к виду

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2}, \tag{45}$$

так что

$$r\Delta_{r,\theta,\varphi}u=\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]=0$$

или

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right]=0.$$

Замечая, что

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial v}{\partial r'}\cdot\frac{\partial r'}{\partial r}=-r'^2\frac{\partial v}{\partial r'},$$

находим, что v удовлетворяет уравнению $\Delta_{r',\theta,\varphi}v=0$, так как

$$r'^2\frac{\partial}{\partial r'}\left(r'^2\frac{\partial v}{\partial r'}\right)+r'^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right]=0,$$

или

$$r'^4\Delta_{r',\theta,\varphi}v=0.$$

§ 2. Общие свойства гармонических функций

В настоящем параграфе дается интегральное представление гармонических функций, являющееся основным аппаратом для изучения общих свойств гармонических функций. Одним из важнейших следствий интегральной формулы является принцип максимального значения, многократно используемый нами в дальнейшем как при доказательстве теоремы единственности, так и при решении краевых задач. Здесь также дается математическая постановка внутренних и внешних краевых задач для уравнения Лапласа и доказывается единственность и устойчивость решения этих задач.

1. Формулы Грина. Интегральное представление решения. При изучении уравнений эллиптического типа мы часто будем пользоваться формулами Грина, являющимися прямым следствием формулы Остроградского.

Формула Остроградского в простейшем случае имеет вид[1])

$$\iiint\limits_T \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_\Sigma R\cos\gamma\,d\sigma, \tag{1}$$

где T — некоторый объем, ограниченный достаточно гладкой поверхностью Σ, $R(x,y,z)$ — произвольная функция, непрерывная внутри $T+\Sigma$ и имеющая непрерывные производные внутри

[1]) Б. М. Будак, С. В. Фомин, Кратные интегралы и ряды, «Наука», 1965.

T, γ — угол между направлением оси z и внешней нормалью к Σ. В справедливости этой формулы нетрудно убедиться, выполняя интегрирование по z.

Формулу Остроградского обычно записывают в виде

$$\iiint\limits_T \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)d\tau=\iint\limits_\Sigma \{P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\}\,d\sigma, \quad (2)$$

где $d\tau=dx\,dy\,dz$ — элемент объема, $\alpha=(\widehat{nx})$, $\beta=(\widehat{ny})$, $\gamma=(\widehat{nz})$ — углы внешней нормали n к поверхности Σ с координатными осями, P, Q, R — произвольные дифференцируемые функции [1]).

Если P, Q, R рассматривать как компоненты некоторого вектора $A=Pi+Qj+Rk$, то формулу Остроградского (2) можно записать следующим образом:

$$\iiint\limits_T \operatorname{div} A\,d\tau=\iint\limits_\Sigma A_n\,d\sigma, \quad (2')$$

где

$$\operatorname{div} A=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

и

$$A_n=P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma$$

— составляющая вектора A вдоль внешней нормали.

Перейдем теперь к выводу формул Грина.

Пусть $u=u(x,y,z)$ и $v=v(x,y,z)$ — функции, непрерывные вместе со своими первыми производными внутри $T+\Sigma$ и имеющие непрерывные вторые производные внутри T.

Полагая

$$P=u\frac{\partial v}{\partial x},\quad Q=u\frac{\partial v}{\partial y},\quad R=u\frac{\partial v}{\partial z}$$

и пользуясь формулой Остроградского (2′), приходим к так называемой *первой формуле Грина*

$$\iiint\limits_T u\,\Delta v\,d\tau=\iint\limits_\Sigma u\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma-\iiint\limits_T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)d\tau, \quad (3)$$

где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа, $\frac{\partial}{\partial n}=\cos\alpha\frac{\partial}{\partial x}+\cos\beta\frac{\partial}{\partial y}+\cos\gamma\frac{\partial}{\partial z}$ — производная по направлению внешней нормали.

---

[1]) В дальнейшем мы будем предполагать, что к тем областям, с которыми мы будем иметь дело, применима формула Остроградского. Такими поверхностями являются, например, поверхности с кусочно-непрерывной кривизной, а также поверхности Ляпунова (см. § 5).

где $W_1(M)$ — потенциал двойного слоя с плотностью $\mu_1=\mu\cos\theta$, имеющий разрыв на поверхности Σ. Очевидно, что интеграл $I(M)$ является функцией, непрерывной в точке P_0, так как $I(M)$ сходится равномерно в этой точке (см. примечание, стр. 358).

Возвращаясь к формуле (45), видим:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{\text{в}} &= -W_1(P_0) - 2\pi\mu_1(P_0) - I(P_0),\\ \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{\text{н}} &= -W_1(P_0) + 2\pi\mu_1(P_0) - I(P_0).\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Обозначим

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0 = -W_1(P_0) - I(P_0) =$$
$$= \left[-\iint_{\Sigma} (\mu\cos\theta)\frac{\cos\varphi}{R^2}\,d\sigma - \iint_{\Sigma} \mu\sin\theta\cos\Omega\frac{\sin\varphi}{R^2}\,d\sigma\right]_{M=P_0} =$$
$$= \iint_{\Sigma} \mu\frac{\cos\psi_0}{R^2_{P_0P}}\,d\sigma,$$

где ψ_0 — угол между осью z и вектором $\overrightarrow{P_0P}$.

Замечая, что $\mu_1(P_0)=\mu(P_0)$, находим:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial V}{\partial n_{\text{в}}}\right)_{\text{в}} &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_{\text{в}}}\right)_0 - 2\pi\mu(P_0),\\ \left(\frac{\partial V}{\partial n_{\text{в}}}\right)_{\text{н}} &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_{\text{в}}}\right)_0 + 2\pi\mu(P_0),\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

так как по условию ось z направлена по внутренней нормали. Если ось z направить по внешней нормали, то знак $\cos\psi$ изменяется, и мы получим:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial V}{\partial n_{\text{н}}}\right)_{\text{в}} &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_{\text{н}}}\right)_0 + 2\pi\mu(P_0),\\ \left(\frac{\partial V}{\partial n_{\text{н}}}\right)_{\text{н}} &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_{\text{н}}}\right)_0 - 2\pi\mu(P_0).\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Для случая двух переменных имеют место аналогичные формулы с заменой 2π на π.

10. Применение поверхностных потенциалов к решению краевых задач. Метод разделения переменных и метод функции источника позволяют получить явное выражение для решения краевых задач только в случае областей простейшего вида. Сведение краевых задач для уравнения Лапласа (или Пуассона) ограничена в области $T - K_\varepsilon$ с границей $\Sigma + \Sigma_\varepsilon$, где K_ε — шар радиуса ε с центром в точке M_0 и поверхностью Σ_ε (рис. 45).

Применяя вторую формулу Грина (5) к функциям u и $v = 1/R$ в области $T - K_\varepsilon$, получаем:

$$\iiint\limits_{T-K_\varepsilon} \left(u\Delta \frac{1}{R} - \frac{1}{R}\Delta u\right) d\tau =$$

$$= \iint\limits_{\Sigma} \left(u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma + \iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) d\sigma - \iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n} d\sigma. \quad (6)$$

В правой части этого равенства только последние два интеграла зависят от ε. Вычисляя производную по внешней нормали к области $T - K_\varepsilon$ на Σ_ε, найдем, что

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\Big|_{\Sigma_\varepsilon} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{R}\right)\Big|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2},$$

откуда

$$\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} u\, d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2} 4\pi\varepsilon^2 u^* = 4\pi u^*, \quad (7)$$

где u^* — среднее значение функции $u(M)$ на поверхности Σ_ε. Преобразуем третий интеграл

$$\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{\varepsilon}\iint\limits_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{\varepsilon} 4\pi\varepsilon^2 \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^* = 4\pi\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^*, \quad (8)$$

где $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^*$ — среднее значение нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial n}$ на сфере Σ_ε. Подставляя выражения (7) и (8) в формулу (6) и учитывая, что $\Delta(1/R) = 0$ в $T - K_\varepsilon$, будем иметь:

$$\iiint\limits_{T-K_\varepsilon} \left(-\frac{1}{R}\right)\Delta u\, d\tau = \iint\limits_{\Sigma} \left[u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right] d\sigma + 4\pi u^* - 4\pi\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^*. \quad (9)$$

Устремим теперь радиус ε к нулю. Тогда получим:

1) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u^* = u(M_0)$, так как $u(M)$ — непрерывная функция, а u^* — ее среднее значение по сфере радиуса ε с центром в точке M_0;

2) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} 4\pi\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^* = 0$, так как из непрерывности первых производных функций $u(M)$ внутри T сразу же вытекает ограниченность нормальной производной

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

в окрестности точки M_0;

3) по определению несобственного интеграла

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iiint\limits_{T-K_\varepsilon}\left(-\frac{1}{R}\Delta u\right)d\tau=\iiint\limits_{T}\left(-\frac{1}{R}\Delta u\right)d\tau.$$

В результате указанного предельного перехода $\varepsilon\to 0$ мы приходим к основной интегральной формуле Грина:

$$4\pi u(M_0)=-\iint\limits_{\Sigma}\left[u(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{M_0P}}\right)-\frac{1}{R_{M_0P}}\frac{\partial u}{\partial n}\right]d\sigma_P-\iiint\limits_{T}\frac{\Delta u(P)}{R_{M_0P}}d\tau, \tag{10}$$

где $P=P(\xi,\eta,\zeta)$ — точка с координатами ξ, η, ζ, лежащая на поверхности Σ.

Если точка M_0 находится вне области T, то $v=1/R_{MP}$ непрерывна и гармонична во всех точках области T. Поэтому слева в формуле (10) получим нуль.

Рассмотрим случай, когда M_0 принадлежит поверхности Σ. Предположим, что Σ имеет в M_0 касательную плоскость с непрерывными угловыми коэффициентами. Сфера Σ_ε радиуса ε центром в M_0 пересекает поверхность Σ и делит ее на две части Σ_1 и Σ_2, часть Σ_1 лежит внутри шара K_ε. Формулу Грина (5) применим к u и $v=1/R$ в области $T-T_1$, где T_1 — область, ограниченная Σ_1 и частью сферы Σ_ε', лежащей внутри T. Общая схема рассуждений, приведших к (9), остается неизменной. При этом следует лишь учесть, что интеграл по $\Sigma_1+\Sigma_\varepsilon'$ стремится к $2\pi u(M_0)$, и внести соответствующие изменения в (7), (8) и (8′). В результате мы приходим к формуле, получающейся из (10) при замене 4π на 2π.

Объединяя все случаи, запишем основную формулу Грина в виде

$$\Omega\cdot u(M_0)=$$
$$=\iint\limits_{\Sigma}\left[\frac{1}{R_{M_0P}}\frac{\partial u}{\partial n_P}(P)-u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\frac{1}{R_{M_0P}}\right)\right]d\sigma_P-\iiint\limits_{T}\frac{\Delta u(P)}{R_{M_0P}}d\tau_P, \tag{10′}$$

где Ω принимает значения:

$$\Omega=\begin{cases}4\pi, & \text{если точка } M_0 \text{ лежит внутри } T,\\ 2\pi, & \text{если точка } M_0 \text{ лежит на границе } \Sigma,\\ 0 & \text{если точка } M_0 \text{ лежит вне } T.\end{cases}$$

Отметим, что если точка M_0 является конической вершиной поверхности Σ, то $\Omega=\alpha$, где α — величина телесного угла, образуемого касательными к Σ в точке M_0.

Для гармонической функции $\Delta u = 0$ и формула (10) принимает вид

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{R_{M_0P}} \frac{\partial u}{\partial n_P}(P) - u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{M_0P}} \right) \right] d\sigma_P \qquad (11)$$

(M_0 — внутри T).

Таким образом, значение гармонической функции в любой внутренней точке области выражается через значение этой функции и ее нормальной производной на поверхности области. При этом предполагается непрерывность функции u и ее первых производных вплоть до границы. Отметим сразу же, что каждый из интегралов

$$\iint_{\Sigma} \mu(P) \frac{1}{R_{MP}} d\sigma_P \quad \text{и} \quad \iint_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) \nu(P) \, d\sigma_P, \qquad (12)$$

где μ и ν — непрерывные функции, является гармонической функцией вне поверхности Σ. В самом деле, так как подынтегральные функции и все их производные непрерывны вне поверхности Σ, то производные функций (12) любого порядка можно вычислять при помощи дифференцирования под знаком интеграла. Так как, кроме того, функции

$$\frac{1}{R_{MP}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{R} \right) \cos \alpha_P + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{R} \right) \cos \beta_P + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{R} \right) \cos \gamma_P$$

удовлетворяют уравнению Лапласа по переменным $M(x, y, z)$, то в силу обобщенного принципа суперпозиции (см. лемму на стр. 221), функции (12) также удовлетворяют уравнению Лапласа по переменным x, y, z.

Отсюда вытекает важное следствие: всякая гармоническая функция внутри области гармоничности дифференцируема бесчисленное множество раз [1]). Отметим также, что гармоническая функция аналитична (разлагается в степенной ряд) во всякой точке M_0 области T. В этом можно убедиться с помощью рассуждений, основанных на том же интегральном представлении (11).

Аналогичные формулы имеют место и для гармонических функций двух независимых переменных. Пусть S — некоторая область на плоскости (x, y), ограниченная контуром C, а n —

[1]) Если для функции u, гармонической внутри T, не выполнено условие непрерывности ее вместе с первой производной на поверхности Σ, то теорема все же сохраняет силу, в чем можно убедиться, окружая точку M областью, лежащей вместе со своей границей внутри T.

направление нормали к этому контуру, внешнее по отношению к области S.

Полагая во второй формуле Грина $v=\ln(1/R_{M_0P})$, где $R_{M_0P} = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ — расстояние $P(x, y)$ от фиксированной точки $M_0(x_0, y_0)$, и проводя рассуждения, подобные тем, которые были проведены для трехмерного случая, получим основную формулу Грина на плоскости

$$\Omega u(M_0) = \int\limits_C \left[\ln\frac{1}{R_{M_0P}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\ln\frac{1}{R_{M_0P}}\right)\right] ds_P - \iint\limits_S \Delta u(P)\ln\frac{1}{R_{M_0P}}\, ds_P,$$

где

$$\Omega = \begin{cases} 2\pi, & \text{если } M_0 \text{ лежит внутри } S, \\ \pi, & \text{если } M_0 \text{ лежит на границе } C, \\ 0, & \text{если } M_0 \text{ лежит вне } S. \end{cases}$$

Если $u(M)$ — гармоническая внутри S функция и M_0 лежит внутри S, то

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_C \left[\ln\frac{1}{R_{M_0P}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\left(\ln\frac{1}{R_{M_0P}}\right)\right] ds_P.$$

2. Некоторые основные свойства гармонических функций. Установим несколько важнейших свойств гармонических функций:

1. *Если v — функция, гармоническая в области T, ограниченной поверхностью Σ, то*

$$\iint\limits_S \frac{\partial v}{\partial n}\, d\sigma = 0, \tag{13}$$

где S — любая замкнутая поверхность, целиком лежащая в области T.

В самом деле, подставляя в первую формулу Грина (3′) какую-либо гармоническую функцию $v\,(\Delta v = 0)$ и функцию $u \equiv 1$, сразу же получим формулу (13). Из формулы (13) следует, что вторая краевая задача $\left(\Delta u = 0 \text{ в } T,\ \frac{\partial u}{\partial n} = f\Big|_\Sigma\right)$ может иметь решение только при условии

$$\iint\limits_\Sigma f\, d\sigma = 0.$$

Это свойство гармонических функций можно интерпретировать как условие отсутствия источников внутри области T.

2. *Если функция $u(M)$ гармонична в некоторой области T, а M_0 — какая-нибудь точка, лежащая внутри области T, то имеет место формула*

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma_a} u \, d\sigma, \tag{14}$$

где Σ_a — сфера радиуса a с центром в точке M_0, целиком лежащая в области T (теорема среднего значения).

Эта теорема утверждает, что значение гармонической функции в некоторой точке M_0 равно среднему значению этой функции на любой сфере Σ_a с центром в M_0, если сфера Σ_a не выходит из области гармоничности функции $u(M)$.

Применим формулу (11) к шару K_a с центром в точке M_0 и поверхностью Σ_a:

$$4\pi u(M_0) = -\iint_{\Sigma_a} \left[u \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma.$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{a} \text{ на } \Sigma_a \text{ и } \iint_{\Sigma_a} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0, \quad \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\Bigg|_{\Sigma_a} = \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\right)\Bigg|_{R=a} = -\frac{1}{a^2}$$

(направление внешней нормали к Σ_a совпадает с направлением радиуса), сразу же получаем (14) [1]).

Записывая (14) в виде

$$4\pi\rho^2 u(M_0) = \iint_{\Sigma_\rho} u(P) \, d\sigma_P$$

и интегрируя по ρ от 0 до a, получаем:

$$u(M_0) = \frac{1}{V_a} \iiint_{K_a} u \, d\tau_P, \qquad V_a = \frac{4\pi}{3} a^3,$$

т. е. $u(M_0)$ есть среднее по объему шара K_a с границей Σ_a.

[1]) При доказательстве этой теоремы мы пользовались равенством (13), предполагающим существование производных на поверхности сферы. Если функция $u(M)$, непрерывная в замкнутой области $T + \Sigma$, удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ только для внутренних точек T, то предшествующее заключение для сферы Σ_{a_0}, касающейся Σ, было бы необоснованным. Однако теорема верна для любого $a < a_0$, и, переходя к пределу при $a \to a_0$, получаем:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a_0^2} \iint_{\Sigma_{a_0}} u(M) \, d\sigma.$$

Для случая двух независимых переменых имеет место аналогичная теорема о среднем значении:

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi a} \int\limits_{C_a} u\, ds, \tag{15}$$

где C_a — окружность радиуса a с центром в точке M_0, лежащая в области гармоничности u.

3. *Если функция $u(M)$, определенная и непрерывная в замкнутой области $T + \Sigma$, удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ внутри T, то максимальные и минимальные значения функции $u(M)$ достигаются на поверхности* Σ (принцип максимального значения).

Допустим, что функция $u(M)$ достигает максимального значения в некоторой внутренней точке M_0 области T, так что $u_0 = u(M_0) \geqslant u(M)$, где M — любая точка области T. Окружим точку M_0 сферой Σ_ρ радиуса ρ, целиком лежащей внутри области T. Поскольку, по предположению, $u(M_0)$ есть наибольшее значение функции $u(M)$ в $T + \Sigma$, то $u|_\Sigma \leqslant u(M_0)$. Пользуясь формулой среднего значения (14) и заменяя под интегралом всюду $u(M)$ значением $u(M_0)$, получим:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint\limits_{\Sigma_\rho} u(M)\, d\sigma_M \leqslant \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint\limits_{\Sigma_\rho} u(M_0)\, d\sigma = u(M_0). \tag{16}$$

Если предположить, что хотя бы в одной точке M сферы Σ_ρ $u(M) < u(M_0)$, то очевидно, что вместо знака $\leqslant$ будем иметь знак $<$, что приводит к противоречию. Таким образом, на всей поверхности Σ_ρ $u(M) \equiv u(M_0)$.

Если ρ_0^m — минимальное расстояние от M_0 до поверхности Σ, то $u(M) \equiv u(M_0)$ для всех точек, лежащих внутри $\Sigma_{\rho_0^m}$. Отсюда следует, что в точках M^*, принадлежащих общей части $\Sigma_{\rho_0^m}$ и Σ, по непрерывности $u(M^*) = u(M_0)$. Это и доказывает теорему, поскольку мы убедились, что максимальное значение $u(M_0)$ достигается в точках границы M^*.

Нетрудно убедиться, что если область T связная и максимальное значение достигается хотя бы в одной внутренней точке M_0, то $u(M) \equiv u(M_0)$ во всей области. Пусть $M^{(0)}$ — какая-либо другая точка области T. Соединим точку $M^{(0)}$ с точкой M_0 ломаной линией L (рис. 46), длину которой обозначим l. Пусть M_1 есть последняя точка выхода линии L из $\Sigma_{\rho_0^m}$. В этой точке $u(M_1) = u(M_0)$. Опишем из этой точки сферу $\Sigma_{\rho_0^m}$ радиуса ρ_1^m, касающуюся Σ, и пусть M_2 — последняя точка выхода L из

$\Sigma_{\rho_1^m}$; в этой точке $u(M_2) = u(M_0)$. Продолжая этот процесс далее, получим, что не более чем через $p = l/\rho^{(m)}$ шагов, где $\rho^{(m)}$ — минимальное расстояние L до Σ, одна из этих сфер захватит точку $M^{(0)}$, откуда следует, что $u(M^{(0)}) = u(M_0)$. В силу произвольности $M^{(0)}$ и непрерывности $u(M)$ в замкнутой области $T+\Sigma$, заключаем, что $u(M) \equiv u(M_0)$ всюду, включая точки границы. Таким образом, из всех гармонических функций только постоянная может достигать своего максимального значения во внутренних точках области.

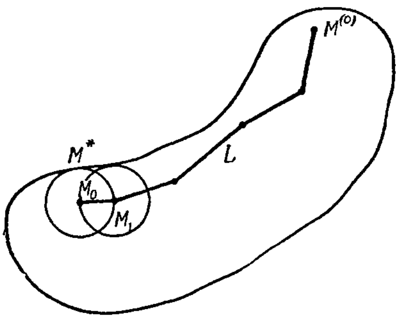

Рис. 46.

Аналогичную теорему можно доказать и относительно минимального значения.

Следствие 1. Если функции u и U непрерывны в области $T+\Sigma$, гармоничны в T и если

$$u \leqslant U \text{ на } \Sigma,$$

то и

$$u \leqslant U \text{ всюду внутри } T.$$

В самом деле, функция $U-u$ непрерывна в $T+\Sigma$, гармонична в T и

$$U-u \geqslant 0 \text{ на } \Sigma.$$

В силу принципа максимального значения

$$U-u \geqslant 0 \text{ всюду внутри } T,$$

откуда и следует наше утверждение.

Следствие 2. Если функции u и U непрерывны в области $T+\Sigma$, гармоничны в T и если

$$|u| \leqslant U \text{ на } \Sigma,$$

то

$$|u| \leqslant U \text{ всюду внутри } T.$$

Из условий теоремы следует, что три гармонические функции — U, u и U удовлетворяют условиям

$$-U \leqslant u \leqslant U \text{ на } \Sigma.$$

Применяя дважды следствие 1, получим, что

$$-U \leqslant u \leqslant U \text{ всюду внутри } T$$

или

$$|u| \leqslant U \text{ внутри } T.$$

Следствие 3. Для гармонической в T и непрерывной в $T+\Sigma$ функции $u(M)$ выполняется неравенство $|u| \leqslant \max|u|\,|_\Sigma$ всюду в $T+\Sigma$. Для доказательства положим $U = \max|u|\,|_\Sigma$ и воспользуемся следствием 2.

Хотя изложение проводилось для трех измерений, однако все результаты переносятся на случай гармонических функций любого числа переменных.

3. Единственность и устойчивость первой краевой задачи. Пусть дана область T, ограниченная замкнутой поверхностью Σ, на которой задана некоторая функция f. В простейшем случае, когда граничная функция f непрерывна, первая внутренняя краевая задача (внутренняя задача Дирихле) для уравнения Лапласа обычно ставится следующим образом.

Требуется найти функцию u, которая:

а) *определена и непрерывна в замкнутой области* $T+\Sigma$, *включая границу*;

б) *удовлетворяет внутри области T уравнению* $\Delta u = 0$;

в) *принимает на границе Σ заданные значения f.*

В условии а) предполагается гармоничность функции внутри области T. Требование гармоничности на границе является излишним, так как оно повлекло бы за собой дополнительные ограничения для граничных значений.

Условие непрерывности u в замкнутой области (или какое-либо другое условие, разъясняющее смысл того, что функция u принимает на границе заданные значения) необходимо для единственности. Если отказаться от этого условия, то любую функцию, *равную постоянной C внутри T и заданной функции f на* Σ, можно рассматривать как решение задачи, поскольку она удовлетворяет условиям б), в).

Докажем теорему единственности:

первая внутренняя краевая задача для уравнения Лапласа не может иметь двух различных решений.

Допустим, что существуют две различные функции, u_1 и u_2, являющиеся решениями задачи, т. е. функции, непрерывные в замкнутой области $T+\Sigma$, удовлетворяющие внутри области уравнению Лапласа и на поверхности Σ принимающие одно и то же значение f. Разность этих функций $u = u_1 - u_2$ обладает следующими свойствами:

1) $\Delta u = 0$ внутри области T;

2) u непрерывна в замкнутой области $T+\Sigma$;

3) $u|_\Sigma = 0$.

Функция $u(M)$, таким образом, непрерывна и гармонична в области T и равна нулю на границе. Как известно, всякая непрерывная функция в замкнутой области достигает своего максимального значения. Убедимся в том, что $u \equiv 0$. Если функция $u \not\equiv 0$ и хотя бы в одной точке $u > 0$, то она должна достигать положительного максимального значения внутри области, что невозможно. Совершенно так же доказывается, что функция u не может принимать нигде внутри T отрицательных значений. Отсюда следует, что

$$u \equiv 0.$$

Перейдем к доказательству *непрерывной зависимости решения первой краевой задачи от граничных данных.* Напомним, что задача называется физически определенной, если малому изменению условий, определяющих решение задачи, в данном случае граничных условий, соответствует малое изменение самого решения.

Пусть u_1 и u_2 — непрерывные в $T+\Sigma$ и гармонические внутри T функции, для которых $|u_1-u_2| \leqslant \varepsilon$ на Σ. Тогда это же неравенство выполняется внутри T.

Это утверждение непосредственно вытекает из следствия 2, стр. 296, в силу того, что $U \equiv \varepsilon$ является гармонической функцией.

Таким образом, мы доказали непрерывную зависимость решения от граничных условий и единственность первой внутренней задачи.

4. Задачи с разрывными граничными условиями. Часто встречается также первая краевая задача с разрывными граничными условиями. Функция, непрерывная в замкнутой области, не может быть решением этой задачи. Поэтому требуется уточнить постановку первой краевой задачи применительно к рассматриваемому случаю.

Пусть на кривой C, ограничивающей область S, на плоскости (x, y) задана кусочно-непрерывная функция $f(P)$. Требуется найти функцию $u(M)$: 1) гармоническую внутри области S; 2) непрерывно примыкающую к граничным значениям в точках непрерывности последних; 3) ограниченную в замкнутой области $S+C$.

Заметим, что дополнительное требование ограниченности фактически относится к окрестностям точек разрыва функции $f(P)$.

Докажем следующую теорему:

решение первой краевой задачи с кусочно-непрерывными граничными значениями единственно.

Пусть u_1 и u_2 — два решения поставленной задачи. Разность

$$v = u_1 - u_2$$

1) является гармонической функцией внутри S;

2) непрерывно примыкает к нулевым граничным значениям на границе, за исключением точек разрыва $f(P)$, в которых она может претерпевать разрыв;

3) ограничена в $S+C$: $|v|<A$.

Построим гармоническую функцию

$$U(M)=\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{D}{r_i},$$

где ε — произвольное положительное число, D — диаметр области, r_i — расстояние от рассматриваемой точки M до i-й точки разрыва P_i. Функция $U(M)$ положительна, так как все слагаемые больше нуля.

Построим в каждой точке разрыва P_i круг K_i радиуса δ, выбрав δ так, чтобы каждое слагаемое

$$\varepsilon\ln\frac{D}{r_i}$$

на соответствующей окружности C_i превосходило A, т. е. чтобы $\varepsilon\ln\frac{D}{\delta}\geqslant A$. Функция v непрерывна в замкнутой области $S-\sum\limits_{i=1}^{n}K_i=S'$ и $|v|\leqslant U$ на границе этой области.

Поэтому в силу принципа максимума U является мажорантой функции v:

$$|v(M)|\leqslant U(M).$$

Фиксировав произвольную точку M из области S и устремляя $\varepsilon\to 0$, получим:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}U(M)=0;$$

следовательно,

$$v(M)=0,$$

так как v не зависит от ε, или

$$u_1\equiv u_2,$$

что и требовалось доказать.

5. Изолированные особые точки. Рассмотрим особые точки гармонической функции. Пусть P — изолированная особая точка, лежащая внутри области гармоничности функции u. Представляются возможными два случая:

1) гармоническая функция ограничена в окрестности точки P;

2) гармоническая функция не ограничена в окрестности точки P. С особыми точками второго рода мы уже встречались (например, $\ln(1/r)$). Следующая теорема показывает, что первый тип особых точек не может быть осуществлен.

Если ограниченная функция $u(M)$ является гармонической внутри области S, за исключением точки P, то можно так *определить значение $u(P)$, чтобы функция $u(M)$ была гармонической всюду внутри S.*

Возьмем круг K_α радиуса α с центром в точке P, целиком лежащий внутри S, и рассмотрим внутри него гармоническую функцию v, совпадающую с функцией u на окружности C_α круга K_α [1]).

Составим разность

$$w = u - v,$$

которая

1) гармонична всюду внутри K_α, кроме точки P, в которой w не определена,

2) непрерывно примыкает к нулевым граничным условиям на C_α,

3) ограничена в замкнутой области $K_\alpha + C_\alpha$ $(|w| < A)$.

Так же как и при доказательстве предыдущей теоремы (п. 4), построим неотрицательную гармоническую функцию

$$U(M) = \varepsilon \ln \frac{\alpha}{r}.$$

Здесь ε — произвольное положительное число, α — радиус круга K_α, r — расстояние от рассматриваемой точки M до точки разрыва P.

Построим круг K_δ с центром в точке P, выбрав его радиус δ так, чтобы на его окружности значение U превосходило A, и рассмотрим область $K_\alpha - K_\delta$. Функция w непрерывна в замкнутой области $\delta \leqslant r \leqslant \alpha$ и на границе этой области имеет место неравенство $|w| \leqslant U$. В силу принципа максимального значения неотрицательная функция U является мажорантой функции w

$$|w| \leqslant U(M) \quad \text{для} \quad \delta \leqslant r \leqslant \alpha.$$

Фиксируя произвольную точку M области K_α, не совпадающую с P, и совершая предельный переход при $\varepsilon \to 0$, получим:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} U(M) = 0,$$

следовательно, всюду, за исключением, быть может, точки P:

$$w = 0.$$

Таким образом, функция u всюду в области S, за исключением точки P, совпадает с функцией v. Полагая $u(P) = v(P)$, мы получим функцию $u \equiv v$, гармоническую всюду внутри области S. Тем самым теорема доказана.

---

[1]) Существование такой функции будет установлено в § 3, причем построение ее не базируется на доказываемой теореме.

Аналогично проводится доказательство теоремы для случая трех измерений, где в качестве мажорантной функции может быть взята функция $U(M) = \varepsilon\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)$.

При доказательстве теоремы этого пункта мы предполагали, что функция u ограничена в окрестности точки P. Однако те же рассуждения остаются в силе, если предположить, что функция u в окрестности точки P удовлетворяет неравенству

$$|u(M)| < \varepsilon(r) \log \frac{1}{r_{PM}}, \tag{17}$$

где $\varepsilon(r)$ — произвольная функция, стремящаяся к нулю при $r \to 0$, т. е. в окрестности точки P функция $u(M)$ растет медленнее, чем $\log(1/r_{PM})$.

Итак, *если функция $u(M)$ является гармонической функцией внутри области S, за исключением точки P, в окрестности которой она растет медленнее, чем $\log(1/r_{MP})$ при $M \to P$, то эта функция является ограниченной в окрестности точки P, и можно так определить значение $u(P)$, что функция u будет гармонической во всей области S.*

Аналогично в случае трех независимых переменных: *если гармоническая функция $u(M)$ в окрестности изолированной особой точки P растет медленнее, чем $1/r$,*

$$|u(M)| < \varepsilon(r) \frac{1}{r_{MP}} \begin{pmatrix} \varepsilon(r) \to 0 \\ r \to 0 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

то она ограничена в окрестности этой точки, и можно так определить значение $u(P)$, чтобы функция $u(M)$ была гармонична и в самой точке P.

6. Регулярность гармонической функции трех переменных в бесконечности. Гармоническая функция трех переменных $u(x, y, z)$ называется регулярной в бесконечности, если

$$|u| < \frac{A}{r} \quad \text{и} \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < \frac{A}{r^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| < \frac{A}{r^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| < \frac{A}{r^2} \tag{19}$$

при достаточно большом $r \geqslant r_0$.

Докажем, что если функция $u(x, y, z)$ гармонична вне некоторой замкнутой поверхности Σ и равномерно стремится к нулю на бесконечности, то она регулярна на бесконечности.

Условие равномерного стремления к нулю на бесконечности означает, что существует такая функция $\varepsilon^*(r)$, что

$$|u(M)| < \varepsilon^*(r) \quad (\varepsilon^*(r) \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty), \tag{20}$$

где r — радиус-вектор точки M.

Совершая преобразование Кельвина

$$v(r', \theta, \varphi) = ru(r, \theta, \varphi),$$

где

$$r' = \frac{1}{r},$$

получим, что функция v гармонична всюду внутри поверхности Σ', в которую переходит поверхность Σ при преобразовании обратных радиус-векторов, за исключением начала координат, где она имеет изолированную особую точку.

Из условия (20) следует, что в окрестности начала координат для функции v имеет место неравенство

$$|v(r', \theta, \varphi)| \leqslant \varepsilon^*\left(\frac{1}{r'}\right)\frac{1}{r'} = \varepsilon(r')\frac{1}{r'},$$

где

$$\varepsilon(r') = \varepsilon^*\left(\frac{1}{r'}\right) \to 0 \quad \text{при} \quad r' \to 0.$$

На основании последней теоремы п. 5 функция $v(r', \theta, \varphi)$ ограничена и гармонична при $r' \leqslant r_0'$:

$$|v(r', \theta, \varphi)| \leqslant A \quad \text{при} \quad r' \leqslant r_0', \tag{21}$$

откуда и следует, что

$$|u(r, \theta, \varphi)| = \frac{|v(r', \theta, \varphi)|}{r} \leqslant \frac{A}{r} \quad \text{при} \quad r \geqslant r_0 = \frac{1}{r_0'}.$$

В силу гармоничности функции v при $r' = 0$ можно написать:

$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r} \cdot v(x', y', z')\right) =$$
$$= -\frac{x}{r^3} \cdot v + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial v}{\partial x'} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y'} \cdot \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z'} \cdot \frac{\partial z'}{\partial x}\right], \tag{22}$$

где

$$x' = \frac{x}{r} r', \qquad y' = \frac{y}{r} r', \qquad z' = \frac{z}{r} r'.$$

Отсюда, вычисляя производные $\frac{\partial x'}{\partial x}$, $\frac{\partial y'}{\partial x}$, $\frac{\partial z'}{\partial x}$ и принимая во внимание ограниченность первых производных функции v в окрестности точки $r' = 0$, получаем:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant \frac{A}{r^2} \quad \text{при} \quad r \to \infty.$$

Аналогичные оценки имеют место для производных $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$.

7. Внешние краевые задачи. Единственность решения для двух- и трехмерных задач. Внешние краевые задачи по-разному ставятся для трех и двух независимых переменных.

Рассмотрим сначала случай трех переменных. Пусть T — область, внешняя к некоторой замкнутой поверхности Σ.

Первая внешняя краевая задача (внешняя задача Дирихле) состоит в следующем:

требуется найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую условиям:

1) $\Delta u = 0$ *в неограниченной области* T;

2) u *всюду непрерывна, включая поверхность* Σ;

3) $u|_\Sigma = f(x, y, z)$, *где* f — *функция, заданная на поверхности* Σ;

4) $u(M)$ *равномерно стремится к* 0 *на бесконечности:* $u(M) \to 0$ *при* $M \to \infty$.

Последнее условие является существенным для единственности решения, в чем легко убедиться на простом примере. Пусть требуется решить внешнюю первую краевую задачу для сферы S_R радиуса R с постоянным граничным условием

$$u|_{S_R} = \text{const} = f_0.$$

Опуская условие 4), видим, что решениями задачи могут служить функции $u_1 = f_0$ и $u_2 = f_0 \frac{R}{r}$, а также любая функция

$$u = \alpha u_1 + \beta u_2, \quad \text{где} \quad \alpha + \beta = 1.$$

Докажем, что

внешняя первая краевая задача для гармонических функций с тремя независимыми переменными имеет единственное решение. Предполагая существование двух решений u_1 и u_2, удовлетворяющих условиям 1) — 4), видим, что их разность $u = u_1 - u_2$ представляет собой решение задачи с нулевыми граничными условиями. Поскольку условие 4) выполнено также для функции u, то для произвольного $\varepsilon > 0$ можно указать такое R^*, что

$$|u(M)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad r \geqslant R^*.$$

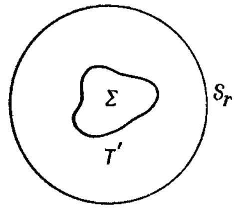

Рис. 47.

Если точка $\overline{M}$ лежит внутри области T' (рис. 47), заключенной между поверхностью Σ и сферой S_r $(r \geqslant R^*)$, то $u(\overline{M}) < \varepsilon$, как то следует из принципа максимального значения, примененного к области T'. В силу произвольности ε заключаем, что $u \equiv 0$ в области T', а также и во всей области T, что и доказывает единственность решения внешней первой краевой задачи в пространстве.

Первая внешняя задача на плоскости ставится следующим образом:

требуется найти функцию u, удовлетворяющую условиям:

1) $\Delta u = 0$ *в рассматриваемой бесконечной области* Σ, *ограниченной контуром* C;

2) *функция* u *всюду непрерывна, включая* C;

3) $u|_C = f(x, y)$, *где* f — *функция, заданная на* C;

4) $u(M)$ *ограничена в бесконечности, т. е. существует такое число* N, *что* $|u(M)| \leqslant N$.

Требование обращения решения в нуль на бесконечности и здесь оказывается достаточным, чтобы доказать, что двух разных решений быть не может, но оно является слишком сильным, так как при нем задача может оказаться вообще неразрешимой.

Докажем, что

внешняя первая краевая задача для функций двух переменных имеет единственное решение.

Допуская существование двух различных решений u_1 и u_2 и рассматривая их разность $u = u_1 - u_2$, являющуюся решением первой краевой задачи с нулевыми граничными условиями, будем в силу условия 4) иметь

$$|u| \leqslant N = N_1 + N_2,$$

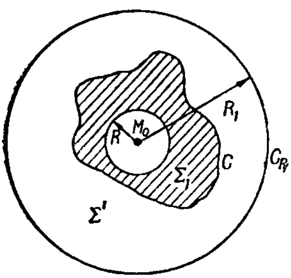

Рис. 48.

где N_1 и N_2 таковы, что $|u_1| \leqslant N_1$, $|u_2| \leqslant N_2$. Обозначим через Σ_1 область, лежащую внутри C и являющуюся дополнением к области Σ, так что $\Sigma + \Sigma_1$ есть вся плоскость. Возьмем точку M_0 внутри Σ_1 и окружность радиуса R с центром в точке M_0, лежащую внутри Σ_1 (рис. 48). Гармоническая функция $\ln(1/R_{MM_0})$ не имеет особенностей в области Σ; функция $\ln(R_{MM_0}/R)$ положительна во всей области Σ, включая C. Пусть C_{R_1} — окружность радиуса R_1 с центром в M_0, содержащая целиком контур C, и Σ' — область, ограниченная кривыми C и C_{R_1}. Функция u_{R_1}, определяемая равенством

$$u_{R_1} = N \frac{\ln(R_{MM_0}/R)}{\ln(R_1/R)}, \tag{23}$$

есть гармоническая функция, равная N на окружности радиуса R_1, положительная на C; из принципа максимального значения следует, что u_{R_1} является мажорантой для модуля функции $u(M)$ в области Σ;

$$|u(M)| < u_{R_1}(M).$$

Фиксируем точку M и будем неограниченно увеличивать R_1. Очевидно, что $u_{R_1}(M) \to 0$ при $R_1 \to \infty$. Отсюда следует, что

$$u(M) = 0.$$

Тем самым, в силу произвольности M, единственность решения поставленной задачи доказана. Единственность решения этой задачи можно также доказать, пользуясь преобразованием обратных радиусов-векторов, переводящим область, внешнюю к контуру C, в область, внутреннюю к контуру C', в который переходит контур C.

При этом бесконечно удаленная точка перейдет в изолированную особую точку, в окрестности которой функция v ограничена. Из теоремы п. 5 будет вытекать гармоничность функции v в начале координат, а тем самым и единственность решения.

Из приведенных рассуждений следует, что гармоническая функция двух переменных $u(M)$, ограниченная в бесконечности, стремится к определенному пределу при M, стремящейся к бесконечности.

Различие в постановке первой краевой внешней задачи для двух и трех переменных можно пояснить на следующем физическом примере. Пусть дан шар радиуса R, на поверхности которого поддерживается постоянная температура u_0, и требуется определить стационарное распределение температуры во внешнем пространстве. Функция $u = u_0(R/r)$ представляет решение этой задачи, обращающееся в нуль на бесконечности.

Рассмотрим теперь двумерную задачу, и пусть на окружности радиуса R задано постоянное граничное значение

$$u|_\Sigma = f_0 = \text{const}.$$

В этом случае $u \equiv f_0$ есть единственное ограниченное решение задачи и никакого решения, обращающегося в нуль на бесконечности, не существует. Мы уже встречались с существенно различным характером поведения гармонических функций в бесконечности для двух и трех независимых переменных (например, поведение $1/r$ и $\ln 1/r$ на бесконечности).

Для пространственной и плоской неограниченных областей имеет место принцип максимального значения. В этом нетрудно убедиться с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые были использованы при доказательстве теорем единственности. Отсюда, в свою очередь, вытекает непрерывная зависимость решения от граничных условий.

8. Вторая краевая задача. Теорема единственности. Решением второй краевой задачи будем называть функцию u, непрерывную в области $T + \Sigma$ и удовлетворяющую на поверхности Σ условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Sigma = f(M).$$

Докажем, что *решение второй внутренней краевой задачи (внутренней задачи Неймана) определяется с точностью до произвольной постоянной.*

Доказательство проведем при дополнительном предположении, что функция u имеет непрерывные первые производные в области $T+\Sigma$ [1]).

Пусть u_1 и u_2 — две непрерывно дифференцируемые в $T+$ $+\Sigma$ функции, удовлетворяющие уравнению $\Delta u = 0$ в T и условию $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Sigma = f(M)$ на Σ. Для функции $u = u_1 - u_2$ будем иметь:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Sigma = 0.$$

Полагая в первой формуле Грина (3) $v = u$ и учитывая соотношения $\Delta u = 0$ и $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Sigma = 0$, получаем:

$$\iiint_T \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] d\tau = 0.$$

Отсюда в силу непрерывности функции u и ее первых производных следует:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} \equiv 0, \text{ т. е. } u \equiv \text{const},$$

что и требовалось доказать.

Изложенный здесь метод доказательства применим и в случае неограниченной области для функций, удовлетворяющих требованиям регулярности на бесконечности.

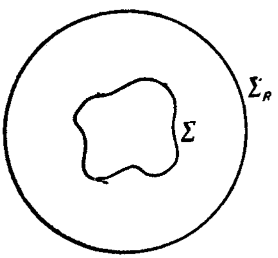

Рис. 49.

Покажем, что в случае неограниченной области, внешней к замкнутой поверхности, формула Грина (3) применима для функций, регулярных на бесконечности.

Рассмотрим область T, внешнюю к замкнутой поверхности. Проведем сферу Σ_R столь большого радиуса, чтобы Σ лежала внутри Σ_R. Обозначим T_R область, ограниченную Σ и Σ_R (рис. 49). Применяя в области T_R формулу Грина к двум функциям, u и v, регулярным в

[1]) Предположение относительно непрерывности первых производных в $T+\Sigma$ сделано для упрощения доказательства. Доказательство единственности при наиболее общих предположениях было дано М. В. Келдышем и М. А. Лаврентьевым (ДАН СССР, т. XVI, 1937); см. также В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. IV, Физматгиз, 1958.

бесконечности, получим:

$$\iiint_{T_R} u\,\Delta v\,d\tau = -\iiint_{T_R} \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right] d\tau + \iint_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma + \iint_{\Sigma_R} u\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma. \tag{24}$$

Оценим интеграл по Σ_R, используя при этом свойство регулярности функций u и v:

$$\left|\iint_{\Sigma_R} u\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma\right| = \left|\iint_{\Sigma_R} u\,(v_x\cos\alpha + v_y\cos\beta + v_z\cos\gamma)\,d\sigma\right| \leqslant \left|\iint_{\Sigma_R} \frac{A}{R}\cdot\frac{3A}{R^2}\,d\sigma\right| \leqslant \frac{3A^2}{R^3}\,4\pi R^2 = \frac{12\pi A^2}{R}.$$

Отсюда видно, что

$$\lim_{R\to\infty}\iint_{\Sigma_R} u\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma = 0.$$

Стоящий справа в (24) интеграл по T_R стремится к интегралу по всей области T при $R\to\infty$. Этот интеграл существует, так как подынтегральное выражение в силу регулярности u и v исчезает на бесконечности как $1/R^4$. Следовательно, существует предел

$$\lim_{R\to\infty}\iiint_{T_R} u\,\Delta v\,d\tau = \iiint_{T} u\,\Delta v\,d\tau.$$

В результате мы приходим к формуле

$$\iiint_{T} u\,\Delta v\,d\tau = -\iiint_{T} \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right] d\tau + \iint_{\Sigma} u\frac{\partial v}{\partial n}\,d\sigma. \tag{25}$$

Тем самым установлена применимость первой, а следовательно, и второй формул Грина для неограниченных областей к функциям, регулярным на бесконечности.

Покажем теперь, что *вторая внешняя краевая задача* (*внешняя задача Неймана*) *имеет единственное решение, регулярное на бесконечности.*

Полагая в формуле (25) $v = u = u_1 - u_2$ и учитывая, что $\Delta u = 0$ и $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Sigma = 0$, получим:

$$\iiint\limits_T (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\, d\tau = 0.$$

Отсюда в силу непрерывности производных функции u следует, что

$$u_x = 0, \quad u_y = 0, \quad u_z = 0 \text{ и } u \equiv \mathrm{const}.$$

Так как $u = 0$ на бесконечности, то

$$u \equiv 0, \quad \text{т. е.} \quad u_1 \equiv u_2,$$

что и требовалось доказать.

Естественно возникает вопрос: можно ли доказать этим же методом единственность первой краевой задачи?

Пусть u_1 и u_2 — различные решения первой краевой задачи (внутренней). Применим формулу (3) к функциям $u = u_1 - u_2$ и $v = u$ в области T, ограниченной поверхностью Σ:

$$\iiint\limits_T u \Delta u\, d\tau = -\iiint\limits_T (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\, d\tau + \iint\limits_\Sigma u \frac{\partial u}{\partial n}\, d\sigma.$$

Отсюда, принимая во внимание условия

$$\Delta u = 0, \quad u|_\Sigma = 0,$$

получаем

$$\iiint\limits_T (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)\, d\tau = 0$$

и, следовательно,

$$u_x = u_y = u_z = 0 \text{ и } u = \mathrm{const}.$$

На поверхности Σ функция u равна нулю, поэтому мы можем утверждать, что

$$u \equiv 0 \text{ и } u_1 \equiv u_2.$$

Однако это доказательство некорректно, поскольку в процессе доказательства мы предполагали существование производных искомой функции на поверхности Σ, что самой постановкой задачи не предусматривается. Доказательство единственности, основанное на принципе максимального значения, свободно от этого недостатка.