Из этих неравенств находим:

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}(\rho, \varphi) &\leqslant \bar{f}(\varphi_0) + \frac{\varepsilon}{2} = f(\varphi_0) + \varepsilon, \\ f(\varphi_0) - \varepsilon &= \underline{f}(\varphi_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \underline{u}(\rho, \varphi) \end{aligned}\right\} \text{ для } \quad \begin{aligned} |\rho - a| &< \delta(\varepsilon), \\ |\varphi - \varphi_0| &< \delta(\varepsilon), \end{aligned}$$

где $\delta = \min(\delta_0, \delta_1)$.

Сопоставляя полученные неравенства, находим, что

$$f(\varphi_0) - \varepsilon \leqslant \underline{u}(\rho, \varphi) \leqslant u(\rho, \varphi) \leqslant \bar{u}(\rho, \varphi) \leqslant f(\varphi_0) + \varepsilon$$

или

$$|u(\rho, \varphi) - f(\varphi_0)| < \varepsilon \quad \text{для} \quad \begin{aligned} |a - \rho| &< \delta(\varepsilon), \\ |\varphi - \varphi_0| &< \delta(\varepsilon), \end{aligned}$$

что и доказывает непрерывность $u(\rho, \varphi)$ в точке (a, φ_0).

Ограниченность $u(\rho, \varphi)$ следует из того, что в силу положительности ядра Пуассона

$$|u(\rho, \varphi)| < M \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a^2 - \rho^2}{a^2 + \rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi)}\, d\psi = M,$$

если $|f(\varphi)| < M$. Значение же интеграла

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - \rho^2)\, d\psi}{\rho^2 - 2a\rho\cos(\varphi - \psi) + a^2} \equiv 1,$$

так как в силу ранее доказанного левая часть представляет гармоническую функцию, непрерывно примыкающую к граничным значениям $f \equiv 1$, а такая функция тождественно равна 1. Аналогично $u(\rho, \varphi) > M_1$, если $f > M_1$, что и доказывает ограниченность модуля функции $u(\rho, \varphi)$.

§ 4. Функция источника

Метод функции источника дает удобный аппарат для аналитического представления решения краевых задач.

В настоящем параграфе будут даны определение и основные свойства функции источника для уравнения Лапласа, а также будут построены функции источника для ряда простейших областей (круг, сфера, полупространство). Это построение проводится методом электростатических изображений.

1. Функция источника для уравнения $\Delta u = 0$ и ее основные свойства. Для всякой функции u, непрерывной вместе с первыми производными в замкнутой области T, ограниченной достаточно гладкой поверхностью Σ, и имеющей вторые производные внутри T, как было показано в § 2, п. 1, имеет место интегральное представление

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{R_{PM_0}} \frac{\partial u}{\partial n} - u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{PM_0}} \right) \right] d\sigma_P - \\ - \frac{1}{4\pi} \iiint_T \frac{\Delta u}{R_{MM_0}} d\tau_M. \quad (1)$$

Если функция $u(M)$ гармоническая, то объемный интеграл равен нулю; если же $u(M)$ удовлетворяет уравнению Пуассона, то объемный интеграл является известной функцией.

Пусть $v(M)$ — некоторая гармоническая функция, непрерывная в $T + \Sigma$ вместе с первыми производными, не имеющая нигде особенностей. Вторая формула Грина

$$\iiint_T (u \Delta v - v \Delta u)\, d\tau = \iint_{\Sigma} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma$$

дает:

$$0 = \iint_{\Sigma} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\sigma - \iiint_T v \Delta u\, d\tau. \quad (2)$$

Складывая (2) и (1), получаем:

$$u(M_0) = \iint_{\Sigma} \left[G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right] d\sigma - \iiint_T \Delta u \cdot G\, d\tau, \quad (3)$$

где

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v \quad (3')$$

— функция двух точек: $M_0(x, y, z)$ и $M(\xi, \eta, \zeta)$. Точка M_0 фиксирована, и поэтому x, y, z играют роль параметров.

Формула (3) содержит $u|_{\Sigma}$ и $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma}$. Между тем, при решении первой краевой задачи задается лишь $u|_{\Sigma}$, а при решении второй краевой задачи — значение $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma}$. Функция v выбирается таким образом, чтобы $G|_{\Sigma} = 0$ для первой краевой задачи

$\left(\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_\Sigma = 0\right.$ для второй краевой задачи$\left.\right)$. Определим функцию $G(M, P)$ при помощи условий:

1. $G(M, P)$ как функция точки $P(\xi, \eta, \zeta)$ при фиксированной точке $M(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta G = G_{\xi\xi} + G_{\eta\eta} + G_{\zeta\zeta} = 0, \quad P \neq M$$

во всех точках P области T, кроме точки $P = M$.

2. $G(M, P)$ при совпадении аргументов ($M = P$) обращается в бесконечность и представима в виде (3′), где $v = v(M, P)$ — гармоническая всюду в T функция.

3. $G(M, P)$ на границе обращается в нуль:

$$G(M, P) = 0, \quad \text{если} \quad P \in \Sigma.$$

Этому условию можно удовлетворить, потребовав, чтобы

$$v|_\Sigma = -\frac{1}{4\pi R}.$$

Функцию G, определенную таким образом, будем называть **функцией точечного источника первой краевой задачи для уравнения** $\Delta u = 0$. Функция источника позволяет дать явное представление для решения первой краевой задачи для уравнения $\Delta u = 0$. В самом деле, формула (3) дает:

$$u(M_0) = -\iint_\Sigma u \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma = -\iint_\Sigma f \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma \quad (f = u|_\Sigma). \tag{4}$$

Следует иметь в виду, что формула (4) получена с помощью формулы Грина, предполагающей выполнение определенных условий в отношении функций u и G и поверхности Σ. В формулу (4) входит выражение $\frac{\partial G}{\partial n}$, существование которого на поверхности Σ не следует непосредственно из определения функции G.

При получении формулы (4) мы исходим из того, что существует гармоническая функция u, принимающая на поверхности Σ значение f. Тем самым даже для тех областей, для которых существует функция источника, удовлетворяющая условиям применимости формулы Грина, формула (4) дает явное представление лишь тех решений u первой краевой задачи, которые удовлетворяют условиям применимости формулы Грина (доказывая единственность этого класса решений первой краевой задачи).

Подробное исследование формулы (4), проведенное А. М. Ляпуновым, показало, что для широкого класса поверхностей, называемых поверхностями Ляпунова (см. § 5), она представляет решение первой краевой задачи при весьма общих условиях.

Остановимся еще раз на определении функции G. Функция G определяется при помощи функции v, являющейся решением первой краевой задачи для уравнения

$$\Delta v = 0$$

с граничными значениями

$$v|_\Sigma = -\frac{1}{4\pi R}.$$

Может создаться впечатление, что имеет место порочный круг. Для нахождения функции u — решения первой краевой задачи — надо найти функцию v — решение той же задачи. На самом деле порочного круга нет, так как знание функции источника позволяет решить первую краевую задачу с произвольными граничными значениями ($u|_\Sigma = f$), в то время как для нахождения самой функции G достаточно решить краевую задачу со специальными граничными значениями ($v|_\Sigma = -1/4\pi R$), что, как мы увидим на ряде примеров, значительно проще.

При электростатической интерпретации функция источника

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R} + v$$

представляет потенциал в точке M точечного заряда[1]), помещенного в точку M_0 внутри заземленной проводящей поверхности Σ. Первое слагаемое $1/4\pi R$ есть, очевидно, потенциал точечного заряда в свободном пространстве, а второе слагаемое v обозначает потенциал поля зарядов, индуцированных на проводящей поверхности Σ. Таким образом, построение функции источника сводится к определению индуцированного поля.

Остановимся на некоторых свойствах функции источника. При этом мы будем предполагать, что рассматриваемые области таковы, что для них существуют функции источника, обладающие нормальными производными на поверхности Σ и удовлетворяющие условиям применимости формулы Грина.

1. Функция источника всюду положительна внутри T. В самом деле, функция G обращается в нуль на границе области Σ и положительна на поверхности достаточно малой сферы, описанной вокруг полюса. Отсюда следует, в силу принципа максимального значения, ее положительность во всей области.

---

[1]) При термической интерпретации стационарная температура точечного источника тепла интенсивности q определяется формулой

$$q/4\pi k r,$$

где k — коэффициент теплопроводности. Таким образом, функция $G(MM_0)$ является температурой в точке M, если температура поверхности тела равна нулю, а в точке M_0 помещен тепловой источник интенсивности $q = k$.

Если размерность длины выбрана так, что $k = 1$, то функция G соответствует источнику интенсивности, равной единице.

Заметим также, что

$$\frac{dG}{dn}\bigg|_{\Sigma} \leqslant 0,$$

что непосредственно следует из доказанной положительности и условия $G|_{\Sigma} = 0$.

2. Функция источника симметрична относительно своих аргументов $M_0(x, y, z)$ и $M(\xi, \eta, \zeta)$:

$$G(M, M_0) = G(M_0, M).$$

Пусть M_0' и M_0'' — некоторые фиксированные точки области T. Проведем сферы Σ_1 и Σ_2 радиуса ε с центрами в точках M_0' и M_0'' (рис. 50). Полагая

$$u(M) = G(M, M_0'), \quad v(M) = G(M, M_0'')$$

и применяя формулу Грина

$$\iiint\limits_{T_\varepsilon} (u\,\Delta v - v\,\Delta u)\,d\tau = \iint\limits_{\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma \tag{5}$$

к области T_ε, ограниченной поверхностями Σ, Σ_1 и Σ_2, будем иметь:

$$\iint\limits_{\Sigma_1} \left[G(M, M_0')\frac{\partial G(M, M_0'')}{\partial n} - G(M, M_0'')\frac{\partial G(M, M_0')}{\partial n}\right] d\sigma_M +$$
$$+ \iint\limits_{\Sigma_2} \left[G(M, M_0')\frac{\partial G(M, M_0'')}{\partial n} - G(M, M_0'')\frac{\partial G(M, M_0')}{\partial n}\right] d\sigma_M = 0,$$

так как левая часть уравнения (5) равна нулю, поскольку $\Delta G = 0$, а интеграл по поверхности Σ равен нулю в силу граничных условий. Переходя затем к пределу при $\varepsilon \to 0$ и используя особенность функции источника, получим [1]:

$$G(M_0', M_0'') = G(M_0'', M_0')$$

или

$$G(M, M_0) = G(M_0, M).$$

Доказанная симметрия функции источника является математическим выражением *принципа взаимности* в физике: источник, помещенный в точку M_0, производит в точке M такое же действие, какое производит в точке M_0 источник, помещенный в точку M. Принцип взаимности носит весьма общий характер и относится к различным физическим полям (электромагнитным, упругим и т. д.).

[1] Ляпуновым установлена эта теорема в применении к классу поверхностей, называемых поверхностями Ляпунова.

Отметим, в частности, что из свойств симметрии следует, что при фиксированном M $u(M_0) = G(M, M_0)$, как функция переменных x, y, z точки M_0, обладает тем же свойством, что и функция $v(M) = G(M, M_0)$ переменных ξ, η, ζ точки M при фиксированном M_0, т. е. $\Delta_{M_0} G = 0$ при $M \neq M_0$, $G = 0$ при $M_0 \in \Sigma$.

Функция источника $G(M, M_0)$ для случая двух измерений, очевидно, будет определяться условиями:

1. $\Delta G = 0$ всюду в рассматриваемой области S, кроме точки $M = M_0$.

2. В точке $M = M_0$ функция G имеет особенность вида

$$\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R_{MM_0}}.$$

3. $G|_C = 0$, где C — граница области S.

Функция источника в этом случае имеет вид

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R_{MM_0}} + v(M, M_0),$$

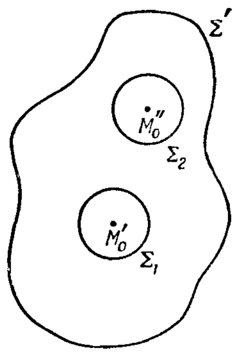

Рис. 50.

где v — всюду непрерывная гармоническая функция, удовлетворяющая на границе условию

$$v|_C = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{R_{MM_0}}.$$

Решение первой краевой задачи для $\Delta u = 0$ при этом дается формулой

$$u(M_0) = -\int_C f\frac{\partial G}{\partial n}\,ds \quad (f = u|_C).$$

2. Метод электростатических изображений и функции источника для сферы. Наиболее распространенным методом построения функции источника является метод электростатических изображений. Идея его состоит в том, что при построении функции источника

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} + v$$

индуцированное поле v представляется как поле зарядов, расположенных вне поверхности Σ и выбираемых таким образом, чтобы выполнялось условие

$$v|_\Sigma = -\frac{1}{4\pi R}.$$

Эти заряды называются электростатическими изображениями единичного заряда, помещенного в точку M_0 и создающего в отсутствие поверхности Σ потенциал $1/4\pi R$. Во многих случаях выбор таких зарядов не представляет труда. Ниже мы приведем примеры построения функции источника методом электростатических изображений.

Из представления функций источника, полученных во всех этих примерах, непосредственно видна непрерывность первых производных функций G на поверхности Σ.

В качестве первого примера рассмотрим функцию источника для сферы.

Пусть дана сфера радиуса R с центром в точке O и требуется найти для нее функцию источника.

Поместим в точку M_0 единичный заряд и отложим на радиусе, проходящем через точку M_0, такой отрезок OM_1, что

$$\rho_0\rho_1 = R^2, \tag{6}$$

где $\rho_0 = OM_0$ и $\rho_1 = OM_1$ (рис. 51).

Преобразование (6), ставящее в соответствие точке M_0 определенную точку M_1, является преобразованием обратных радиусов, а сама точка M_1 называется *сопряженной* с точкой M_0. Это преобразование является взаимным, и точку M_0 можно рассматривать как сопряженную с точкой M_1.

Докажем, что для всех точек P, расположенных на сфере, расстояния до M_0 и M_1 пропорциональны. Для этого рассмотрим треугольники OPM_0 и OPM_1 (см. рис. 51); они подобны, так как угол при O общий, а прилежащие к нему стороны пропорциональны:

$$\frac{\rho_0}{R} = \frac{R}{\rho_1} \quad \text{или} \quad \frac{OM_0}{R} = \frac{R}{OM_1}.$$

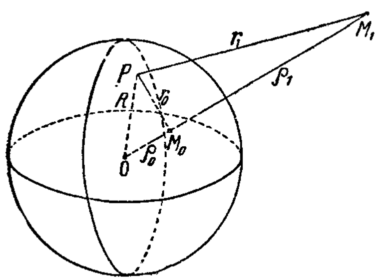

Рис. 51.

Из подобия треугольников следует:

$$\frac{r_0}{r_1} = \frac{\rho_0}{R} = \frac{R}{\rho_1}, \tag{7}$$

где $r_0 = |\overrightarrow{M_0P}|$, $r_1 = |\overrightarrow{M_1P}|$. Из пропорции (7) получаем:

$$r_0 = \frac{\rho_0}{R} r_1$$

для всех точек сферы. Поэтому гармоническая функция $v = -\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_1}$ на сфере принимает то же значение, что и функция $-1/r_0$. Она представляет, очевидно, потенциал заряда величины $-R/\rho_0$, помещенного в точку M_1.

Таким образом, функция

$$G(P, M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_0}-\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_1}\right) \tag{8}$$

и является искомой функцией источника для сферы, так как это — гармоническая функция, имеющая в M_0 особенность $1/4\pi r_0$ и обращающаяся в нуль на сфере.

Решение первой краевой задачи дается формулой (4).

Вычислим производную

$$\frac{\partial G}{\partial n}=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_0}\right)-\frac{R}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right)\right], \tag{9}$$

где $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль, $r_1=|\overrightarrow{M_1M}|$ (M, вообще говоря, не лежит на сфере).

Производные от $1/r_0$ и $1/r_1$ по направлению $\boldsymbol{n}$ равны

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_0}\right)&=\frac{\partial}{\partial r_0}\left(\frac{1}{r_0}\right)\frac{\partial r_0}{\partial n}=-\frac{1}{r_0^2}\cos(\widehat{\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}}),\\ \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right)&=\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{1}{r_1}\right)\frac{\partial r_1}{\partial n}=-\frac{1}{r_1^2}\cos(\widehat{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}}),\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

так как

$$\frac{\partial r_0}{\partial n}=\cos(\widehat{\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}}), \quad \frac{\partial r_1}{\partial n}=\cos(\widehat{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}}). \tag{11}$$

Нетрудно найти величины $\cos(\widehat{\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}})$ и $\cos(\widehat{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}})$:

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{n}})=\frac{R^2+r_0^2-\rho_0^2}{2Rr_0}, \tag{11'}$$

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}})=\frac{R^2+r_1^2-\rho_1^2}{2Rr_1}. \tag{11''}$$

Используя пропорцию (7), будем иметь:

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{n}})\big|_\Sigma=\frac{R^2+\dfrac{R^2}{\rho_0^2}r_0^2-\dfrac{R^4}{\rho_0^2}}{2R\dfrac{R}{\rho_0}r_0}=\frac{\rho_0^2+r_0^2-R^2}{2\rho_0 r_0},$$

так как $\rho_1=\dfrac{R^2}{\rho_0}$, по определению точки M_1, и $r_1=\dfrac{R}{\rho_0}r_0$ на сфере Σ. Пользуясь формулами (10), а также выражениями (9), (11'), (11''), найдем:

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_\Sigma=\frac{1}{4\pi}\left[-\frac{1}{r_0^2}\frac{R^2+r_0^2-\rho_0^2}{2Rr_0}+\frac{\rho_0^2}{R^2r_0^2}\frac{R}{\rho_0}\frac{\rho_0^2+r_0^2-R^2}{2\rho_0r_0}\right]=$$

$$=-\frac{1}{4\pi R}\frac{R^2-\rho_0^2}{r_0^3}.$$

Таким образом, функция $u(M_0)$ в соответствии с формулой (4) равна

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R} \iint_{\Sigma} f(P) \frac{R^2 - \rho_0^2}{r_0^3} d\sigma_P. \tag{12}$$

Введем сферическую систему координат с началом в центре сферы. Пусть (R, θ, φ) — координаты точки P, а $(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$ — координаты точки M_0; γ — угол между радиусами-векторами $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OM_0}$. Тогда формулу (12) можно переписать в виде

$$u(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) \frac{R^2 - \rho_0^2}{\left(R^2 - 2R\rho_0 \cos\gamma + \rho_0^2\right)^{3/2}} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi, \tag{12'}$$

где

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0)\,^{1)}. \tag{13}$$

Эта формула называется **интегралом Пуассона для сферы**.

Тем же методом может быть построена функция источника для области, внешней к сфере,

$$G(M, M_1) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{R}{\rho_1}\frac{1}{r_0}\right), \tag{14}$$

где $r_1 = MM_1$ — расстояние от фиксированной точки M_1, лежащей вне сферы, $r_0 = MM_0$ — расстояние от точки M_0, сопряженной с точкой M_1, ρ_1 — расстояние M_1 от начала координат, а R — радиус сферы.

Учитывая различие направлений нормалей для внутренней и внешней задач, получим:

$$u(\rho_1, \theta_1, \varphi_1) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\rho_1^2 - R^2}{\left[R^2 - 2\rho_1 R\cos\gamma + \rho_1^2\right]^{3/2}} f(\theta, \varphi)\sin\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

где $\cos\gamma$ дается формулой (13) (индекс 0 надо заменить на 1).

3. Функция источника для круга. Функция источника для круга может быть получена таким же способом, как и функция для сферы. В этом случае функцию следует искать в виде

$$G = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r} + v. \tag{15}$$

---

1) В самом деле, направляющие косинусы векторов $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{OM_0}$ равны, соответственно $(\sin\theta\cos\varphi, \ \sin\theta\sin\varphi, \ \cos\theta)$ и $(\sin\theta_0\cos\varphi_0, \ \sin\theta_0\sin\varphi_0, \ \cos\theta_0)$, откуда

$$\cos\gamma = \cos\theta\cdot\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0(\cos\varphi\cos\varphi_0 + \sin\varphi\sin\varphi_0) = \\ = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0).$$

Повторяя рассуждение предыдущего пункта от формулы (6) до формулы (8), мы найдем функцию G в виде

$$G(P, M_0)=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r_0}-\ln\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_1}\right], \tag{16}$$

где $\rho_0=OM_0$, $r_0=M_0P$, $r_1=M_1P$, $R=OP$ — радиус круга (рис. 52). Нетрудно убедиться в том, что определенная таким образом гармоническая функция обращается в нуль на границе

$$G|_C=0.$$

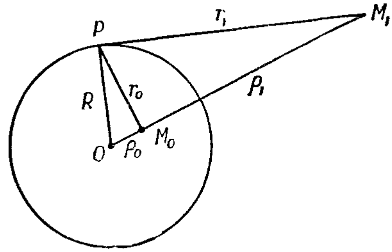

Рис. 52.

Для решения первой краевой задачи надо вычислить значения $\frac{\partial G}{\partial n}$ на окружности C. Вычисления проходят аналогично случаю сферы и дают:

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_C=-\frac{1}{2\pi R}\frac{R^2-\rho_0^2}{r_0^2}.$$

Пусть (ρ, θ) — полярные координаты точки P, лежащей на окружности, а (ρ_0, θ_0) — координаты точки M_0, тогда

$$r_0^2=R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0).$$

Подставляя в формулу

$$u(\rho_0, \theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_C u(P)\frac{R^2-\rho_0^2}{r_0^2}\frac{ds}{R}$$

это выражение для r_0 и принимая во внимание, что

$$u(P)|_C=f(\theta) \quad \text{и} \quad ds=R\,d\theta,$$

приходим для функции $u(M_0)$ к выражению

$$u(\rho_0, \theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho_0^2}{R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0)}f(\theta)\,d\theta, \tag{17}$$

называемому **интегралом Пуассона для круга** (см. стр. 314, формула (13)). Эта же формула с точностью до знака дает решение внешней задачи.

4. Функция источника для полупространства. Понятие функции источника и формула (4) имеют место и для неограниченного пространства, если рассматривать функции, регулярные на бесконечности (см. § 2, п. 6). Найдем функцию источника для полупространства $z>0$. Поместим в точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ единичный заряд, который создает в неограниченном пространстве поле, потенциал которого определяется функцией

$$\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R_{M_0M}}, \quad \text{где} \quad R_{M_0M}=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}.$$

Нетрудно видеть, что «индуцированное поле» v является полем отрицательного единичного заряда, помещенного в точку

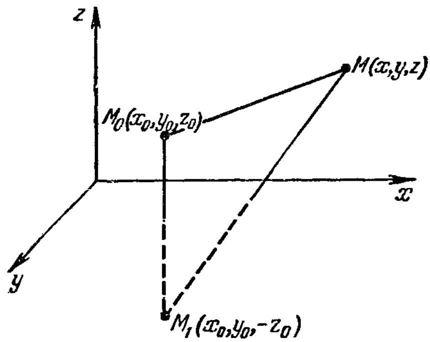

Рис. 53.

$M_1(x_0, y_0, -z_0)$, являющуюся зеркальным изображением точки M_0 в плоскости $z=0$ (рис. 53). Функция G, равная

$$G(M, M_0)=\frac{1}{4\pi R_0}-\frac{1}{4\pi R_1},$$

где

$$R_0=|\overrightarrow{M_0M}|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

$$R_1=|\overrightarrow{M_1M}|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2},$$

обращается в нуль при $z=0$ и имеет нужную особенность в точке M_0.

Вычислим $\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{z=0}=-\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0}$. Очевидно, что

$$\frac{\partial G}{\partial z}=\frac{1}{4\pi}\left[-\frac{z-z_0}{R_0^3}+\frac{z+z_0}{R_1^3}\right].$$

Полагая $z=0$, находим:

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{z=0}=-\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0}=-\frac{z_0}{2\pi R_0^3}.$$

Решение первой краевой задачи дается формулой

$$u(M_0)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Sigma_0}\frac{z_0}{R_{M_0P}^3}f(P)\,d\sigma_P,$$

где Σ_0 — плоскость $z=0$, $f(P)=u|_{z=0}$, или

$$u(x_0, y_0, z_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{z_0}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2\right]^{3/2}}f(x, y)\,dx\,dy. \quad (18)$$

§ 5. Теория потенциала

Функция $\frac{1}{R}=\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$, представляющая потенциал поля единичной массы (заряда), помещенной в точке $M_0(\xi, \eta, \zeta)$ является решением уравнения Лапласа, зависящим от параметров ξ, η, ζ. Интегралы от этой фунции по параметрам называются **потенциалами** и имеют существенное значение с точки зрения непосредственных приложений в физике, а также и с точки зрения развития методов решения краевых задач.

1. Объемный потенциал. Пусть в некоторой точке $M_0(\xi, \eta, \zeta)$ помещена масса m_0. По закону всемирного тяготения на массу m, помещенную в точке $M(x, y, z)$, действует сила притяжения

$$\boldsymbol{F}=-\gamma\frac{mm_0}{R^2}\boldsymbol{r}, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}/R$ — единичный вектор в направлении $\overrightarrow{M_0M}$ $(\boldsymbol{R}=\overrightarrow{M_0M})$, а γ — гравитационная постоянная. Выбирая систему единиц так, чтобы $\gamma=1$, и полагая $m=1$, получим:

$$\boldsymbol{F}=-\frac{m_0}{R^2}\boldsymbol{r}.$$

Проекции этой силы на координатные оси будут:

$$\left.\begin{aligned} X&=F\cos\alpha=-\frac{m_0}{R^3}(x-\xi),\\ Y&=F\cos\beta=-\frac{m_0}{R^3}(y-\eta),\\ Z&=F\cos\gamma=-\frac{m_0}{R^3}(z-\zeta),\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

где α, β и γ — углы, образованные вектором $\boldsymbol{F}$ с координатными осями.

Введем функцию u, называемую **потенциалом силового поля**[1]) и определяемую равенством

$$\boldsymbol{F}=\operatorname{grad} u$$

[1]) Не следует смешивать потенциал с потенциальной энергией силового поля. Термин потенциал употребляется здесь в том же смысле, как *силовая функция* в механике.