§ 3. Решение краевых задач для простейших областей методом разделения переменных

Решение краевых задач для уравнений Лапласа может быть найдено методом разделения переменных в случае некоторых простейших областей (круг, прямоугольник, шар и цилиндр и др.). Получающиеся при этом задачи на собственные значения (задачи Штурма — Лиувилля) приводят к различным классам специальных функций. В этом параграфе мы рассмотрим задачи Дирихле (внутреннюю и внешнюю), при решении которых используются только тригонометрические функции. Позже, при изучении специальных функций, будут рассмотрены задачи Дирихле для сферы и цилиндра.

1. Первая краевая задача для круга. Решим первую краевую задачу для круга:

найти функцию u, удовлетворяющую уравнению:

$$\Delta u = 0 \quad \textit{внутри круга} \tag{1}$$

и граничному условию

$$u = f \quad \textit{на границе круга,} \tag{2}$$

где f — заданная функция.

Мы предположим сначала, что функция f непрерывна и дифференцируема и решение $u(M)$ непрерывно в замкнутой области; в дальнейшем мы освободимся от условия дифференцируемости и даже непрерывности функции f (ср. п. 4 § 2). Наряду с внутренней краевой задачей мы будем рассматривать также внешнюю краевую задачу (см. § 2, п. 7).

Введем полярную систему координат (ρ, φ) с началом в центре круга. Уравнение (1) в полярных координатах имеет вид

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0 \tag{3}$$

(см. формулу (34) § 1). Будем решать задачу методом разделения переменных, т. е. будем искать частное решение уравнения (1), вида

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi) \not\equiv 0.$$

Подставляя предполагаемую форму решения в уравнение (3), получим

$$\frac{\dfrac{d}{d\rho}\left(\rho\dfrac{dR}{d\rho}\right)}{\dfrac{R}{\rho}} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda,$$

где $\lambda = \text{const}$. Отсюда получаем два уравнения:

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \quad \Phi \not\equiv 0, \tag{4}$$

$$\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) - \lambda R = 0, \quad R \not\equiv 0. \tag{5}$$

Первое из этих уравнений дает:

$$\Phi(\varphi) = A\cos\sqrt{\lambda}\,\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\,\varphi.$$

Заметим, что при изменении угла φ на величину 2π однозначная функция $u(\rho, \varphi)$ должна вернуться к исходному значению

$$u(\rho, \varphi + 2\pi) = u(\rho, \varphi) \text{ (условие периодичности).}$$

Отсюда следует, что $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$, т. е. $\Phi(\varphi)$ является периодической функцией угла φ с периодом 2π. Это возможно только, если $\sqrt{\lambda} = n$, где n — целое число, и

$$\Phi_n(\varphi) = A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi.$$

Функцию $R(\rho)$ будем искать в виде $R(\rho) = \rho^{\mu}$. Подставляя в уравнение (5) и сокращая на ρ^{μ}, найдем:

$$n^2 = \mu^2 \text{ или } \mu = \pm n \quad (n > 0).$$

Следовательно,

$$R(\rho) = C\rho^n + D\rho^{-n},$$

где C и D — постоянные.

Для решения внутренней задачи надо положить $R = C\rho^n$ $(\mu = n)$, так как, если $D \neq 0$, то функция $u = R(\rho)\Phi(\varphi)$ обращается в бесконечность при $\rho = 0$ и не является гармонической функцией внутри круга. Для решения внешней задачи, наоборот, надо брать $R = D\rho^{-n}$ $(\mu = -n)$, так как решение внешней задачи должно быть ограничено в бесконечности.

Итак, частные решения нашей задачи найдены[1]):

$$u_n(\rho, \varphi) = \rho^n(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi) \quad \text{для} \quad \rho \leqslant a,$$

$$u_n(\rho, \varphi) = \frac{1}{\rho^n}(A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi) \quad \text{для} \quad \rho \geqslant a.$$

[1]) Выражение оператора Лапласа в полярной системе координат (3) при $\rho = 0$ теряет смысл. Докажем, что $\Delta u_n = 0$ также при $\rho = 0$. Для доказательства этого мы уже не можем пользоваться полярной системой координат.

Перейдем к декартовой системе координат; частные решения

$$\rho^n\cos n\varphi \text{ и } \rho^n\sin n\varphi,$$

будучи действительной и мнимой частями функции

$$\rho^n e^{in\varphi} = (\rho e^{i\varphi})^n = (x + iy)^n,$$

являются многочленами по x и y. Очевидно, что многочлен, удовлетворяющий уравнению $\Delta u = 0$ при $\rho > 0$, в силу непрерывности вторых производных удовлетворяет также этому уравнению при $\rho = 0$.

Суммы этих решений

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \text{ для внутренней задачи,}$$

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \text{ для внешней задачи}$$

при достаточно хорошей сходимости также будут гармоническими функциями.

Для определения коэффициентов A_n и B_n используем граничное условие

$$u(a, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = f. \qquad (6)$$

Считая, что f задана как функция угла φ, возьмем ее разложение в ряд Фурье

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi), \qquad (7)$$

где

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\, d\psi,$$

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cos n\psi\, d\psi \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sin n\psi\, d\psi \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Сравнивая ряды (6) и (7), получаем:

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad A_n = \frac{\alpha_n}{a^n}, \quad B_n = \frac{\beta_n}{a^n} \text{ для внутренней задачи,}$$

$$A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, \quad A_n = \alpha_n a^n, \quad B_n = a^n \beta_n \text{ для внешней задачи.}$$

Таким образом, мы получили формальное решение первой внутренней задачи для круга в виде ряда

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi), \qquad (8)$$

а решение внешней задачи в виде

$$u(\rho, \varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\rho}\right)^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi). \qquad (9)$$

Чтобы убедиться в том, что полученные функции действительно являются искомыми решениями, нужно убедиться в применимости принципа суперпозиции, для чего надо доказать сходимость рядов, возможность их почленного дифференцирования, а также доказать непрерывность этих функций на границе круга. Оба ряда можно представить одной формулой

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} t^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi) + \frac{\alpha_0}{2},$$

где

$$t = \begin{cases} \dfrac{\rho}{a} \leqslant 1 & \text{при } \rho \leqslant a \text{ (внутренняя задача)}, \\ \dfrac{a}{\rho} \leqslant 1 & \text{при } \rho \geqslant a \text{ (внешняя задача)}, \end{cases}$$

α_n, β_n — коэффициенты Фурье функции $f(\varphi)$.

Докажем, что ряды (8), (9) можно дифференцировать при $t < 1$ любое число раз. Пусть

$$u_n = t^n (\alpha_n \cos n\varphi + \beta_n \sin n\varphi).$$

Вычислим k-ю производную функции u_n по φ

$$\frac{\partial^k u_n}{\partial \varphi^k} = t^n n^k \left[\alpha_n \cos\left(n\varphi + k\frac{\pi}{2}\right) + \beta_n \sin\left(n\varphi + k\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Отсюда получаем оценку

$$\left|\frac{\partial^k u_n}{\partial \varphi^k}\right| \leqslant t^n n^k 2M,$$

где через M обозначен максимум модуля коэффициентов Фурье α_n и β_n:

$$|\alpha_n| < M, \qquad |\beta_n| < M. \qquad (10)$$

Фиксируем некоторые значения $\rho_0 < a$ (для внутренней задачи) или $\rho_1 = a^2/\rho_0 > a$ (для внешней задачи), при этом $t_0 = \rho_0/a < 1$. Рассматривая ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n n^k (|\alpha_n| + |\beta_n|) \leqslant 2M \sum_{n=1}^{\infty} t_0^n n^k \qquad (t \leqslant t_0),$$

видим, что он сходится равномерно при $t \leqslant t_0 < 1$ при любом k. Поэтому ряды (8) и (9) можно дифференцировать по φ

в любой точке внутри (вне) круга любое число раз. Аналогично доказывается, что по переменной ρ также можно дифференцировать ряды (8) и (9) внутри (вне) круга радиуса $\rho_0 < a$ ($\rho_1 > a$) сколько угодно раз.

В силу произвольности ρ_0 заключаем, что ряды (8) и (9) почленно дифференцируемы во всякой внутренней (внешней) точке круга. Из возможности почленного дифференцирования следует применимость принципа суперпозиции. Таким образом доказано, что функции (8) и (9) удовлетворяют уравнению $\Delta u = 0$ [1]).

При этом доказательстве мы пользовались только тем свойством функции $f(\varphi)$, что ее коэффициенты Фурье ограничены (формула (10)). Это имеет место для любой ограниченной функции (и даже для любой абсолютно интегрируемой функции). Таким образом, ряды (8) и (9), соответствующие любой ограниченной функции, определяют функции, удовлетворяющие уравнению

$$\Delta u = 0 \quad \text{для} \quad t < 1.$$

Этим замечанием мы воспользуемся позже при обобщении результатов, полученных в настоящем пункте.

Обратимся теперь к доказательству непрерывности функции в замкнутой области ($t \leqslant 1$). Очевидно, что без более детальных сведений относительно свойств функции $f(\varphi)$ этого сделать нельзя.

Из предположенной непрерывности и дифференцируемости функции $f(\varphi)$ следует ее разложимость в ряд Фурье, а также сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n| + |\beta_n|) < \infty. \tag{11}$$

С другой стороны, имеем:

$$|t^n \alpha_n \cos n\varphi| \leqslant |\alpha_n|, \qquad |t^n \beta_n \sin n\varphi| \leqslant |\beta_n|.$$

Поэтому ряды (8) и (9) сходятся равномерно при $t \leqslant 1$ и, следовательно, представляемые ими функции непрерывны на границе круга. Из формулы (11) видно, что функция (9), полученная для внешней задачи, ограничена на бесконечности.

Таким образом установлено, что ряды (8) и (9) удовлетворяют всем условиям рассматриваемых задач.

---

[1]) Это уравнение удовлетворяется также при $\rho = 0$; в самом деле, выражая производные по декартовым координатам через производные по полярным координатам, нетрудно убедиться, что функции (8) и (9) при $t \leqslant t_0$ можно дифференцировать по x и y любое число раз. В силу примечания на стр. 310 отсюда следует, что

$$\Delta u = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 0.$$

2. Интеграл Пуассона. Преобразуем теперь формулы (8) и (9) к более простому виду. Для определенности рассмотрим внутреннюю задачу, а для внешней напишем результат по аналогии.

Подставляя выражения для коэффициентов Фурье в формулу (8) и меняя порядок суммирования и интегрирования, будем иметь:

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n (\cos n\psi \cos n\varphi + \sin n\psi \sin n\varphi) \right\} d\psi =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n \cos n(\varphi - \psi) \right\} d\psi. \qquad (12)$$

Произведем следующие тождественные преобразования:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cos n(\varphi - \psi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} t^n \left[e^{in(\varphi-\psi)} + e^{-in(\varphi-\psi)}\right] =$$
$$= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(te^{i(\varphi-\psi)})^n + (te^{-i(\varphi-\psi)})^n \right] \right\} =$$
$$= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{te^{i(\varphi-\psi)}}{1 - te^{i(\varphi-\psi)}} + \frac{te^{-i(\varphi-\psi)}}{1 - te^{-i(\varphi-\psi)}} \right] =$$
$$= \frac{1}{2} \frac{1 - t^2}{1 - 2t\cos(\varphi - \psi) + t^2} \qquad \left(t = \frac{\rho}{a} < 1\right).$$

Подставляя полученные результаты в равенство (12), получаем:

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + a^2} d\psi. \qquad (13)$$

Полученная формула, дающая решение первой краевой задачи внутри круга, называется *интегралом Пуассона*, а подынтегральное выражение

$$K(\rho, \varphi, a, \psi) = \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + a^2}$$

— *ядром Пуассона*. Отметим, что $K(\rho, \varphi, a, \psi) > 0$ при $\rho < a$, так как $2a\rho < a^2 + \rho^2$, если $\rho \neq a$.

Интеграл Пуассона выведен в предположении $\rho < a$; при $\rho = a$ представление (13) теряет смысл. Однако

$$\lim_{\substack{\rho \to a \\ \varphi \to \varphi_0}} u(\rho, \varphi) = f(\varphi_0),$$

так как ряд, из которого получен интеграл Пуассона, является непрерывной функцией в замкнутой области.

Функция, определенная формулой

$$u(\rho, \varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + a^2}\, d\psi & \text{при} \quad \rho < a, \\ f(\varphi) & \text{при} \quad \rho = a, \end{cases} \tag{13'}$$

удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ при $\rho < a$, непрерывна в замкнутой области, включая окружность $\rho = a$.

Решение внешней краевой задачи, очевидно, имеет вид

$$u(\rho, \varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{\rho^2 - a^2}{\rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + a^2}\, d\psi & \text{при} \quad \rho > a, \\ f(\varphi) & \text{при} \quad \rho = a. \end{cases} \tag{14}$$

В самом начале мы предположили, что функция $f(\varphi)$ непрерывна и дифференцируема, и, пользуясь этим, доказали, что решение задачи можно представить в виде бесконечного ряда. В дальнейшем с помощью тождественных преобразований мы перешли от ряда к интегралу Пуассона.

Докажем теперь, что *интеграл Пуассона дает решение первой краевой задачи и в том случае, когда функция $f(\varphi)$ только непрерывна.*

Интеграл Пуассона представляет решение уравнения Лапласа при $\rho < a$ $(t < 1)$ для произвольной ограниченной функции $f(\varphi)$. В самом деле, при $\rho < a$ $(t < 1)$ интеграл Пуассона тождествен ряду (8) и в силу замечания, сделанного на стр. 313, удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ при произвольной ограниченной функции $f(\varphi)$.

Таким образом, нам остается доказать, что функция u в нашем случае непрерывно примыкает к граничным значениям. Выберем какую-либо последовательность непрерывных дифференцируемых функций

$$f_1(\varphi),\ f_2(\varphi),\ \ldots,\ f_k(\varphi),\ \ldots,$$

равномерно сходящуюся к функции $f(\varphi)$ [1]):

$$\lim_{k \to \infty} f_k(\varphi) = f(\varphi).$$

Последовательности граничных функций будет соответствовать последовательность гармонических функций $u_k(\rho, \varphi)$, определяемых

[1]) Мы не будем останавливаться на том, как это осуществить. Такую последовательность можно выбрать многими способами.

по формуле (13) или (8). Равномерная сходимость последовательности $\{f_k(\varphi)\}$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $k_0(\varepsilon) > 0$, что

$$|f_k(\varphi) - f_{k+l}(\varphi)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad k > k_0(\varepsilon), \quad l > 0.$$

Для функций $u_k(r, \varphi)$, представляющих решения первой краевой задачи, в силу принципа максимального значения, будем иметь:

$$|u_k(\rho, \varphi) - u_{k+l}(\rho, \varphi)| < \varepsilon$$

$$\text{при } \rho \leqslant \rho_0, \quad \text{если} \quad k > k_0(\varepsilon), \quad l > 0.$$

Таким образом, последовательность $\{u_k\}$ сходится равномерно к некоторой функции $u = \lim\limits_{k \to \infty} u_k$. Предельная функция $u(\rho, \varphi)$ непрерывна в замкнутой области, поскольку все функции u_k, представляемые интегралами

$$u_k(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + a^2} f_k(\psi)\, d\psi,$$

непрерывны в замкнутой области. Очевидно, что

$$u(\rho, \varphi) = \lim_{k \to \infty} u_k(\rho, \varphi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2 - \rho^2}{a^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + \rho^2} f(\psi)\, d\psi & \text{при} \quad \rho < a, \\ f(\varphi) & \text{при} \quad \rho = a, \end{cases}$$

так как последовательность $\{f_k\}$ сходится равномерно к f и поэтому предельный переход под знаком интеграла законен.

Таким образом функция

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + a^2} f(\psi)\, d\psi$$

при произвольной непрерывной функции $f(\varphi)$ является решением уравнения Лапласа, непрерывно примыкающим на границе круга к заданным значениям.

3. Случай разрывных граничных значений. Докажем, что формулы (13′) и (14) дают решение краевой задачи для произвольной кусочно-непрерывной функции $f(\varphi)$, т. е., что это решение ограничено во всей области и непрерывно примыкает к граничным значениям в точках непрерывности функции $f(\varphi)$, являясь, таким образом, единственным решением, обладающим этим свойством (ср. § 2, п. 4). Пусть φ_0 — какая-либо точка непрерывности функции $f(\varphi)$. Надо доказать, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое $\delta(\varepsilon)$, что

$$|u(\rho, \varphi) - f(\varphi_0)| < \varepsilon,$$

если

$$|\rho - a| < \delta(\varepsilon) \quad \text{и} \quad |\varphi - \varphi_0| < \delta(\varepsilon).$$

В силу непрерывности функции $f(\varphi)$ существует такое $\delta_0(\varepsilon)$, что

$$|f(\varphi) - f(\varphi_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{если} \quad |\varphi - \varphi_0| < \delta_0(\varepsilon).$$

Рассмотрим вспомогательные непрерывные и дифференцируемые функции $\overline{f(\varphi)}$ и $\underline{f(\varphi)}$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\overline{f(\varphi)} = f(\varphi_0) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для} \quad |\varphi - \varphi_0| < \delta_0(\varepsilon),$$

$$\overline{f(\varphi)} \geqslant f(\varphi) \quad \text{для} \quad |\varphi - \varphi_0| > \delta_0(\varepsilon)$$

и

$$\underline{f(\varphi)} = f(\varphi_0) - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для} \quad |\varphi - \varphi_0| < \delta_0(\varepsilon),$$

$$\underline{f(\varphi)} \leqslant f(\varphi) \quad \text{для} \quad |\varphi - \varphi_0| > \delta_0(\varepsilon),$$

а в остальном произвольные. Если при помощи формулы (13) мы определим для $\bar{f}$ и $\underline{f}$ функции $\bar{u}(\rho, \varphi)$ и $\underline{u}(\rho, \varphi)$, то это будут гармонические функции, непрерывно примыкающие к $\bar{f}(\varphi)$ и $\underline{f}(\varphi)$.

В силу положительности ядра Пуассона имеем, что

$$\underline{u}(\rho, \varphi) \leqslant u(\rho, \varphi) \leqslant \bar{u}(\rho, \varphi),$$

так как

$$\underline{f}(\varphi) \leqslant f(\varphi) \leqslant \bar{f}(\varphi).$$

Из непрерывности функций $\bar{u}(\rho, \varphi)$ и $\underline{u}(\rho, \varphi)$ на границе при $\varphi = \varphi_0$ следует существование такого $\delta_1(\varepsilon)$, что

$$|\bar{u}(\rho, \varphi) - \bar{f}(\varphi_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для} \quad |\rho - a| < \delta_1(\varepsilon), \quad |\varphi - \varphi_0| < \delta_1(\varepsilon)$$

и

$$|\underline{u}\rho, \varphi) - \underline{f}(\varphi_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для} \quad |\rho - \alpha| < \delta_1(\varepsilon), \quad |\varphi - \varphi_0| < \delta_1(\varepsilon).$$

Из этих неравенств находим:

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}(\rho, \varphi) &\leqslant \bar{f}(\varphi_0) + \frac{\varepsilon}{2} = f(\varphi_0) + \varepsilon, \\ f(\varphi_0) - \varepsilon = \underline{f}(\varphi_0) &- \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \underline{u}(\rho, \varphi)\end{aligned}\right\} \text{ для } \begin{aligned}|\rho - a| &< \delta(\varepsilon), \\ |\varphi - \varphi_0| &< \delta(\varepsilon),\end{aligned}$$

где $\delta = \min(\delta_0, \delta_1)$.

Сопоставляя полученные неравенства, находим, что

$$f(\varphi_0) - \varepsilon \leqslant \underline{u}(\rho, \varphi) \leqslant u(\rho, \varphi) \leqslant \bar{u}(\rho, \varphi) \leqslant f(\varphi_0) + \varepsilon$$

или

$$|u(\rho, \varphi) - f(\varphi_0)| < \varepsilon \quad \text{для} \quad \begin{aligned}|a - \rho| &< \delta(\varepsilon), \\ |\varphi - \varphi_0| &< \delta(\varepsilon),\end{aligned}$$

что и доказывает непрерывность $u(\rho, \varphi)$ в точке (a, φ_0).

Ограниченность $u(\rho, \varphi)$ следует из того, что в силу положительности ядра Пуассона

$$|u(\rho, \varphi)| < M \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - \rho^2}{a^2 + \rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi)}\, d\psi = M,$$

если $|f(\varphi)| < M$. Значение же интеграла

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - \rho^2)\, d\psi}{\rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + a^2} \equiv 1,$$

так как в силу ранее доказанного левая часть представляет гармоническую функцию, непрерывно примыкающую к граничным значениям $f \equiv 1$, а такая функция тождественно равна 1. Аналогично $u(\rho, \varphi) > M_1$, если $f > M_1$, что и доказывает ограниченность модуля функции $u(\rho, \varphi)$.

§ 4. Функция источника

Метод функции источника дает удобный аппарат для аналитического представления решения краевых задач.

В настоящем параграфе будут даны определение и основные свойства функции источника для уравнения Лапласа, а также будут построены функции источника для ряда простейших областей (круг, сфера, полупространство). Это построение проводится методом электростатических изображений.