G' плоскости (u, v), так что каждой точке области G соответствует определенная точка области G' и, обратно, каждой точке области G' соответствует определенная точка области G.

Пусть

$$U = U(x, y)$$

— некоторая вещественная дважды непрерывно дифференцируемая функция, определенная внутри области G.

Выясним, как изменяется при этом преобразовании оператор Лапласа функции $U = U[x(u, v), y(u, v)] = \tilde{U}(u, v)$.

Вычислим производные функции

$$U_x = \tilde{U}_u u_x + \tilde{U}_v v_x, \quad U_y = \tilde{U}_u u_y + \tilde{U}_v v_y,$$
$$U_{xx} = \tilde{U}_{uu} u_x^2 + \tilde{U}_{vv} v_x^2 + 2\tilde{U}_{uv} u_x v_x + \tilde{U}_u u_{xx} + \tilde{U}_v v_{xx},$$
$$U_{yy} = \tilde{U}_{uu} u_y^2 + \tilde{U}_{vv} v_y^2 + 2\tilde{U}_{uv} u_y v_y + \tilde{U}_u u_{yy} + \tilde{U}_v v_{yy},$$

откуда получаем:

$$U_{xx} + U_{yy} = \tilde{U}_{uu}(u_x^2 + u_y^2) + \tilde{U}_{vv}(v_x^2 + v_y^2) + \\ + 2\tilde{U}_{uv}(u_x v_x + u_y v_y) + \tilde{U}_u(u_{xx} + u_{yy}) + \tilde{U}_v(v_{xx} + v_{yy}). \quad (39)$$

Если u и v являются сопряженными гармоническими функциями, то преобразование (38) эквивалентно преобразованию, осуществляемому аналитической функцией

$$w = f(z) = u + iv \qquad (z = x + iy). \quad (40)$$

В этом случае в силу условий Коши — Римана (37) для функций u и v должны выполняться соотношения

$$u_x^2 + u_y^2 = u_x^2 + v_x^2 = v_y^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2,$$
$$u_x v_x + u_y v_y = 0.$$

Формула (39) принимает вид

$$U_{xx} + U_{yy} = (\tilde{U}_{uu} + \tilde{U}_{vv})|f'(z)|^2 \quad (41)$$

или

$$\Delta_{uv}\tilde{U} = \frac{1}{|f'(z)|^2}\Delta_{x,y}U. \quad (41')$$

Отсюда следует, что в результате преобразования (40) гармоническая в области G функция $U(x, y)$ переходит в функцию $\tilde{U} = U(u, v)$, гармоническую в области G', если только $|f'(z)|^2 \neq 0$.

6. Преобразование обратных радиусов-векторов. При изучении гармонических функций часто пользуются преобразованием обратных радиусов-векторов. Преобразованием обратных радиусов-векторов в сфере радиуса a называется такое преобразование, при котором всякой точке M ставится в соответствие точка M', лежащая на том же луче из начала координат, что и точка M, радиус-вектор которой r' связан с радиусом-вектором r точки M соотношением

$$r'r = a^2 \quad \text{или} \quad r' = \frac{a^2}{r}. \tag{42}$$

В дальнейшем будем считать $a = 1$, чего можно всегда добиться изменением масштаба длины.

Покажем, что гармоническая функция двух независимых переменных $u(\rho, \varphi)$ преобразованием обратных радиусов-векторов переводится в гармоническую функцию

$$v(\rho', \varphi) = u(\rho, \varphi), \quad \text{где} \quad \rho = \frac{1}{\rho'}. \tag{43}$$

В самом деле, функция $u(\rho, \varphi)$, а тем самым и функция $v\left(\frac{1}{\rho}, \varphi\right)$ как функции переменных ρ и φ удовлетворяют уравнениям

$$\rho^2 \Delta_{\rho, \varphi} u = \rho \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

и

$$\rho^2 \Delta_{\rho, \varphi} v = \rho \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial v}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Переходя к переменным ρ' и φ, получим:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial \rho} = \rho \frac{\partial v}{\partial \rho'} \cdot \frac{\partial \rho'}{\partial \rho} = -\rho' \frac{\partial v}{\partial \rho'},$$

откуда и следует, что $v(\rho', \varphi)$ удовлетворяет уравнению $\Delta_{\rho, \varphi} v = 0$, так как

$$\rho'^2 \Delta_{\rho', \varphi} v = \rho' \frac{\partial}{\partial \rho'}\left(\rho' \frac{\partial v}{\partial \rho'}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Переходя к случаю трех независимых переменных, покажем, что функция

$$v(r', \theta, \varphi) = ru(r, \theta, \varphi), \quad \text{где} \quad r = \frac{1}{r'} \tag{44}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta_{r', \theta, \varphi} v = 0$, если $u(r, \theta, \varphi)$ — гармоническая функция своих переменных, $\Delta_{r, \theta, \varphi} u = 0$.

Преобразование (44) часто называют преобразованием Кельвина.

Легко убедиться непосредственным дифференцированием, что первое слагаемое в операторе Лапласа (32) преобразуется к виду

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2}, \tag{45}$$

так что

$$r\Delta_{r,\,\theta,\,\varphi}u=\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]=0$$

или

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right]=0.$$

Замечая, что

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial r'}\cdot\frac{\partial r'}{\partial r}=-r'^2\frac{\partial v}{\partial r'},$$

находим, что v удовлетворяет уравнению $\Delta_{r',\,\theta,\,\varphi}v=0$, так как

$$r'^2\frac{\partial}{\partial r'}\left(r'^2\frac{\partial v}{\partial r'}\right)+r'^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right]=0,$$

или

$$r'^4\Delta_{r',\,\theta,\,\varphi}v=0.$$

§ 2. Общие свойства гармонических функций

В настоящем параграфе дается интегральное представление гармонических функций, являющееся основным аппаратом для изучения общих свойств гармонических функций. Одним из важнейших следствий интегральной формулы является принцип максимального значения, многократно используемый нами в дальнейшем как при доказательстве теоремы единственности, так и при решении краевых задач. Здесь также дается математическая постановка внутренних и внешних краевых задач для уравнения Лапласа и доказывается единственность и устойчивость решения этих задач.

1. Формулы Грина. Интегральное представление решения. При изучении уравнений эллиптического типа мы часто будем пользоваться формулами Грина, являющимися прямым следствием формулы Остроградского.

Формула Остроградского в простейшем случае имеет вид[1])

$$\iiint\limits_T \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_\Sigma R\cos\gamma\,d\sigma, \tag{1}$$

где T — некоторый объем, ограниченный достаточно гладкой поверхностью Σ, $R(x, y, z)$ — произвольная функция, непрерывная внутри $T+\Sigma$ и имеющая непрерывные производные внутри

[1]) Б. М. Будак, С. В. Фомин, Кратные интегралы и ряды, «Наука», 1965.