где Σ_0 — плоскость $z=0$, $f(P)=u|_{z=0}$, или

$$u(x_0, y_0, z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{z_0}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2\right]^{3/2}}f(x, y)\,dx\,dy. \quad (18)$$

§ 5. Теория потенциала

Функция $\frac{1}{R}=\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$, представляющая потенциал поля единичной массы (заряда), помещенной в точке $M_0(\xi, \eta, \zeta)$ является решением уравнения Лапласа, зависящим от параметров ξ, η, ζ. Интегралы от этой фунции по параметрам называются **потенциалами** и имеют существенное значение с точки зрения непосредственных приложений в физике, а также и с точки зрения развития методов решения краевых задач.

1. Объемный потенциал. Пусть в некоторой точке $M_0(\xi, \eta, \zeta)$ помещена масса m_0. По закону всемирного тяготения на массу m, помещенную в точке $M(x, y, z)$, действует сила притяжения

$$\boldsymbol{F}=-\gamma\frac{mm_0}{R^2}\boldsymbol{r}, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}/R$ — единичный вектор в направлении $\overrightarrow{M_0M}$ ($\boldsymbol{R}=\overrightarrow{M_0M}$), а γ — гравитационная постоянная. Выбирая систему единиц так, чтобы $\gamma=1$, и полагая $m=1$, получим:

$$\boldsymbol{F}=-\frac{m_0}{R^2}\boldsymbol{r}.$$

Проекции этой силы на координатные оси будут:

$$\left.\begin{aligned} X&=F\cos\alpha=-\frac{m_0}{R^3}(x-\xi),\\ Y&=F\cos\beta=-\frac{m_0}{R^3}(y-\eta),\\ Z&=F\cos\gamma=-\frac{m_0}{R^3}(z-\zeta),\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

где α, β и γ — углы, образованные вектором $\boldsymbol{F}$ с координатными осями.

Введем функцию u, называемую **потенциалом силового поля**[1]) и определяемую равенством

$$\boldsymbol{F}=\operatorname{grad}u$$

[1]) Не следует смешивать потенциал с потенциальной энергией силового поля. Термин потенциал употребляется здесь в том же смысле, как **силовая функция** в механике.

или

$$X = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

В нашем случае

$$u = \frac{m_0}{R}.$$

Потенциал поля n материальных точек вследствие суперпозиции силовых полей будет выражаться формулой

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{R_i}.$$

Перейдем к случаю непрерывного распределения массы. Пусть дано тело T с плотностью $\rho(\xi, \eta, \zeta)$. Определим потенциал этого тела в точке $M(x, y, z)$. Для этого разобьем тело T на достаточно мелкие части $\Delta\tau$. Сделаем естественное предположение, что действие элемента $\Delta\tau$ эквивалентно действию его массы, сосредоточенной в некоторой «средней» точке[1]) объема $\Delta\tau$; тогда для компоненты силы, действующей на точку M, получим следующее выражение:

$$\Delta X = -\frac{\rho\,\Delta\tau}{R^3}(x-\xi), \quad \text{где} \quad R^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2.$$

Интегрирование по всему объему T дает компоненту полной силы притяжения точки M телом T

$$X = -\iiint_T \rho \frac{x-\xi}{R^3}\,d\tau. \tag{3}$$

Потенциал в точке M будет определяться формулой

$$u(M) = \iiint_T \rho \frac{1}{R}\,d\tau. \tag{4}$$

Если точка M лежит вне тела, то в этом можно убедиться непосредственно дифференцированием под знаком интеграла[2]).

---

[1]) Более точно при этом предполагается, что действие некоторого тела T массы m на точку, лежащую вне выпуклого объема $\overline{T}$, содержащего это тело, можно заменить действием некоторого эффективного центра той же массы m, лежащего внутри $\overline{T}$.

[2]) Для возможности дифференцирования определенного интеграла вида

$$f(M) = \int_T F(M, P)\,\varphi(P)\,d\tau_P$$

по параметру под знаком интеграла достаточно непрерывности производной от функции $F(M, P)$ по параметру и абсолютной интегрируемости функции $\varphi(P)$. Обычно эта теорема формулируется при $\varphi(P) \equiv 1$. Доказательство ее для нашего случая ничем не отличается от обычного.

Аналогично вычисляются и производные высших порядков Очевидно, что потенциал $u(M)$ вне тела T удовлетворяет уравнению Лапласа (см. подробнее стр. 340). В дальнейшем, не стремясь к построению теории в наиболее общих условиях, мы будем пользоваться указанными выше свойствами потенциалов и сформулируем ряд теорем при условии, что ρ — ограниченная функция (подразумевая ее интегрируемость).

Если точка M лежит внутри области T, нельзя утверждать, что $X = \frac{\partial u}{\partial x}$ без дополнительного исследования, которое и будет дано ниже.

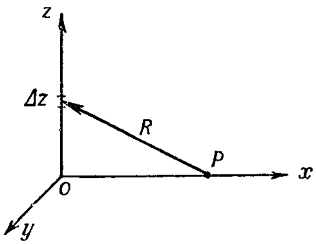

Рис. 54.

2. Плоская задача. Логарифмический потенциал. Рассмотрим распределение масс в пространстве, зависящее лишь от двух координат (x, y). В любой плоскости $z = \text{const}$ потенциал, очевидно, принимает одно и то же значение, поэтому достаточно исследовать потенциал точки (x, y), лежащей в плоскости $z = 0$.

Определим потенциал однородной бесконечной прямой L. Направим ось z вдоль этой прямой. Пусть погонная плотность (т. е. масса единицы длины) равна μ. Сила притяжения элементом Δz точки $P(x, 0)$ (рис. 54) и ее составляющая по оси x равны, соответственно,

$$\Delta F = -\frac{\mu\,\Delta z}{R^2} = -\frac{\mu\,\Delta z}{(x^2+z^2)},$$

$$\Delta X = \Delta F\cos\alpha = -\mu\,\Delta z \cdot \frac{x}{\sqrt{(x^2+z^2)^3}}.$$

Отсюда

$$X = -\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mu x \frac{dz}{(x^2+z^2)^{3/2}} = -\mu x^2 \frac{1}{x^3} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha\, d\alpha = -\frac{2\mu}{x}$$

$$(z/x = \operatorname{tg}\alpha).$$

Если $P(x, y)$ — произвольная точка, то сила притяжения точки линией L будет, очевидно, направлена вдоль $\overrightarrow{OP}$ и равна по величине

$$F = -\frac{2\mu}{\rho},$$

где

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Потенциал этой силы называется **логарифмическим потенциалом** и равен

$$V = 2\mu \ln \frac{1}{\rho}, \tag{5}$$

в чем легко убедиться непосредственным дифференцированием. Логарифмический потенциал является решением уравнения Лапласа с двумя независимыми переменными, обладающим круговой симметрией вокруг полюса в точке $\rho = 0$, в которой он обращается в бесконечность.

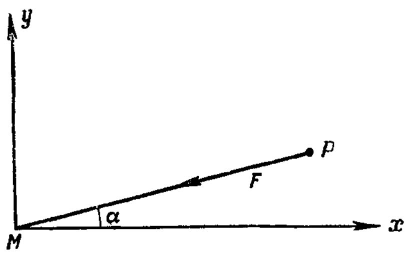

Рис. 55.

Таким образом потенциал однородной прямой дает плоское поле и выражается формулой (5). Представление потенциала в виде интеграла было получено нами лишь для ограниченных объемов[1]). Отметим, что в отличие от объемного потенциала логарифмический потенциал не обращается в нуль на бесконечности, а имеет там логарифмическую особенность.

Вычислим теперь компоненты силы притяжения точки P (рис. 55)

$$X = F\cos\alpha = -2\mu \frac{x}{\rho^2} \quad \left(\cos\alpha = \frac{x}{\rho}\right),$$

$$Y = F\sin\alpha = -2\mu \frac{y}{\rho^2} \quad \left(\sin\alpha = \frac{y}{\rho}\right).$$

Если имеется несколько точек (бесконечных прямых с распределенной вдоль них массой), то в силу принципа суперпозиции силовых полей потенциалы точек (линий) будут складываться.

---

[1]) При вычислении потенциала бесконечной прямой нельзя было непосредственно интегрировать потенциалы отдельных элементов, так как в этом случае получается расходящийся интеграл. В самом деле, потенциал элемента Δz равен

$$\Delta u = \mu \frac{\Delta z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}.$$

Формальное интегрирование дает расходящийся интеграл

$$u = \int_{-\infty}^{\infty} \mu \frac{dz}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}.$$

В случае области S с непрерывно-распределенной плотностью $\mu(\xi, \eta)$[1]) (рис. 56) компоненты силы притяжения точки P выразятся двойными интегралами:

$$\left.\begin{aligned} X &= -2\iint\limits_S \mu(\xi, \eta)\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\,d\xi\,d\eta, \\ Y &= -2\iint\limits_S \mu(\xi, \eta)\frac{y-\eta}{(y-\eta)^2+(x-\xi)^2}\,d\xi\,d\eta, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

и потенциал будет равен

$$u(x, y) = 2\iint\limits_S \mu(\xi, \eta)\ln\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\,d\xi\,d\eta, \tag{7}$$

что нетрудно проверить дифференцированием для точек, лежащих вне S. Если же точка P лежит в области S, то необходимо провести дополнительное исследование.

3. Несобственные интегралы. Потенциалы и компоненты силы притяжения представляются с помощью интегралов, у которых подынтегральные функции обращаются в бесконечность, если мы рассматриваем их значения в точках, находящихся в области, содержащей притягивающие массы.

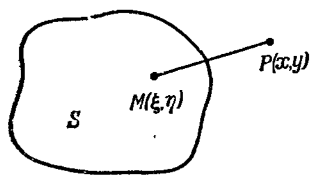

Рис. 56.

Как известно, если подынтегральная функция обращается в некоторой точке области интегрирования в бесконечность, то интеграл нельзя определять как предел интегральной суммы. Действительно, в этом случае интегральная сумма не имеет предела, так как слагаемое, относящееся к элементарному объему, содержащему особую точку, может как угодно сильно менять величину суммы, в зависимости от выбора промежуточной точки. Интегралы от подобных функций определяются как интегралы несобственные.

Пусть в области T задана функция $F(x, y, z)$, обращающаяся в бесконечность в некоторой точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Рассмотрим определенный интеграл по области $T - K_\varepsilon$, где K_ε — некоторая окрестность точки M_0 диаметра, не превосходящего ε.

Если при произвольном стягивании области K_{ε_n} к точке M_0 последовательность интегралов

$$I_n = \iiint\limits_{T-K_{\varepsilon_n}} F\,d\tau \quad (\varepsilon_n \to 0)$$

[1]) Это соответствует в пространстве цилиндру с образующей, параллельной оси z, и сечением S в плоскости (x, y), с объемной плотностью $\mu(\xi, \eta)$, не зависящей от ζ.

имеет предел, не зависящий от выбора областей K_{ε_n}, то этот предел называется **несобственным интегралом** от функции $F(x, y, z)$ по области T и обозначается, как обычно,

$$\iiint\limits_T F\,d\tau.$$

Если существует хотя бы одна последовательность областей $\overline{K}_{\varepsilon_n}$, такая, что при $\varepsilon_n \to 0$ существует предел $\bar{I}$, а для других последовательностей K_{ε_n} этот предел имеет другие значения, или даже вообще не существует, то предел $\bar{I}$ называется условно сходящимся несобственным интегралом. Ясно, что при рассмотрении условно сходящегося несобственного интеграла $\bar{I}$ нужно указывать ту последовательность областей $\overline{K}_{\varepsilon_n}$, по которой определяется этот интеграл.

Мы ограничимся здесь рассмотрением того случая, когда подынтегральная функция имеет особенность в изолированной точке. Исследуем сходимость интегралов типа

$$\iiint\limits_T \frac{C}{R^\alpha}\,d\tau_M, \tag{8}$$

где C и $\alpha > 0$ — некоторые постоянные,

$$R = R_{MM_0} = \sqrt{(x_0-\xi)^2 + (y_0-\eta)^2 + (z_0-\zeta)^2},$$

M_0 — точка области T. Не ограничивая общности, можно считать, что T есть шар радиуса R с центром в точке M_0. Возьмем в качестве области K_{ε_n} шар радиуса ε_n с центром в точке M_0 и будем искать предел последовательности интегралов

$$\iiint\limits_{T-K_{\varepsilon_n}} \frac{C}{R^\alpha}\,d\tau = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int\limits_{\varepsilon_n}^{R} \frac{C}{r^{\alpha-2}}\,dr = 2\pi\cdot 2C\int\limits_{\varepsilon_n}^{R}\frac{dr}{r^{\alpha-2}} =$$
$$= \begin{cases} 4\pi C\left[\dfrac{1}{3-a}\,r^{3-\alpha}\right]_{\varepsilon_n}^{R}, & \text{если} \quad \alpha \neq 3, \\ 4\pi C\,[\ln r]_{\varepsilon_n}^{R}, & \text{если} \quad \alpha = 3. \end{cases}$$

Переход к пределу при ε_n, стремящемся к нулю, показывает, что при $\alpha < 3$ предел существует, при $\alpha \geqslant 3$ предела не существует.

Покажем, что если функция $F(x, y, z)$ неотрицательна и существует предел

$$I_n = \iiint\limits_{T-\overline{K}_{\varepsilon_n}} F\,d\tau \qquad (\varepsilon_n \to 0),$$

где $\bar{K}_{\varepsilon_n}$ — шар радиуса ε_n с центром в точке M_0, то существует предел интегралов I и при любом выборе последовательности областей K_{ε_n}, стягивающихся к точке M, и значение этого предела не зависит от формы области K_{ε_n}. Любую область K_{ε_n} можно заключить между двумя сферами $\bar{K}_{\varepsilon_{n_1}}$ и $\bar{K}_{\varepsilon_{n_2}}$, радиусы которых ε_{n_1} и ε_{n_2} стремятся к нулю вместе с ε_n (рис. 57). В силу положительности подынтегральной функции

$$\iiint\limits_{T-\bar{K}_{\varepsilon_{n_1}}} F\,d\tau \geqslant \iiint\limits_{T-K_{\varepsilon_n}} F\,d\tau \geqslant \iiint\limits_{T-\bar{K}_{\varepsilon_{n_2}}} F\,d\tau.$$

Отсюда видно, что

$$\lim_{n\to\infty} \iiint\limits_{T-K_{\varepsilon_n}} F\,d\tau = \lim_{n\to\infty} \iiint\limits_{T-\bar{K}_{\varepsilon_n}} F\,d\tau = I,$$

так как пределы крайних интегралов существуют и равны этому числу.

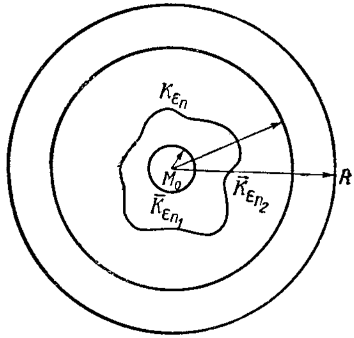

Рис. 57.

Таким образом, *в случае трех независимых переменных несобственный интеграл*

$$\iiint\limits_{T} \frac{C}{R^\alpha}\,d\tau \tag{8}$$

существует, если $\alpha < 3$, *и не существует, если* $\alpha \geqslant 3$.

Для другого числа независимых переменных критическое значение α, определяющее границы сходимости интегралов типа (8), равно числу измерений; так, например, *для двух независимых переменных интеграл*

$$\iint\limits_{\Sigma} \frac{C}{\rho^\alpha}\,d\sigma \quad \begin{array}{l} \text{при} \quad \alpha < 2 \text{ сходится}, \\ \text{при} \quad \alpha \geqslant 2 \text{ расходится}. \end{array}$$

Остановимся на признаке сходимости несобственных интегралов. Докажем, что

для сходимости несобственного интеграла

$$\iiint\limits_{T} F(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \tag{9}$$

достаточно, чтобы существовала такая функция $\bar{F}(x, y, z)$, *для которой несобственный интеграл по области* T *сходится, и чтобы имело место неравенство*

$$|F(x, y, z)| < \bar{F}(x, y, z). \tag{10}$$

Рассмотрим некоторую последовательность областей K_ε, содержащих особую точку M_0. В силу сходимости последовательности интегралов $\overline{I}_n$ от функции $\overline{F}$ для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $N(\varepsilon)$, что

$$|\overline{I}_{n_1} - \overline{I}_{n_2}| = \left| \iiint\limits_{K_{\varepsilon_{n_1}} - K_{\varepsilon_{n_2}}} \overline{F}\, d\tau \right| < \varepsilon,$$

коль скоро $n_1, n_2 > N(\varepsilon)$. Так как $\overline{F}$ является мажорантной функцией для $F(x, y, z)$, то можно написать:

$$|I_{n_1} - I_{n_2}| = \left| \iiint\limits_{K_{\varepsilon_{n_1}} - K_{\varepsilon_{n_2}}} F\, d\tau \right| \leqslant \iiint\limits_{K_{\varepsilon_{n_1}} - K_{\varepsilon_{n_2}}} |F|\, d\tau \leqslant \iiint\limits_{K_{\varepsilon_{n_1}} - K_{\varepsilon_{n_2}}} \overline{F}\, d\tau < \varepsilon, \quad (10')$$

если $n_1, n_2 > N(\varepsilon)$. Выполнение условия (10′) в силу признака сходимости Коши является достаточным для сходимости последовательности

$$I_n = \iiint\limits_{T - K_{\varepsilon_n}} F\, d\tau$$

к некоторому пределу

$$I = \lim_{n \to \infty} I_n = \iiint\limits_T F\, d\tau.$$

Нетрудно видеть, что этот предел не будет зависеть от формы областей K_{ε_n}. Тем самым существование несобственного интеграла (9) доказано.

Если же для некоторой функции $F(x, y, z)$ можно указать такую положительную функцию $\overline{F}(x, y, z)$, что $F(x, y, z) > \overline{F}$, причем несобственный интеграл от $\overline{F}$ по области T расходится, то несобственный интеграл (9) будет, очевидно, расходиться.

Следствие: *если для некоторой функции $F(M, P)$, обращающейся в бесконечность при $P = M$, имеет место неравенство*

$$|F(M, P)| < \frac{C}{R_{MP}^{\alpha}}, \quad \begin{array}{l} \alpha = \mathrm{const} < 3, \\ C = \mathrm{const} < \infty, \end{array}$$

то несобственный интеграл по области T, содержащей точку M,

$$\iiint\limits_T F(M, P)\, d\tau_P$$

сходится.

Из теории собственных интегралов, зависящих от параметров, известно, что непрерывность подынтегральной функции по параметрам и независимым переменным является достаточным условием непрерывности самого интеграла как функции параметров[1]). Для несобственных интегралов непрерывность подынтегральной функции не имеет места и поэтому указанный выше критерий неприменим. Установим критерий непрерывности несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Будем рассматривать несобственные интегралы

$$V(M)=\int_T F(P, M) f(P)\, d\tau_P, \tag{11}$$

где $F(P, M)$ — функция, обращающаяся в бесконечность при совпадении аргументов и непрерывная по M, а $f(P)$ — ограниченная функция.

Интеграл (11) *называется равномерно сходящимся в точке* M_0, *если для любого* $\varepsilon>0$ *можно указать такое* $\delta(\varepsilon)$, *что имеет место неравенство*

$$|V_{\delta(\varepsilon)}(M)|=\left|\int_{T_{\delta(\varepsilon)}} F(P, M) f(P)\, d\tau_P\right|\leqslant\varepsilon$$

для любой точки M, *расстояние которой от* M_0 *меньше* $\delta(\varepsilon)$, *и для любой области* $T_{\delta(\varepsilon)}$, *содержащей точку* M_0 *и имеющей диаметр* $d\leqslant\delta(\varepsilon)$.

Докажем, что интеграл

$$V(M)=\int_T F(P, M) f(P)\, d\tau_P,$$

равномерно сходящийся в точке M_0, есть непрерывная функция в этой точке M_0. Мы должны доказать, что для любого ε можно указать такое $\delta(\varepsilon)$, что

$$|V(M_0)-V(M)|<\varepsilon$$

при

$$|\overrightarrow{MM_0}|<\delta(\varepsilon).$$

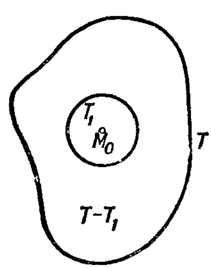

Рис. 58.

Выберем внутри области T некоторую область T_1, содержащую точку M_0 (рис. 58), и разобьем интеграл на два слагаемых

$$V=V_1+V_2,$$

где интеграл V_1 берется по области T_1, а V_2 — по области $T_2=T-T_1$. В дальнейшем мы более точно определим размеры области T_1. Рассмотрим неравенство

$$|V(M_0)-V(M)|\leqslant|V_2(M_0)-V_2(M)|+|V_1(M_0)|+|V_1(M)|$$

[1]) Будак Б. М., Фомин С. В., Кратные интегралы и ряды, «Наука», 1965, стр. 442.

и покажем, что каждое из слагаемых, стоящих справа, может быть сделано меньше $\varepsilon/3$ при достаточно малом $|\overrightarrow{M_0M}|$. Выбирая область T_1 внутри сферы радиуса $\delta(\varepsilon/3)$, будем иметь:

$$|V_1(M_0)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\ \text{ и }\ |V_1(M)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3},\quad \text{если}\quad |\overrightarrow{M_0M}|\leqslant\delta'\left(\frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Существование такого δ' вытекает из условия равномерной сходимости интеграла (11) в точке M_0. Выбор области T_1 определяет область T_2.

Так как точка M_0 лежит вне области T_2, то интеграл V_2 является непрерывной функцией в этой точке.

Отсюда следует существование такого $\delta''(\varepsilon/3)$, что

$$|V_2(M_0)-V_2(M)|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}\quad \text{при}\quad |\overrightarrow{M_0M}|\leqslant\delta''\left(\frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Полагая

$$\delta(\varepsilon)=\min\,[\delta'(\varepsilon),\ \delta''(\varepsilon)],$$

получим:

$$|V(M)-V(M_0)|\leqslant\varepsilon\quad \text{при}\quad |\overrightarrow{MM_0}|\leqslant\delta,$$

что и означает непрерывность равномерно сходящегося интеграла.

Отметим, что полученные результаты справедливы не только для интегралов по объему, но также и для интегралов по поверхностям и линиям. Это обстоятельство будет использовано нами в дальнейшем.

Рассмотрим потенциал

$$V(M)=\iiint\limits_T \frac{\rho(P)}{R_{MP}}\,d\tau_P \tag{12}$$

и компоненты силы притяжения

$$\left.\begin{aligned} X(M)&=-\iiint\limits_T \frac{\rho(P)}{R^3_{MP}}(x-\xi)\,d\tau_P;\\ Y(M)&=-\iiint\limits_T \frac{\rho(P)}{R^3_{MP}}(y-\eta)\,d\tau_P;\\ Z(M)&=-\iiint\limits_T \frac{\rho(P)}{R^3_{MP}}(z-\zeta)\,d\tau_P \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

в точках, лежащих внутри притягивающего тела T. Несобственные интегралы (12) и (13) являются сходящимися, если плотность $\rho(M)$ ограничена $|\rho(M)|\leqslant C$. Для потенциала $V(M)$ это очевидно, так как

$$\frac{|\rho|}{R}<\frac{C}{R^\alpha}\qquad(\alpha=1<3).$$

Для компонент силы притяжения это следует из неравенства

$$\frac{|\rho|}{R^2}\frac{|x-\xi|}{R}<\frac{C}{R^\alpha}\qquad (\alpha=2<3),$$

так как $|x-\xi|<R$.

Для иллюстрации понятия равномерной сходимости несобственных интегралов покажем, что интегралы (12) и (13) являются непрерывными функциями.

Для этого надо доказать, что интегралы (12) и (13) равномерно сходятся во всякой точке M_0.

Вычислим модуль интеграла[1])

$$\left|\iiint\limits_{T_\delta}\frac{\rho(P)}{R_{MP}}\,d\tau_P\right|\leqslant C\iiint\limits_{K_\delta^{M_0}}\frac{d\tau_P}{R_{MP}},$$

где $K_\delta^{M_0}$ — шар радиуса δ с центром в точке M_0, содержащий область T_δ. Однако вычисление этого интеграла по области $K_\delta^{M_0}$ с центром в точке M_0 — неудобно. Для вычисления последнего интеграла целесообразно перейти к сферической системе координат с центром в точке M. Очевидно, что

$$\left|C\iiint\limits_{K_\delta^{M_0}}\frac{d\tau_P}{R_{MP}}\right|\leqslant C\left|\iiint\limits_{K_{2\delta}^{M}}\frac{d\tau_P}{R_{MP}}\right|=C8\pi\delta^2,$$

где $K_{2\delta}^M$ — шар радиуса 2δ с центром в точке M. Если нам задано некоторое $\varepsilon>0$, то выбирая

$$\delta(\varepsilon)=\sqrt{\frac{\varepsilon}{8\pi C}},$$

мы убедимся в равномерной сходимости интеграла V.

Повторяя аналогичное рассуждение для интеграла

$$X(M)=-\iiint\limits_{T}\rho(P)\frac{x-\xi}{R_{MP}^3}\,d\tau_P,$$

получаем:

$$\left|\iiint\limits_{T_\delta}\rho(P)\frac{x-\xi}{R_{MP}^2}\,d\tau_P\right|\leqslant C\left|\iiint\limits_{K_\delta^{M_0}}\frac{d\tau_P}{R_{MP}^2}\right|\leqslant C\left|\iiint\limits_{K_{2\delta}^{M}}\frac{d\tau_P}{R_{MP}^2}\right|=8\pi\delta C\leqslant\varepsilon,$$

если

$$\delta\leqslant\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{8\pi C}.$$

---

[1]) Отметим, что интеграл (12) получается из интеграла (11) при $F(M,P)=1/R_{MP}$, $f(P)=\rho(P)$.

Таким образом, потенциал V и компоненты силы притяжения X, Y, Z являются непрерывными функциями во всем пространстве[1]).

4. Первые производные объемного потенциала. Функции, стоящие под знаком интегралов

$$X(M) = -\iiint\limits_T \rho(P)\frac{x-\xi}{R_{MP}^3}\,d\tau_P, \quad Y(M), \quad Z(M),$$

являются производными по соответствующим переменным от функции, стоящей под знаком интегралов

$$V(M) = \iiint\limits_T \frac{\rho(P)}{R_{MP}}\,d\tau_P.$$

Если для функции V законно дифференцирование под знаком интеграла, то

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}, \tag{14}$$

т. е. V является потенциалом поля, компоненты которого равны X, Y, Z.

Если точка M лежит вне области T, то функция

$$-\frac{x-\xi}{R_{MP}^3} = \frac{-(x-\xi)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{3/2}} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{R_{MP}}$$

непрерывна по обоим аргументам $M(x, y, z)$ и $P(\xi, \eta, \zeta)$. Следовательно, в этом случае дифференцирование под знаком интеграла V законно.

Производные более высокого порядка можно также вычислять при помощи дифференцирования под знаком интеграла всюду вне тела T. Отсюда в силу леммы главы III, § 3 следует, что потенциал вне притягивающих масс удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta V = 0 \quad \text{вне тела } T.$$

Докажем, что вычисление производных потенциала V можно производить путем дифференцирования под знаком интеграла и в том случае, когда точка M лежит внутри тела T.

При доказательстве мы будем пользоваться только ограниченностью функции $\rho(x, y, z)$ ($|\rho(x, y, z)| < C$), не предполагая ее непрерывности, откуда будет следовать, что функция $V(x, y, z)$ дифференцируема и в точках границы, которые можно

[1]) Равномерная сходимость интегралов $V(M)$ и $X(M)$ доказана в предположении ограниченности плотности $|\rho| < C$. Следовательно, эти интегралы непрерывны также и в точках разрыва функции ρ, например на границе области, заполненной массами.

рассматривать как точки разрыва функции $\rho(x, y, z)$, равной нулю вне тела.

Покажем, что для любого ε можно найти такое $\delta(\varepsilon)$, что

$$\left|\frac{V(x+\Delta x, y, z)-V(x, y, z)}{\Delta x}-X\right|<\varepsilon,$$

если

$$|\Delta x|<\delta(\varepsilon).$$

Заключим точку M_0 в достаточно малый шар $K_{\delta'}^{M_0}$, размеры которого мы уточним в дальнейшем, и разобьем V на два слагаемых

$$V=V_1+V_2,$$

где V_1 и V_2 соответствуют интегрированию по объему $T_1=K_{\delta'}^{M_0}$ и дополнительному объему $T_2=T-K_{\delta'}^{M_0}$. Тогда

$$\frac{V(x+\Delta x, y, z)-V(x, y, z)}{\Delta x}=$$
$$=\frac{V_1(x+\Delta x, y, z)-V_1(x, y, z)}{\Delta x}+\frac{V_2(x+\Delta x, y, z)-V_2(x, y, z)}{\Delta x}.$$

При любых фиксированных размерах области T_1

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{V_2(x+\Delta x, y, z)-V_2(x, y, z)}{\Delta x}=X_2=\iiint\limits_{T_2}\rho(\xi, \eta, \zeta)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)d\tau,$$

так как точка M_0 лежит вне области T_2.

Полагая $X=X_1+X_2$, оценим

$$\left|X-\frac{V(x+\Delta x, y, z)-V(x, y, z)}{\Delta x}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left|X_2-\frac{V_2(x+\Delta x, y, z)-V_2(x, y, z)}{\Delta x}\right|+|X_1|+$$
$$+\left|\frac{V_1(x+\Delta x, y, z)-V_1(x, y, z)}{\Delta x}\right|$$

и покажем, что каждое из слагаемых можно сделать меньше чем $\varepsilon/3$. В самом деле,

$$|X_1|=\left|\iiint\limits_{T_1}\rho\frac{x-\xi}{R^3}d\tau\right|<C\int\limits_0^{\delta'}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{r^2\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, dr}{r^2}=4\pi C\delta'<\frac{\varepsilon}{3}, \tag{15}$$

так как $\left|\frac{x-\xi}{R}\right|<1$ и $|\rho|<C$. Рассмотрим последнее слагаемое

$$|S|=\left|\frac{V_1(x+\Delta x, y, z)-V_1(x, y, z)}{\Delta x}\right|=$$
$$=\left|\frac{1}{\Delta x}\iiint\limits_{T_1}\rho\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R}\right)d\tau\right|=\left|\frac{1}{\Delta x}\iiint\limits_{T_1}\rho\frac{R-R_1}{RR_1}d\tau\right|.$$

где

$$R_1 = \sqrt{[(x+\Delta x)-\xi]^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2};$$

$$R = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

Стороны треугольника M_0MM_1 равны r, r_1 и $|\Delta x|$. Отсюда следует, что

$$|R-R_1| \leqslant |\Delta x|.$$

Поэтому

$$|S| \leqslant C\iiint\limits_{T_1}\frac{d\tau}{RR_1} \leqslant C\frac{1}{2}\left\{\iiint\limits_{T_1}\frac{d\tau}{R_1^2}+\iiint\limits_{T_1}\frac{d\tau}{R^2}\right\},$$

так как для любых чисел a и b

$$ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2).$$

При этом

$$\iiint\limits_{T_1}\frac{d\tau}{R^2} = 4\pi\delta' \quad \text{и} \quad \iiint\limits_{T_1}\frac{d\tau}{R_1^2} \leqslant \iiint\limits_{K_{2\delta'}^{M_1}}\frac{d\tau}{R_1^2} = 8\pi\delta',$$

где $K_{2\delta'}^{M_1}$ — шар радиуса $2\delta'$ с центром в точке M_1.

При соответствующем выборе δ' можно обеспечить неравенство

$$|S| < \frac{C}{2}12\pi\delta' = 6\pi C\delta' < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{16}$$

Выбирая δ' из условия (16), мы удовлетворим обоим неравенствам — (15) и (16). Фиксируем область $T_1 = K_{\delta'}^{M_0}$, а тем самым и область $T_2 = T - T_1$.

Равенство (14) в применении к выбранной области T_2 означает, что для любого ε можно указать такое δ'', что

$$\left|\frac{V_2(x+\Delta x, y, z)-V_2(x, y, z)}{\Delta x} - X_2\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

коль скоро $|\Delta x| < \delta''$. Выбирая, наконец, $\delta = \min[\delta', \delta'']$, мы получим:

$$\left|\frac{V(x+\Delta x, y, z)-V(x, y, z)}{\Delta x} - X\right| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad |\Delta x| < \delta.$$

Тем самым доказано, что существует производная $\frac{\partial V}{\partial x}$, равная

$$\frac{\partial V}{\partial x} = X. \tag{17}$$

Формулы

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Y \quad \text{и} \quad \frac{\partial V}{\partial z} = Z$$

не требуют специального доказательства.

Таким образом доказано, что дифференцирование под знаком интеграла законно и что компоненты силового поля X, Y, Z являются компонентами grad V.

5. Вторые производные объемного потенциала. Несобственный интеграл

$$\iiint\limits_T \rho(P) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right) d\tau_P = -\iiint\limits_T \rho\left(\frac{1}{R^3} - 3\frac{(x-\xi)^2}{R^5}\right) d\tau \qquad (18)$$

не сходится абсолютно для внутренних точек P тела T. В этом случае мажоранта для подынтегральной функции имеет вид

$$\frac{C}{R^\alpha} \quad \text{при} \quad \alpha = 3.$$

Установим формулы, по которым вычисляются внутри T вторые производные потенциала V в предположении непрерывности и непрерывной дифференцируемости плотности $\rho(x, y, z)$ в окрестности исследуемых точек. В частности, исследование, проводимое ниже, не будет применимо к граничным точкам, где, как правило, имеет место разрыв плотности.

Представим потенциал V в виде суммы двух слагаемых

$$V = V_1 + V_2,$$

относящихся к областям T_1 и T_2, где $T_1 = K_\delta^{M_0}$ — шар радиуса δ с центром в рассматриваемой точке M_0, внутри которого функция ρ дифференцируема.

Вторую производную от V_2 можно вычислять дифференцированием под знаком интеграла, так как точка M_0 лежит вне области T_2

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_2}{\partial x}\right) = \iiint\limits_{T_2} \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau.$$

Первая производная V_1 по x равна

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = \iiint\limits_{T_1} \rho \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau = -\iiint\limits_{T_1} \rho \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau, \qquad (19)$$

так как

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{R}\right).$$

Преобразуем интеграл (19), пользуясь формулой Остроградского

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = -\iiint\limits_{T_1} \rho \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau = -\iiint\limits_{T_1} \left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\rho \frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\right] d\tau =$$
$$= -\iint\limits_{\Sigma_\delta^{M_0}} \frac{\rho}{R} \cos\alpha \, d\sigma + \iiint\limits_{T_1} \frac{1}{R}\frac{\partial \rho}{\partial \xi} d\tau,$$

где $\Sigma_\delta^{M_0}$ — поверхность сферы, ограничивающая объем T_1, α — угол между внешней нормалью к поверхности $\Sigma_\delta^{M_0}$ и осью x. Первое слагаемое является дифференцируемой функцией в точке M_0, так как M_0 лежит вне $\Sigma_\delta^{M_0}$. Второе слагаемое в окрестности точки M_0 является также дифференцируемой функцией, так как функция ρ имеет производную в T_1. Отсюда следует, что в точке M_0 существует вторая производная функции V_1. Перейдем к ее вычислению:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\right) = -\iint\limits_{\Sigma_\delta^{M_0}} \rho \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) \cos\alpha \, d\sigma + \iiint\limits_{T_1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\partial \rho}{\partial \xi} d\tau.$$

Для второго слагаемого в точке M_0 имеет место следующая оценка:

$$\left|\iiint\limits_{T_1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)\frac{\partial \rho}{\partial \xi} d\tau\right| < C_1 \iiint\limits_{T_1} \frac{d\tau}{R^2} = C_1 4\pi\delta, \text{ если } \left|\frac{\partial \rho}{\partial \xi}\right| < C_1. \quad (20)$$

Применяя к поверхностному интегралу теорему о среднем, получим:

$$-\iint\limits_{\Sigma_\delta^{M_0}} \rho \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) \cos\alpha \, d\sigma = -\iint\limits_{\Sigma_\delta^{M_0}} \rho \frac{\cos^2\alpha}{R^2} d\sigma = -\rho^* \frac{4\pi}{3}.$$

Здесь ρ^* — значение плотности в некоторой точке $\Sigma_\delta^{M_0}$,

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{x-\xi}{R^3} = -\frac{1}{R^2}\cos\alpha$$

и, кроме того,

$$\iint\limits_{\Sigma_\delta^{M_0}} \frac{\cos^2\alpha}{R^2} d\sigma = \frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma_\delta^{M_0}} \frac{1}{R^2}(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)\, d\sigma = \frac{4}{3}\pi.$$

Переход к пределу при $\delta \to 0$ дает:

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = \lim_{\delta\to 0}\left[-\iint\limits_{\Sigma_\delta^{M_1}} \rho \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\right)\cos\alpha \, d\sigma\right] = -\frac{4\pi}{3}\rho(M_0). \quad (21)$$

Равенство

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}$$

верно при всяком δ и левая часть его не зависит от δ, поэтому

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \lim_{\delta \to 0}\left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}\right) = -\frac{4\pi}{3}\rho(M) + \lim_{\delta \to 0}\iiint_{T_2} \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau. \quad (22)$$

Из существования второй производной $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$, доказанного выше, следует существование

$$\lim_{\delta \to 0}\iiint_{T_2} \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau = \overline{\iiint_{T}} \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau. \quad (23)$$

Последний интеграл получен при специальном способе предельного перехода, когда стягиваемые к точке M_0 области являются шарами[1]), что и отмечается чертой над интегралом в формуле (23). Изменение формы этих областей, вообще говоря, может менять значение предела; интеграл (23) следует рассматривать как условно сходящийся. Таким образом,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(M_0) = \overline{\iiint_{T}} \rho \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau - \frac{4\pi}{3}\rho(M_0). \quad (24)$$

Отсюда видно, что вычисление вторых производных потенциала при помощи формального дифференцирования под знаком интеграла привело бы нас к неверному результату.

Для производных $\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$ получаются аналогичные выражения. Подставляя значения всех трех производных в выражение для оператора Лапласа, найдем:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} =$$

$$= \overline{\iiint_{T}} \rho \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{R}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{R}\right)\right] d\tau - 4\pi\rho(M_0) =$$

$$= -4\pi\rho(M_0), \quad (25)$$

так как $1/R$ — гармоническая функция[2]).

[1]) Предел (23) обычно называют **главным значением** интеграла.

[2]) Формула (25) установлена в предположении дифференцируемости функции ρ, что является достаточным условием и может быть заменено менее стеснительными условиями. Однако условия непрерывности функции $\rho(M)$ для справедливости (25) недостаточно, так как существуют примеры таких непрерывных функций $\rho(M)$, для которых объемный потенциал не имеет вторых производных.

Таким образом, объемный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta V = -4\pi\rho \quad \text{внутри тела}$$

и уравнению Лапласа

$$\Delta V = 0 \qquad \text{вне тела.}$$

Неоднородное уравнение

$$\Delta u = -f \tag{25'}$$

при условии дифференцируемости f внутри некоторой области T имеет частное решение

$$u_0 = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_T \frac{f\,d\tau}{R}.$$

Отсюда следует, в частности, что решение краевой задачи для неоднородного уравнения (25') можно свести к решению аналогичной краевой задачи для уравнения Лапласа $\Delta v = 0$, если искомую функцию представить в виде суммы $u = u_0 + v$.

6. Поверхностные потенциалы. Как показывает основная формула Грина (см. § 2)

$$u(M) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_\Sigma \left[\frac{1}{R_{MP}}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right)\right] d\sigma_P,$$

любая гармоническая функция может быть представлена с помощью интегралов, являющихся поверхностными потенциалами.

Рассмотрим поле, создаваемое массами, распределенными на поверхности[1]), и определим потенциал этого поля. Поверхностной плотностью $\mu(P)$ в точке P поверхности Σ называют предел отношения массы, находящейся на некотором элементе $d\sigma$ поверхности Σ, содержащем точку P, к его площади при стягивании $d\sigma$ к точке P. Потенциал этих масс представляется поверхностным интегралом

$$V(M) = \iint\limits_\Sigma \frac{\mu(P)}{R_{MP}}\,d\sigma_P, \tag{26}$$

называемым *потенциалом простого слоя*.

Другим типом поверхностного потенциала является потенциал двойного слоя. Перейдем к его определению.

---

[1]) Если массы с объемной плотностью ρ расположены в некотором слое толщины h около поверхности Σ и поле изучается на расстояниях, больших по сравнению с h ($h/R \ll 1$), то учет толщины поверхности, вообще говоря, не имеет смысла. Поэтому вместо объемного потенциала с плотностью ρ целесообразно рассматривать поверхностный потенциал с поверхностной плотностью $\mu = \rho h$.

Рассмотрим диполь, образованный двумя массами $-m$ и $+m$, расположенными в точках P_1 и P_2 на расстоянии Δl (рис. 59). Произведение $m \cdot \Delta l = N$ называется моментом диполя. Потенциал диполя в некоторой точке $M(x, y, z)$ равен

$$V = \frac{m}{r_2} - \frac{m}{r_1} = m\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = N\frac{1}{\Delta l}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right),$$

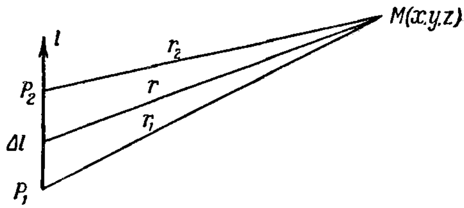

Рис. 59.

где r_1 и r_2 — расстояния точки M от точек P_1 и P_2.

Если Δl мало по сравнению с расстоянием до точки M $(\Delta l / r_1 \ll 1)$, то, пользуясь теоремой о конечных приращениях, можно написать:

$$V = N\frac{d}{dl}\left(\frac{1}{R}\right), \quad R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

где производная берется по направлению от отталкивающей массы к притягивающей и R — расстояние от точки $M(x, y, z)$ до некоторой средней точки $P(\xi, \eta, \zeta)$ отрезка Δl.

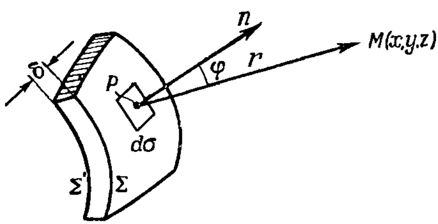

Рис. 60.

Вычислим производную по направлению $\boldsymbol{l}$:

$$\frac{d}{dl}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{R^2}\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{l}) = \frac{\cos\varphi}{R^2},$$

где вектор $\boldsymbol{r}$ направлен от диполя к фиксированной точке M, а φ есть угол между вектором $\boldsymbol{l}$ и вектором $\boldsymbol{r}$. Таким образом, потенциал диполя равен

$$V(M) = N\frac{\cos\varphi}{R^2}, \tag{27}$$

где N — момент диполя.

Пусть на двух поверхностях Σ и Σ' (рис. 60), находящихся друг от друга на малом расстоянии δ, распределены массы таким образом, что масса каждого элемента поверхности Σ' равна по величине и противоположна по знаку массе соответствующего элемента поверхности Σ. Обозначим через $\boldsymbol{n}$ общую нормаль к поверхностям Σ и Σ', направленную от отталкивающих масс к притягивающим. Переходя к пределу при $\delta \to 0$, получим двойной слой как совокупность двух простых слоев с взаимно противоположными плотностями, находящимися друг от друга на малом расстоянии. Если ν — поверхностная плотность момента, то момент элемента поверхности $d\sigma_P$ будет равен

$$dN = \nu\, d\sigma_P;$$

для потенциала элемента $d\sigma$ в точке $M(x, y, z)$ мы будем иметь:

$$\nu \frac{d}{dn_P}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right) d\sigma_P = \nu(P) \frac{\cos\varphi_1}{R_{MP}^2} d\sigma_P,$$

где $\varphi_1 = (\widehat{n \overrightarrow{PM}})$.

Назовем **потенциалом двойного слоя** интеграл

$$W(M) = -\iint_{\Sigma} \frac{d}{dn_P}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right) \nu(P)\, d\sigma_P. \tag{28}$$

Это определение, очевидно, соответствует такому случаю, когда внешняя сторона поверхности является отталкивающей, а внутренняя — притягивающей.

Очевидно, что

$$W = \iint_{\Sigma} \frac{\cos\varphi}{R_{MP}^2} \nu(P)\, d\sigma_P,$$

где φ — угол между внутренней нормалью и направлением из точки поверхности P на фиксированную точку M. Если поверхность незамкнутая, то мы должны считать ее двусторонней, так как потенциал двойного слоя определяется только для таких поверхностей.

Потенциалы простого и двойного слоев в случае двух независимых переменных имеют вид

$$V = \int_C \mu(P) \ln \frac{1}{R_{MP}}\, ds, \tag{29}$$

$$W = -\int_C \nu(P) \frac{d}{dn_P}\left(\ln \frac{1}{R_{MP}}\right) ds = \int_C \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} \nu(P)\, ds, \tag{30}$$

где C — некоторая кривая, μ — линейная плотность простого слоя, ν — плотность момента линейного двойного слоя, φ — угол между внутренней нормалью к линии C и направлением на фиксированную точку.

Если точка наблюдения $M(x, y, z)$ находится вне поверхности (вне притягивающих масс), то подынтегральные функции и их производные по x, y, z любого порядка в формулах

$$V(M) = \iint_{\Sigma} \mu(P) \frac{1}{R_{MP}} d\sigma_P, \qquad W(M) = -\iint_{\Sigma} \nu(P) \frac{d}{dn_P}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right) d\sigma_P$$

непрерывны по переменным x, y, z. Поэтому в точках, лежащих вне поверхности Σ, производные поверхностных потенциалов можно вычислять при помощи дифференцирования под знаком интеграла. Отсюда в силу принципа суперпозиции следует, что поверхностные потенциалы удовлетворяют уравнению Лапласа всюду вне притягивающих масс. Функции (29) и (30), очевидно, удовлетворяют уравнению Лапласа с двумя независимыми переменными.

Поверхностные потенциалы в точках поверхности Σ представляются несобственными интегралами. Покажем, что если поверхность имеет непрерывную кривизну, то потенциал двойного слоя в точках этой поверхности существует. Проведем доказательство для случая двух независимых переменных:

$$W = \int\limits_C \frac{\cos\varphi}{R} \nu\, ds.$$

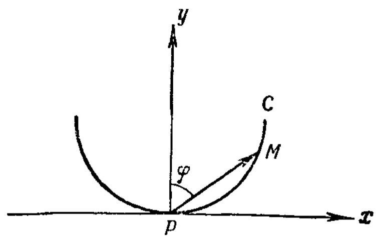

Рис. 61.

Рассмотрим кривую на плоскости (x, y) и выберем начало координат в точке P, ось x направим по касательной, а ось y — по нормали в этой точке (рис. 61). Уравнение кривой в некоторой окрестности точки P запишется в виде

$$y = y(x).$$

Кривая имеет, по предположению, непрерывную кривизну, т. е. $y(x)$ имеет непрерывную вторую производную. Поэтому

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2} y''(\vartheta x) \qquad (0 \leqslant \vartheta \leqslant 1),$$

откуда вследствие выбора координатных осей

$$y(x) = \frac{1}{2} x^2 y''(\vartheta x).$$

Отсюда будем иметь:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + x^4 \left[\frac{y''(\vartheta x)}{2}\right]^2} = x \sqrt{1 + x^2 \left[\frac{y''(\vartheta x)}{2}\right]^2},$$

$$\cos\varphi = \frac{y}{R} = \frac{xy''(\vartheta x)}{2\sqrt{1 + x^2 \left[\frac{y''(\vartheta x)}{2}\right]^2}}$$

и

$$\frac{\cos\varphi}{R} = \frac{y''(\vartheta x)}{2\left\{1 + x^2 \left[\frac{y''(\vartheta x)}{2}\right]^2\right\}}.$$

Из выражения кривизны $K=\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}$ следует $y''(0)=K(P)$. Поэтому

$$\lim_{MP\to 0}\frac{\cos\varphi}{R}=\frac{1}{2}K(P),$$

что доказывает непрерывность $\frac{\cos\varphi}{R}$ вдоль дуги, а тем самым и существование потенциала двойного слоя в точках кривой C для ограниченной функции ν.

Потенциал двойного слоя в случае трех независимых переменных также существует в точках поверхности, имеющей конечную кривизну, потому что функция $\frac{\cos\varphi}{R^2}$ имеет интегрируемую особенность порядка $1/R$. Существование потенциала простого слоя не вызывает сомнений.

7. Поверхности и кривые Ляпунова. Предположение о конечности кривизны оказывается излишним для существования поверхностных потенциалов.

Потенциалы простого и двойного слоев в точках поверхности Σ являются несобственными интегралами. Покажем, что эти интегралы сходятся для определенного класса поверхностей, называемых поверхностями Ляпунова, если плотность потенциала ограничена $|\nu(P)|<C$, где C — некоторая постоянная.

Поверхность называется *поверхностью Ляпунова*, если выполняются следующие условия:

1. В каждой точке поверхности Σ существует определенная нормаль (касательная плоскость).

2. Существует такое число $d>0$, что прямые, параллельные нормали в какой-либо точке P поверхности Σ, пересекают не более одного раза часть Σ'_P поверхности Σ, лежащую внутри сферы радиуса d с центром P. Эти участки поверхности Σ'_P называются окрестностями Ляпунова.

3. Угол $\gamma(P, P')=(\widehat{n_P, n_{P'}})$, образованный нормалями в точках P и P', удовлетворяет следующему условию:

$$\gamma(P, P')<Ar^{\delta}, \tag{31}$$

где r — расстояние между точками P и P', A — некоторая постоянная и $0<\delta\leqslant 1$.

Пусть P_0 — некоторая точка поверхности Σ. Выберем прямоугольную систему координат, помещая начало координат в точку P_0 и направляя ось z вдоль внешней нормали. Плоскость (x, y) при этом совпадает с касательной плоскостью. В силу условия 2 существует такое ρ_0, что уравнение поверхности Σ может быть представлено в виде

$$z=f(x, y)\,^{1)} \tag{32}$$

для

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}<\rho_0. \tag{33}$$

---

[1]) Отметим, что если функция $f(x, y)$ имеет непрерывные вторые производные в окрестности точки P_0, то поверхность $z=f(x, y)$ удовлетворяет условиям Ляпунова. Таким образом, поверхности с непрерывной кривизной являются поверхностями Ляпунова.

Обозначим через Σ'_{P_0} окрестность точки P_0 на поверхности Σ, определяемую условиями (32) и (33). Установим некоторые оценки для функции $f(x, y)$ и ее производных.

Из существования нормали в каждой точке поверхности (условие 1) следует дифференцируемость функции $f(x, y)$. Направляющие косинусы нормали (внешней) выражаются формулами:

$$\cos\alpha = \frac{z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}; \quad \cos\beta = \frac{z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}.$$

В силу выбора нашей системы координат $z_x(P_0) = 0$, $z_y(P_0) = 0$. Будем считать, что поверхность Σ'_{P_0} столь мала (ρ_0 столь мало), что

$$1 \geqslant \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} > \frac{1}{2}. \tag{34}$$

Обозначим через n'_P проекцию вектора n_P на плоскость (x, y) и через α', β' — углы, образованные вектором n'_P с осями x и y. Очевидно, что

$$\cos\alpha = \sin\gamma\cos\alpha', \quad \cos\beta = \sin\gamma\sin\alpha'.$$

Так как $\sin\gamma < \gamma$, то в силу условия 3

$$\sin\gamma < Ar_{PP_0}^{\delta}$$

и, следовательно,

$$|\cos\alpha| < Ar_{PP_0}^{\delta}, \quad |\cos\beta| < Ar_{PP_0}^{\delta}, \tag{35}$$

а так как $z_x = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}$, $z_y = \dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}$, причем $\dfrac{1}{\cos\gamma} < 2$, то

$$|z_x| < 2Ar_{PP_0}^{\delta}, \quad |z_y| < 2Ar_{PP_0}^{\delta}.$$

Пользуясь формулой Тейлора для функции $z = f(x, y)$ в окрестности точки $P_0(0, 0)$ будем иметь:

$$z(x, y) = z(0, 0) + xz_x(\bar{x}, \bar{y}) + yz_y(\bar{x}, \bar{y}), \quad \text{где} \quad 0 \leqslant \bar{x} \leqslant x, \quad 0 \leqslant \bar{y} \leqslant y,$$

откуда следует, что

$$|z(x, y)| < 4Ar_{PP_0}^{1+\delta}. \tag{36}$$

Полученные оценки (34), (36) позволяют доказать, что в точках, лежащих на поверхности Σ, потенциал двойного слоя

$$W(M) = \iint_{\Sigma} \frac{\cos\varphi}{R_{MP}^2} \nu(P)\, d\sigma_P \tag{28}$$

является сходящимся несобственным интегралом, если Σ — поверхность Ляпунова. Пусть $M = P_0$ — точка поверхности Σ. Выбирая систему координат, как было указано выше, представим уравнение поверхности Σ в окрестности точки P_0 в виде

$$z = f(x, y).$$

Функция $f(x, y)$ удовлетворяет условиям (34) и (36). Вычислим $\cos\varphi$, где φ — угол между направлением внутренней нормали в точке $P(\xi, \eta, \zeta)$

и направлением $\overrightarrow{PP_0}$. Нетрудно видеть, что

$$|\cos\varphi| = \left|\frac{\xi}{R}\cos\alpha + \frac{\eta}{R}\cos\beta + \frac{\zeta}{R}\cos\gamma\right| \leqslant |\cos\alpha| + |\cos\beta| + \frac{|\zeta|}{R} \leqslant$$
$$\leqslant AR^{\delta}_{PP_0} + AR^{\delta}_{PP_0} + 4AR^{\delta}_{PP_0} = 6AR^{\delta}_{PP_0}$$

и

$$\left|\frac{\cos\varphi}{R^2}\right| \leqslant 6A\frac{1}{R^{2-\delta}} \qquad (0<\delta\leqslant 1). \tag{37}$$

Представим W в виде суммы двух интегралов

$$W = W_1 + W_2,$$

где W_1 — интеграл по поверхности Σ'_{P_0}, содержащей особую точку P_0, а интеграл W_2 берется по остальной части поверхности $\Sigma - \Sigma'_{P_0}$. Так как подинтегральная функция в интеграле W_2 нигде не обращается в бесконечность, то для сходимости интеграла W достаточно убедиться в сходимости интеграла W_1. Поскольку

$$d\sigma = \frac{d\xi\, d\eta}{\cos\gamma} = \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{\cos\gamma},$$

где $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, θ — полярные координаты на плоскости (x, y), то преобразование переменных в этом интеграле дает:

$$W_1 = \iint\limits_{\Sigma'_{P_0}} \frac{\cos\varphi}{R^2_{PP_0}}\nu(P)\,d\sigma_P = \int\limits_0^{\rho_0}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi}{R^2_{PP_0}}\nu(P)\frac{1}{\cos\gamma}\rho\,d\rho\,d\theta.$$

Для подынтегральной функции в силу оценок (34), (36) и (37) имеем:

$$\left|\nu(P)\frac{\cos\varphi}{R^2}\frac{1}{\cos\gamma}\right| \leqslant \overline{F} = \frac{12AC}{\rho^{2-\delta}},$$

так как $\rho < R$.

Такой вид мажорантной функции $\overline{F}$ обеспечивает сходимость несобственного интеграла в случае двух независимых переменных (см. п. 3).

Нетрудно установить, что для поверхности Ляпунова потенциал простого слоя

$$V(M) = \iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{R_{MP}}\mu(P)\,d\sigma_P \tag{26}$$

также сходится в точках поверхности. Следует отметить, что эта сходимость имеет место и для поверхностей более широкого класса.

В случае двух независимых переменных потенциалы простого и двойного слоев сходятся в точках кривой (см. формулы (29) и (30)), если эти потенциалы берутся для кривых Ляпунова, определяемых условиями, аналогичными условиям 1—3 для поверхностей Ляпунова.

8. Разрыв потенциала двойного слоя. Покажем, что потенциал двойного слоя в некоторой точке P_0, лежащей на поверхности Σ, является разрывной функцией, для которой имеют место соотношения

$$\left.\begin{aligned} W_{\text{в}}(P_0) &= W(P_0) + 2\pi\nu(P_0), \\ W_{\text{н}}(P_0) &= W(P_0) - 2\pi\nu(P_0), \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

где $W_{\text{в}}(P_0)$ — предельное значение потенциала двойного слоя при подходе к точке P_0 с внутренней стороны, а $W_{\text{н}}(P_0)$ — предельное значение с наружной стороны поверхности[1]).

В случае двух независимых переменных соответствующие формулы имеют вид

$$\left.\begin{aligned} W_{\text{в}}(P_0) &= W(P_0) + \pi\nu(P_0), \\ W_{\text{н}}(P_0) &= W(P_0) - \pi\nu(P_0). \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Потенциал двойного слоя для двух независимых переменных выражается интегралом

$$W(M) = \int\limits_C \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} \nu(P)\, ds_P.$$

Рассмотрим некоторый элемент дуги ds, концами которого являются точки P и P_1. Проведем через точку P дугу окружности радиуса MP с центром в точке M до пересечения ее с отрезком MP_1 в точке Q, тогда с точностью до бесконечно малых высшего порядка можно написать (рис. 62):

$$ds\cos\varphi = d\sigma, \quad \frac{d\sigma}{R} = d\omega, \tag{40}$$

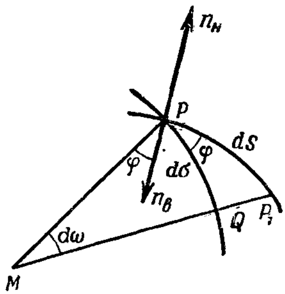

Рис. 62.

где $ds = \overset{\frown}{PP_1}$, $d\sigma = \overset{\frown}{PQ}$, $d\omega$ — угол видимости, под которым видна дуга ds из точки M. Знак $d\omega$ совпадает со знаком $\cos\varphi$, так что: $d\omega > 0$, если φ (угол между внутренней нормалью в точке P и вектором $\overrightarrow{PM}$) меньше $\pi/2$, и $d\omega < 0$, если $\varphi > \pi/2$. Если $d\omega > 0$, т. е. $\varphi < \pi/2$, то из точки M видна «внутренняя» сторона кривой C; при $d\omega < 0$ ($\varphi > \pi/2$) из точки M видна «наружная» сторона кривой. Отсюда следует, что угол видимости некоторой дуги $\overset{\frown}{P_1P_2}$ равен углу P_1MP_2, который описывает луч MP, когда точка P пробегает дугу P_1P_2.

---

[1]) Если Σ — незамкнутая поверхность, то внутренняя сторона может быть условно определена соглашением о том, какая нормаль в точке P_0 называется «внутренней» и какая — «внешней». Следует иметь в внду, что в случае незамкнутых поверхностей потенциал двойного слоя определяется только для двусторонних поверхностей.

Рассмотрим потенциал двойного слоя W^0 на замкнутой кривой C с постоянной плотностью $\nu = \nu_0 = \text{const}$. Луч MP описывает угол

$$\Omega = \begin{cases} 2\pi, & \text{если точка } M \text{ лежит внутри кривой } C, \\ \pi, & \text{если точка } M \text{ лежит на кривой } C, \\ 0, & \text{если точка } M \text{ лежит вне кривой } C, \end{cases}$$

когда точка P пробегает всю кривую C. Отсюда для потенциала W^0 получаем:

$$W^0 = \nu_0\Omega = \begin{cases} 2\pi\nu_0, & \text{если точка } M \text{ лежит внутри кривой } C, \\ \pi\nu_0, & \text{если точка } M \text{ лежит на кривой } C, \\ 0, & \text{если точка } M \text{ лежит вне кривой } C. \end{cases}$$

Таким образом, потенциал с постоянной плотностью является функцией кусочно-постоянной, причем

$$\left.\begin{aligned} W^0_{\text{в}} &= W^0_c + \pi\nu_0, \\ W^0_{\text{н}} &= W^0_c - \pi\nu_0, \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

где $W^0_{\text{в}}$, W^0_c, $W^0_{\text{н}}$ — значения потеницала внутри, на и вне кривой C.

Аналогично в случае трех независимых переменных будем иметь:

$$\frac{d\sigma\cos\varphi}{R^2} = d\omega, \tag{42}$$

где $d\omega$ — телесный угол, под которым виден элемент $d\sigma$ поверхности Σ. Пусть $d\sigma'$ — элемент сферической поверхности, получающийся при пересечении сферы, описанной радиусом MP из точки M, с конусом, имеющим вершину в точке M и опирающимся на элемент поверхности $d\sigma$. Элемент поверхности $d\sigma' = d\sigma\cos\varphi$. Отсюда и следует формула (42). Замечание, сделанное выше относительно знака $d\omega$, остается в силе, что приводит нас к формулам

$$W^0 = \nu_0\Omega = \begin{cases} 4\pi\nu_0, & \text{если точка } M \text{ лежит внутри поверхности } \Sigma, \\ 2\pi\nu_0, & \text{если точка } M \text{ лежит на поверхности } \Sigma, \\ 0, & \text{если точка } M \text{ лежит снаружи поверхности } \Sigma, \end{cases}$$

характеризующим кусочное постоянство функции W^0, а также к формулам

$$\left.\begin{aligned} W^0_{\text{в}} &= W^0_{\Sigma} + 2\pi\nu_0, \\ W^0_{\text{н}} &= W^0_{\Sigma} - 2\pi\nu_0, \end{aligned}\right\} \tag{41'}$$

где $W_в^0$, $W_н^0$ — значение потенциала W^0 внутри и снаружи поверхности Σ, а W_Σ^0 — значение W^0 на Σ.

Рассмотрим теперь потенциал двойного слоя с переменной плотностью и докажем, что в точках непрерывности плотности имеют место формулы, аналогичные формулам (41) и (41′).

Пусть P_0 — точка поверхности Σ, в которой функция $\nu(P)$ непрерывна. Введем потенциал двойного слоя W^0 с постоянной плотностью $\nu_0 = \nu(P_0)$ и рассмотрим функцию

$$I(M) = W(M) - W^0(M) = \iint_\Sigma [\nu(P) - \nu_0] \frac{\cos\varphi}{R_{MP}^2} d\sigma_P.$$

Докажем, что функция I непрерывна в точке P_0. Для этого достаточно доказать равномерную сходимость интеграла $I(M)$ в точке P_0. Зададимся некоторым числом $\varepsilon > 0$. Из непрерывности функции $\nu(P)$ в точке P_0 следует, что для любого наперед заданного числа $\eta > 0$ можно найти Σ_1 — окрестность точки P_0 на поверхности Σ — такую, что

$$|\nu(P) - \nu(P_0)| < \eta,$$

если $P \in \Sigma_1$. Представим интеграл I в виде суммы

$$I = I_1 + I_2,$$

где интеграл I_1 берется по поверхности Σ_1, а I_2 — по поверхности $\Sigma_2 = \Sigma - \Sigma_1$. Из определения Σ_1 следует:

$$|I_1| < \eta B_\Sigma,$$

где B_Σ — постоянная, определяемая условием

$$\iint_\Sigma \frac{|\cos\varphi|}{R_{MP}^2} d\sigma_P \leqslant B_\Sigma \tag{43}$$

при всевозможных положениях точки M, не зависящая от выбора поверхности Σ_1. Подробнее относительно этой постоянной будет сказано ниже.

Выбирая $\eta = \varepsilon / B_\Sigma$, мы убеждаемся в том, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое Σ_1, содержащее P_0, что

$$|I_1(M)| < \varepsilon$$

при любом положении точки M. Отсюда и следует равномерная сходимость интеграла $I(M)$ в точке P_0, а также его непрерывность в этой точке.

Если $W_в(P_0)$ и $W_н(P_0)$ — пределы потенциала $W(M)$ при $M \to P_0$ с внутренней и наружной сторон поверхности Σ, то

$$W_в(P_0) = W_в^0(P_0) + I(P_0) = W^0(P_0) + I(P_0) + 2\pi\nu_0 = W(P_0) + 2\pi\nu(P_0)$$

и аналогично

$$W_{\text{н}}(P_0) = W(P_0) - 2\pi\nu(P_0).$$

Справедливость формулы (38) установлена.

Проведенное выше доказательство справедливо для поверхностей, удовлетворяющих условию ограниченности (43). Для выпуклой поверхности, которую всякий луч из точки M пересекает не более двух раз, $B_\Sigma \leqslant 8\pi$; для поверхностей, состоящих из конечного числа выпуклых частей, B_Σ также ограничено. Таким образом, наше доказательство относится к весьма широкому классу поверхностей.

Все проведенные выше рассуждения остаются в силе и для функций двух независимых переменных. В этом случае формулы (41) принимают вид

$$W_{\text{в}}(P_0) = W(P_0) + \pi\nu(P_0),$$
$$W_{\text{н}}(P_0) = W(P_0) - \pi\nu(P_0).$$

9. Свойства потенциала простого слоя. В отличие от потенциала двойного слоя потенциал простого слоя

$$V(M) = \iint_\Sigma \frac{1}{R_{MP}} \mu(P)\, d\sigma_P \tag{26}$$

непрерывен в точках поверхности Σ. Убедимся в этом для случая гладкой поверхности Σ. Для этого достаточно установить равномерную сходимость интеграла $V(M)$ в точках поверхности Σ.

Действительно, пусть P_0 — некоторая точка поверхности Σ. Представим потенциал V в виде суммы

$$V = \iint_{\Sigma_1} \frac{1}{R_{MP}} \mu(P)\, d\sigma_P + \iint_{\Sigma_2} \frac{1}{R_{MP}} \mu(P)\, d\sigma_P = V_1 + V_2,$$

где Σ_1 — достаточно малая часть поверхности Σ, содержащаяся в сфере радиуса δ с центром в точке P_0. Величину δ мы более точно определим в дальнейшем.

Рассмотрим систему координат с началом в точке P_0, ось z которой направлена по внешней нормали в P_0. Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка, отстоящая от $P_0(0, 0, 0)$ на расстоянии $MP_0 < \delta$. Обозначим через Σ_1' проекцию Σ_1 на плоскость (x, y), а через $K_{2\delta}^{M'}$ — круг радиуса 2δ с центром в точке $M'(x, y, 0)$, целиком содержащий область Σ_1'. Предполагая ограниченность функции

$$|\mu(P)| < A$$

и принимая во внимание, что

$$d\sigma = \frac{d\sigma'}{\cos\gamma} = \frac{d\xi\, d\eta}{\cos\gamma}$$

и

$$R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \geqslant \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} = \rho,$$

получим:

$$|V_1(M)| < A \iint\limits_{\Sigma_1} \frac{d\sigma}{R_{MP}} = A \iint\limits_{\Sigma_1'} \frac{d\sigma'/\cos\gamma}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} \leqslant$$

$$\leqslant 2A \iint\limits_{\Sigma_1'} \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \leqslant 2A \iint\limits_{K_{2\delta}^{M'}} \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}},$$

если δ настолько мало, что $\cos\gamma > {}^1/_2$.

Введем в плоскости (x, y) полярную систему координат (ρ, φ) с началом в точке M'. Тогда можно написать

$$|V_1(M)| < 2A \iint\limits_{K_{2\delta}^{M'}} \frac{d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = 2A \int\limits_0^{2\delta} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\rho\, d\rho\, d\varphi}{\rho} = 8A\pi\delta.$$

Выбирая $\delta = \varepsilon/8\pi A$, будем иметь

$$|V_1(M)| < \varepsilon,$$

если $MP_0 < \delta$. Следовательно, $V(M)$ равномерно сходится во всякой точке $P_0 \in \Sigma$ и является непрерывной функцией в этой точке.

Обратимся теперь к изучению поведения нормальных производных потенциала простого слоя на поверхности. Покажем, что они имеют на Σ разрыв такого же типа, как и потенциал двойного слоя.

Внешняя и внутренняя нормальные производные функции V, $\dfrac{dV}{dn_{\text{н}}}$ и $\dfrac{dV}{dn_{\text{в}}}$, определяются следующим образом. Пусть P_0 — некоторая точка Σ. Из точки P_0 проведем ось z, которую можно направить либо вдоль внешней, либо вдоль внутренней нормали.

Рассмотрим производную $\dfrac{dV}{dz}$ в некоторой точке M оси z. Обозначим $\left(\dfrac{dV}{dz}\right)_{\text{в}}$ и $\left(\dfrac{dV}{dz}\right)_{\text{н}}$ пределы производной $\dfrac{dV}{dz}$ при стремлении точки M к точке P_0 с внутренней или наружной стороны поверхности Σ. Если ось z направлена по внешней (внутренней) нормали, то эти значения называются внутренними и внешними предельными значениями производной по внешней (внутренней) нормали в точке P_0[1]).

Исследуем разрывы внутренней нормальной производной потенциала простого слоя на Σ. Производная $\frac{dV}{dz}$ в точке M оси z, направленной по внутренней нормали, равна

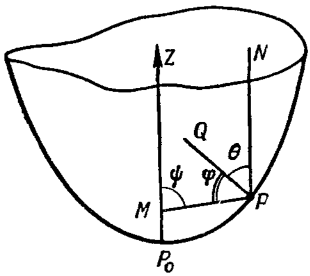

Рис. 63.

$$\frac{dV}{dz}(M) = \iint_{\Sigma} \mu(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R_{MP}}\right) d\sigma_P = \iint_{\Sigma} \frac{\cos\psi}{R_{MP}^2} \mu(P)\, d\sigma_P, \quad (44)$$

где ψ — угол между осью z и вектором $\overrightarrow{MP}$. Проведем из точки P (рис. 63) нормаль PQ и прямую PN, параллельную оси z (нормали в точке P_0), и обозначим через θ угол NPQ, равный углу между нормалями в точках P и P_0[2]). Выражение для потенциала двойного слоя $W(M)$ содержит множитель $\frac{\cos\varphi}{R^2}$, где $\varphi = \angle MPQ$. Так как угол MPN равен $\pi - \psi$, то

$$\cos(\pi-\psi) = \cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta\cos\Omega = -\cos\psi,$$

где Ω — двугранный угол с ребром PQ[3]). Отсюда следует, что

$$\frac{\partial V}{\partial z}(M) = -\iint_{\Sigma} (\mu\cos\theta) \frac{\cos\varphi}{R^2}\, d\sigma - \iint_{\Sigma} \mu\sin\theta\cos\Omega \frac{\sin\varphi}{R^2}\, d\sigma = -W_1 - I(M), \quad (45)$$

---

[1]) Предел разностного отношения $\frac{V(M)-V(P_0)}{MP_0}$ при $M \to P_0$ равен пределу извне для производной по внешней нормали или пределу изнутри для производной по внутренней нормали, в зависимости от того, с какой стороны точка M приближается к точке P_0.

[2]) Очевидно, что θ и $\sin\theta$ стремятся к нулю, когда $P \to P_0$. Если поверхность обладает конечной кривизной в окрестности точки P_0, т. е. ее уравнение можно представить в виде

$$z = f(x, y),$$

где $f(x, y)$ имеет вторые производные, то $\sin\theta$ будет дифференцируемой функцией x, y и, следовательно,

$$\sin\theta < Ar$$

(для поверхностей Ляпунова $\sin\theta < Ar^{\delta}$).

[3]) Если направление PQ принять за ось новой сферической системы, то эта формула совпадает с формулой (13) на стр. 326.

где $W_1(M)$ — потенциал двойного слоя с плотностью $\mu_1=\mu\cos\theta$, имеющий разрыв на поверхности Σ. Очевидно, что интеграл $I(M)$ является функцией, непрерывной в точке P_0, так как $I(M)$ сходится равномерно в этой точке (см. примечание, стр. 358).

Возвращаясь к формуле (45), видим:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{\text{в}} &= -W_1(P_0)-2\pi\mu_1(P_0)-I(P_0),\\ \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_{\text{н}} &= -W_1(P_0)+2\pi\mu_1(P_0)-I(P_0).\end{aligned}\right\}\tag{46}$$

Обозначим

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0=-W_1(P_0)-I(P_0)=$$
$$=\left[-\iint\limits_{\Sigma}(\mu\cos\theta)\frac{\cos\varphi}{R^2}\,d\sigma-\iint\limits_{\Sigma}\mu\sin\theta\cos\Omega\frac{\sin\varphi}{R^2}\,d\sigma\right]_{M=P_0}=$$
$$=\iint\limits_{\Sigma}\mu\frac{\cos\psi_0}{R^2_{P_0P}}\,d\sigma,$$

где ψ_0 — угол между осью z и вектором $\overrightarrow{P_0P}$.

Замечая, что $\mu_1(P_0)=\mu(P_0)$, находим:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial V}{\partial n_{\text{в}}}\right)_{\text{в}} &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_{\text{в}}}\right)_0-2\pi\mu(P_0),\\ \left(\frac{\partial V}{\partial n_{\text{в}}}\right)_{\text{н}} &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_{\text{в}}}\right)_0+2\pi\mu(P_0),\end{aligned}\right\}\tag{47}$$

так как по условию ось z направлена по внутренней нормали. Если ось z направить по внешней нормали, то знак $\cos\psi$ изменяется, и мы получим:

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial V}{\partial n_{\text{н}}}\right)_{\text{в}} &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_{\text{н}}}\right)_0+2\pi\mu(P_0),\\ \left(\frac{\partial V}{\partial n_{\text{н}}}\right)_{\text{н}} &= \left(\frac{\partial V}{\partial n_{\text{н}}}\right)_0-2\pi\mu(P_0).\end{aligned}\right\}\tag{48}$$

Для случая двух переменных имеют место аналогичные формулы с заменой 2π на π.

10. Применение поверхностных потенциалов к решению краевых задач. Метод разделения переменных и метод функции источника позволяют получить явное выражение для решения краевых задач только в случае областей простейшего вида. Сведение краевых задач для уравнения Лапласа (или Пуассона) при помощи поверхностных потенциалов к интегральным уравнениям, с одной стороны, удобно для теоретического исследования вопроса о разрешимости и единственности краевых задач, с другой стороны, дает возможность эффективного численного решения краевых задач для областей сложной формы. Рассмотрим внутренние краевые задачи для некоторого контура C:

найти функцию u, гармоническую в области T, ограниченной контуром C, и удовлетворяющую на C граничным условиям

$$u|_C = f \text{ — первая краевая задача,}$$

или

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C = f \text{ — вторая краевая задача.}$$

Аналогично ставятся внешние краевые задачи[1].

Будем искать решение внутренней первой краевой задачи в виде потенциала двойного слоя

$$W(M) = \int\limits_C \frac{\cos\varphi}{R_{MP}} \nu(P)\,ds_P = -\int\limits_C \frac{d}{dn_P}\left(\ln\frac{1}{R_{MP}}\right)\nu(P)\,ds_P.$$

При любом выборе $\nu(P)$ функция $W(M)$ удовлетворяет уравнению Лапласа внутри C. Функция $W(M)$ разрывна на контуре C. Для выполнения граничного условия, очевидно, надо, чтобы

$$W_{\text{в}}(P_0) = f(P_0).$$

Принимая во внимание формулы (39), получаем уравнение для определения функции $\nu(P)$

$$\pi\nu(P_0) + \int\limits_C \frac{\cos\varphi}{R_{P_0P}} \nu(P)\,ds_P = f(P_0). \tag{49}$$

Если обозначить через s_0 и s дуги контура C, соответствующие точкам P_0 и P, то уравнение (49) можно переписать в виде

$$\pi\nu(s_0) + \int\limits_0^L K(s_0, s)\,\nu(s)\,ds = f(s_0), \tag{50}$$

где L — длина контура C и

$$K(s_0, s) = -\frac{d}{dn_P}\left(\ln\frac{1}{R_{PP_0}}\right) = \frac{\cos\varphi}{R_{PP_0}} \tag{51}$$

---

[1]) При постановке второй краевой задачи как внутренней, так и внешней, в граничном условии нормаль будем считать внутренней.

— ядро этого интегрального уравнения, являющегося интегральным уравнением типа Фредгольма второго рода[1]). Для внешней задачи получается аналогичное уравнение

$$-\pi\nu(s_0) + \int_0^L K(s_0, s)\,\nu(s)\,ds = f(s_0). \tag{52}$$

Для второй краевой задачи получаются уравнения

$$-\pi\mu(s_0) + \int_0^L K_1(s_0, s)\,\mu(s)\,ds = f(s_0) \quad \text{(внутренняя задача)}, \tag{53}$$

$$\pi\mu(s_0) + \int_0^L K_1(s_0, s)\,\mu(s)\,ds = f(s_0) \quad \text{(внешняя задача)}, \tag{54}$$

где

$$K_1(s_0, s) = \frac{\partial}{\partial n_{P_0}}\left(\ln\frac{1}{R_{PP_0}}\right) = \frac{\cos\psi_0}{R_{PP_0}}\,{}^{2)}, \tag{55}$$

если ее решение искать в виде потенциала простого слоя

$$u(M) = \int_C \ln\frac{1}{R_{MP}}\,\mu(P)\,ds_P.$$

Вопросы, связанные с разрешимостью этих уравнений, будут рассматриваться в п. 11 настоящего параграфа.

Рассмотрим краевые задачи для некоторых простейших областей, для которых соответствующие интегральные уравнения легко разрешимы.

1. Первая краевая задача для круга. Если контур C является окружностью радиуса R, то внутренняя нормаль

---

[1]) Интегральные уравнения, содержащие интегралы с постояниымн пределами, называются уравнениями Фредгольма:

$$\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = f(x) \text{ — первого рода,}$$

$$\varphi(x) + \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = f(x) \text{ — второго рода.}$$

[2]) Нетрудно видеть, что $K(s_0, s) = K_1(s, s_0)$. Такие ядра называются сопряженными, а сответствующие им уравнения называются сопряженнымн интегральными уравнениями.

в точке P направлена по диаметру и

$$\frac{\cos\varphi}{R_{PP_0}}=\frac{1}{2R},$$

так как φ есть угол P_0PP' (рис. 64). Интегральное уравнение для функции ν принимает вид

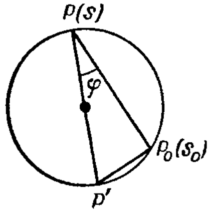

Рис. 64.

$$\nu(s_0)+\frac{1}{\pi}\int\limits_C\frac{1}{2R}\nu(s)\,ds=\frac{1}{\pi}f(s_0). \qquad (56)$$

Нетрудно видеть, что его решением является функция

$$\nu(s)=\frac{1}{\pi}f(s)+A, \qquad (57)$$

где A — некоторая постоянная, подлежащая определению. Подставляя предполагаемую форму решения в уравнение (56), имеем:

$$\frac{1}{\pi}f(s_0)+A+\frac{1}{\pi}\int\limits_C\frac{1}{2R}\left(\frac{1}{\pi}f(s)+A\right)ds=\frac{1}{\pi}f(s_0),$$

откуда находим для постоянной A выражение через заданную функцию

$$A=-\frac{1}{4\pi^2R}\int\limits_C f(s)\,ds.$$

Таким образом,

$$\nu(s)=\frac{1}{\pi}f(s)-\frac{1}{4\pi^2R}\int\limits_C f(s)\,ds \qquad (58)$$

является решением интегрального уравнения (56).

Соответствующий потенциал двойного слоя равен

$$W(M)=\int\limits_C\frac{\cos\varphi}{R_{MP}}\nu(P)\,ds_P=\int\limits_C\frac{\cos\varphi}{R_{MP}}\left[\frac{1}{\pi}f(s)-\frac{1}{4\pi^2R}\int\limits_C f(s)\,ds\right]ds.$$

Преобразуем правую часть предыдущей формулы, предполагая, что M лежит внутри C:

$$W=\frac{1}{\pi}\int\limits_C\frac{\cos\varphi}{R_{MP}}f(s)\,ds-\left(\frac{1}{4\pi^2R}\int\limits_C f(s)\,ds\right)\int\limits_C\frac{\cos\varphi}{R_{MP}}ds=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_C\frac{\cos\varphi}{R_{MP}}f(s)\,ds-\left(\frac{1}{4\pi^2R}\int\limits_C f(s)\,ds\right)\cdot 2\pi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_C\left(\frac{\cos\varphi}{R_{MP}}-\frac{1}{2R}\right)f(s)\,ds. \qquad (59)$$

Из $\triangle OPM$ (рис. 65) видно, что

$$K=\frac{\cos\varphi}{R_{MP}}-\frac{1}{2R}=\frac{2R\cos\varphi-R_{MP}}{2RR_{MP}}=\frac{2RR_{MP}\cos\varphi-R_{MP}^2}{2RR_{MP}^2}=$$

$$=\frac{R^2-\rho_0^2}{2R\left[R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0)\right]},\qquad(60)$$

так как

$$\rho_0^2=R^2+R_{MP}^2-2RR_{MP}\cos\varphi.$$

Подставляя выражение (60) для K в формулу (59), получаем интеграл Пуассона

$$u=W(\rho_0,\theta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-\rho_0^2)f(\theta)\,d\theta}{R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0)},\qquad(61)$$

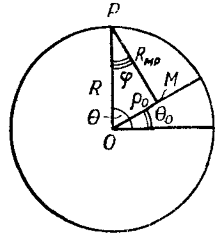

Рис. 65.

дающей решение первой краевой задачи для круга.

Проведенные в этом пункте рассуждения показывают, что при любой непрерывной функции f формула (61) определяет гармоническую функцию, непрерывно примыкающую к граничным значениям f.

Если функция f кусочно-непрерывна, то в силу свойства потенциала двойного слоя функция W также непрерывна во всех точках непрерывности f. Из ограниченности функции f

$$|f|<C$$

следует ограниченность функции (61)

$$|W(\rho_0,\theta_0)|<C\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-\rho_0^2)}{R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0)}\,d\theta=C,$$

так как[1])

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2-\rho_0^2}{R^2+\rho_0^2-2R\rho_0\cos(\theta-\theta_0)}\,d\theta=1.\qquad(62)$$

2. Первая краевая задача для полупространства: найти гармоническую функцию, непрерывную всюду в области $z\geqslant 0$, принимающую на границе $z=0$ заданное значение $f(x,y)$.

---

[1]) Равенство (62) следует из того, что левая часть представляет решение первой краевой задачи при $f=1$.

Будем искать решение этой задачи в виде потенциала двойного слоя

$$W(x, y, z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int \frac{\cos\varphi}{R^2}\nu(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta, \qquad R^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2.$$

В данном случае

$$\frac{\cos\varphi}{R^2}=\frac{z}{R^3}\,\frac{z}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2]^{3/2}}$$

и ядро интегрального уравнения

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\cos\varphi}{R^2}\right)_{z=0}=0.$$

Таким образом, плотность потенциала двойного слоя

$$\nu(P)=\frac{1}{2\pi}f(P)$$

и искомая функция равна

$$u(x, y, z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int\frac{z}{[(x-\xi)^2-(y-\eta)^2+z^2]^{3/2}}f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

Нетрудно показать, что $u(x, y, z)$ равномерно стремится к нулю при $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\to\infty$, если этим свойством обладает функция f.

11. Интегральные уравнения, соответствующие краевым задачам. При решении краевых задач для уравнения Лапласа с помощью потенциалов простого и двойного слоев мы пришли к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода (50).

Условия разрешимости интегральных уравнений Фредгольма второго рода с непрерывным ядром и ограниченной (интегрируемой) правой частью сходны с условиями разрешимости систем линейных алгебраических уравнений (к которым они сводятся, если интеграл заменить интегральной суммой). Первая теорема Фредгольма заключается в следующем:

неоднородное интегральное уравнение второго рода имеет решение, и притом единственное, если соответствующее однородное уравнение имеет только нулевое решение[1]).

---

[1]) Для кривых с ограниченной кривизной теория Фредгольма применима непосредственно, так как ядро интегрального уравнения (50) непрерывно.

Теория Фредгольма применима также в том случае, когда непрерывно одно из повторных ядер:

$$K^{(n+1)}(P_1, P_2)=\int_\Sigma\int K^{(1)}(P_1, M)\,K^{(n)}(M, P_2)\,d\sigma_M, \qquad K^{(1)}(P, M)=K(P, M).$$

Докажем, что если Σ — поверхность Ляпунова, то повторные ядра нашего уравнения, начиная с некоторого номера, непрерывны. Как мы видели, Докажем, опираясь на сформулированную теорему, что интегральное уравнение (50) имеет единственное решение.

Ограничимся рассмотрением выпуклых контуров, не содержащих прямолинейных участков границы. В этом случае ядро

для поверхностей Ляпунова

$$\left|\frac{\cos\varphi}{r^2}\right| < \frac{C}{r^{2-\delta}}.$$

Повторные ядра могут быть представлены в виде

$$K_{1,2}(P_1, P_2) = \iint\limits_{\Sigma} K_1(P_1, M) K_2(M, P_2)\, d\sigma_M.$$

Покажем, что если $|K_i| < \dfrac{C_i}{r_i^{2-\alpha_i}}$ $(r_i = P_i M;\ \alpha_i > 0;\ i = 1, 2)$, то

$$|K_{1,2}| < \frac{C}{r^{2-\alpha_1-\alpha_2}}, \quad \text{если} \quad \alpha_1 + \alpha_2 < 2, \quad r = P_1 P_2.$$

Очевидно, что эту оценку достаточно установить для случая, когда точка P_2 лежит в окрестности Ляпунова Σ_0 точки P_1, причем вместо интеграла по Σ_0 можно рассматривать интеграл по проекции S_0 этой окрестности на касательную плоскость в точке P_1 в силу того, что

$$1 \geqslant \frac{\rho(P, M)}{r(P, M)} \geqslant B > 0$$

(где $\rho(P, M)$ — расстояние между проекциями точек P и M на касательную плоскость, B — некоторая постоянная), а также в силу связи между элементом поверхности $d\sigma$ и его проекцией dS: $d\sigma = dS/\cos\gamma$, где согласно формуле (34) $\cos\gamma > {}^1/_2$.

Для плоской области справедлива лемма:

если $|K_i| < \dfrac{C_i}{r_i^{2-\alpha_i}}$, то

$$|I| = \left|\iint\limits_{S_0} K_1(P_1, M) K_2(M, P_2)\, dx\, dy\right| < \frac{C}{r^{2-\alpha_1-\alpha_2}}.$$

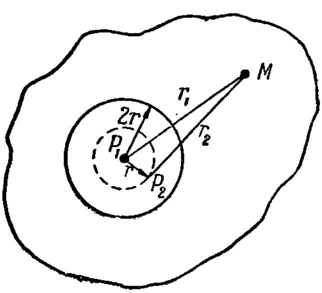

Рис. 66.

Обозначим через R диаметр области S_0. Разобьем интеграл I на два интеграла: I_1 — взятый по кругу G_1 радиуса $2r$ с центром в точке P_1 и I_2 — распространенный на оставшуюся область G_2 (рис. 66). Так как для точек M, лежащих в G_2,

$$2 \geqslant \frac{r_1}{r_2} \geqslant \frac{2}{3} \quad \left(\begin{array}{l} r_1 \leqslant r_2 + r \leqslant 2r_2, \\ r_2 \leqslant r_1 + r \leqslant r_1 + \dfrac{r_1}{2} = \dfrac{3r_1}{2} \end{array}\right),$$

уравнения (50) $K(P_0, P)$ неотрицательно, так как

$$K(P_0, P)\,ds_P = d\omega,$$

где $d\omega$ есть угол видимости дуги dS_P из точки P_0.

Рассмотрим прежде всего первую краевую задачу для внутренней области. Однородное уравнение, соответствующее уравнению (50), имеет вид

$$\pi\nu(s_0) + \int_0^L K(s_0, s)\,\nu(s)\,ds = 0. \tag{63}$$

Как мы видели (см. п. 8), имеет место равенство

$$\int_0^L K(s_0, s)\,ds = \pi,$$

пользуясь которым однородное уравнение (63) можно записать

то для интеграла I_2 получаем оценку

$$|I_2| < 4C_1C_2 \left| \int_0^{2\pi} \int_{2r}^{R} \frac{1}{r_1^{4-\alpha_1-\alpha_2}}\, r_1\, dr_1\, d\varphi \right| < \begin{cases} \dfrac{C_3}{r^{2-\alpha_1-\alpha_2}}, & \alpha_1+\alpha_2<2, \\ C_3R^{\alpha_1+\alpha_2-1}, & \alpha_1+\alpha_2>2. \end{cases}$$

Производя в интеграле по G_1 замену переменных $x = rx'$, $y = ry'$, получаем:

$$|I_1| < \left| \frac{1}{r^{2-\alpha_1-\alpha_2}} \iint\limits_{G_1'} \frac{C_1C_2}{r_1'^{2-\alpha_1} r_2'^{2-\alpha_2}}\, dx'\, dy' \right|.$$

В последнем интеграле, взятом по кругу G_1' с радиусом, равным $2r$, r_1' есть расстояние от центра, r_2' — от середины радиуса, вследствие чего этот интеграл сходится, причем он не зависит от положения точки P_2, т. е. от r.

Отсюда

$$|I_1| < \frac{C_4}{r^{2-\alpha_1-\alpha_2}}.$$

Положив $C_3 + C_4 = C$, получим искомое неравенство

$$|I| < \begin{cases} \dfrac{C}{r^{2-\alpha_1-\alpha_2}}, & \alpha_1+\alpha_2<2, \\ CR^{\alpha_1+\alpha_2-2}, & \alpha_1+\alpha_2>2. \end{cases}$$

Отсюда следует, что, начиная с некоторого номера, интегралы, производящие повторные ядра, ограничены и равномерно сходятся, т. е. являются непрерывными функциями своих аргументов.

в виде

$$\int_0^L [\nu(s_0) + \nu(s)] K(s_0, s)\, ds = 0. \tag{64}$$

Пусть $P_0^*(s_0^*)$ — точка контура C, в которой функция $|\nu(s)|$ достигает своего максимального значения. Отсюда следует, что сумма $\nu(s_0^*) + \nu(s)$ знакопостоянна. Тогда, полагая в (64) $s_0 = s_0^*$ и пользуясь тем, что $K(s_0, s) \geqslant 0$, получим равенство

$$\nu(s_0^*) + \nu(s) = 0$$

или

$$\nu(s) = -\nu(s_0^*),$$

противоречащее непрерывности в точке s_0^*, если только $\nu(s_0^*) \neq 0$.

Следовательно, однородное уравнение (63) имеет только нулевое решение, и тем самым неоднородное уравнение имеет единственное решение при любой функции f[1]).

Внешняя вторая краевая задача, как мы видели (см. п. 10), сводится к интегральному уравнению

$$\pi\mu(s_0) + \int_0^L K_1(s_0, s)\, \mu(s)\, ds = f(s_0), \tag{54}$$

ядро которого $K_1(s_0, s)$ является сопряженным по отношению к ядру $K(s_0, s)$, т. е. $K_1(s_0, s) = K(s, s_0)$.

Вторая теорема Фредгольма состоит в следующем:

число линейно-независимых решений некоторого однородного интегрального уравнения равно числу линейно-независимых решений сопряженного уравнения.

Из этой теоремы следует, что решение уравнения (54) определено однозначно.

Внешней первой краевой задаче соответствует уравнение

$$-\pi\nu(s_0) + \int_0^L K(s_0, s)\, \nu(s)\, ds = f(s_0). \tag{52}$$

Однородное уравнение ($f = 0$) согласно предыдущему может быть приведено к виду

$$\int_0^L [\nu(s_0) - \nu(s)] K(s_0, s)\, ds = 0. \tag{65}$$

---

[1]) При наличии прямолинейных участков границы рассуждения несколько осложняются, хотя доведение их до конца не представляет затруднений.

Обозначая через s_0^* точку, в которой $|\nu(s)|$ достигает максимального значения, получим из (65)

$$\nu(s^*) = \nu(s).$$

Отсюда следует, что только

$$\nu(s) = \text{const} = \nu_0$$

является решением однородного уравнения. В силу второй теоремы Фредгольма, сопряженное однородное уравнение будет иметь единственное решение.

Условие разрешимости неоднородного уравнения дает третья теорема Фредгольма:

если некоторое однородное интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds$$

имеет k *линейно-независимых решений* $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, *то сопряженное неоднородное уравнение*

$$\psi(x) = \int_a^b K(s, x)\,\psi(s)\,ds + f(x)$$

имеет решение, если $\int_a^b f(x)\,\varphi_i(x)\,dx = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k.$

Применяя третью теорему Фредгольма к уравнению (53), соответствующему внутренней второй краевой задаче, получим условие разрешимости этой задачи

$$\int_0^L f(s)\,ds = 0, \tag{66}$$

с которым мы уже встречались в § 1.

Условие разрешимости внешней первой краевой задачи имеет вид

$$\int_0^L f(s)\,h(s)\,ds = 0, \tag{67}$$

где $h(s)$ — решение однородного уравнения, соответствующего (53). Нетрудно выяснить физический смысл этой функции.

Пусть цилиндрический проводник, имеющий в сечении форму S, заряжен до некоторого потенциала V_0. В проводнике весь заряд находится на поверхности. Обозначим $\bar{h}(s)$ плотность поверхностных зарядов. Потенциал, создаваемый этими поверхностными зарядами, является потенциалом простого слоя с плотностью $\bar{h}(s)$ и выражается формулой (29). Нормальные производные его изнутри равны нулю, так как внутри проводника $V = \text{const}$. Поэтому функция $\bar{h}(s)$ удовлетворяет однородному уравнению (53) и пропорциональна функции $h(s)$, определенной выше, что и выясняет физический смысл этой функции.

Таким образом, интегральные уравнения, к которым сводятся краевые задачи, разрешимы всегда для внутренней первой и внешней второй краевых задач и разрешимы при условиях (66) и (67) для внутренней второй и внешней первой краевых задач[1]).

ЗАДАЧИ К ГЛАВЕ IV

1. Найти функцию u, гармоническую внутри круга радиуса a и принимающую на окружности C значения

а) $u|_C = A\cos\varphi$;

б) $u|_C = A + B\sin\varphi$.

2. Решить уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ внутри прямоугольника $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$ при граничных условиях

$$u|_{x=0} = f_1(y), \qquad u|_{y=0} = f_2(x), \qquad u|_{x=a} = 0, \qquad u|_{y=b} = 0.$$

Доказать, что получающиеся при этом формулы дают решение задачи для произвольной кусочно-непрерывной функции, заданной на границе.

Решить задачу для частного случая

$$f_1(y) = Ay(b-y), \qquad f_2(x) = B\cos\frac{\pi}{2a}x, \qquad f_3 = f_4 = 0.$$

3. Решить уравнение $\Delta u = 1$ для круга радиуса a при граничном условии $u|_{r=a} = 0$.

4. Решить уравнение $\Delta u = Axy$ для круга радиуса a с центром в точке $(0, 0)$ при граничном условии $u|_{r=a} = 0$.

5. Решить уравнение $\Delta u = A + B(x^2 - y^2)$ в кольце $a \leqslant \rho \leqslant b$, если

$$u|_{\rho=a} = A_1, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=b} = 0.$$

Начало координат находится в центре кольца.

6. Построить функцию источника для уравнения Лапласа (первая краевая задача): а) для полукруга, б) для кольца, в) для слоя $(0 \leqslant z \leqslant l)$.

7. Найти гармоническую функцию внутри кольца $a \leqslant \rho \leqslant b$, удовлетворяющую следующим граничным условиям:

$$u|_{\rho=a} = f_1(\varphi), \qquad u|_{\rho=b} = f_2(\varphi).$$

---

[1]) См. подробнее И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, § 39, Физматгиз, 1961.

8. Найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в полуплоскости $y \geqslant 0$ с граничным условием

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ u_0 & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

9. Найти функцию $u(\rho, \varphi)$, гармоническую внутри кругового сектора $\rho \leqslant a$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$ при граничных условиях:

а) $u|_{\varphi=0} = q_1$, $u|_{\varphi=\varphi_0} = q_1$, $u|_{\rho=a} = q_2$, где q_1 и q_2 — постоянные;

б) $u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\varphi_0} = 0$, $u|_{\rho=a} = f(\varphi)$.

10. Методом конечных разностей решить первую краевую задачу для уравнения $\Delta u = 0$ внутри прямоугольника $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, подразделяя каждую из его сторон на 8 равных частей, если граничные условия имеют вид

$$u|_{x=0} = \frac{y}{b}\left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad u|_{y=b} = \frac{x}{a} \sin \frac{\pi}{a} x, \quad u|_{x=a} = u|_{y=0} = 0.$$

Сравнить с аналитическим решением (см. Дополнение I, § 3).

11. Найти объемный потенциал сферы при постоянной плотности $\rho = \rho_0$.

Указание. Решить уравнения $\Delta u = 0$ вне сферы и $\Delta u = 4\pi\rho_0$ внутри сферы и решения сопрягать на поверхности сферы.

12. Найти потенциал простого слоя, распределенного с постоянной плотностью $\nu = \nu_0$ на сфере.

Указание. Искать решение уравнения $\Delta u = 0$ вне и внутри сферы и воспользоваться для сопряжения условиями разрыва производной потенциала простого слоя.

13. Решить первую краевую задачу для ограниченного круглого цилиндра ($\rho \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant l$):

а) на основаниях цилиндра заданы нулевые граничные условия (первого или второго рода), а на боковой поверхности

$$u|_{\rho=a} = f(z);$$

б) на боковой поверхности и на одном из оснований цилиндра заданы нулевые граничные условия (первого и второго рода), а на втором основании цилиндра

$$u = f(\rho),$$

например $f(\rho) = A\rho\left(1 - \frac{\rho}{a}\right)$.

14. Решить неоднородное уравнение

$$\Delta u = -f$$

в неограниченной цилиндрической области при нулевых граничных условиях (первого или второго рода) и построить функцию источника.

15. Найти гармоническую внутри сферы функцию, равную u_1 на одной половине сферы и u_2 на второй половине сферы.

16. Написать разложение по сферическим функциям плотности поверхностных зарядов, индуцированных на проводящей сфере точечным зарядом.

17. Решить задачу о поляризации диэлектрического шара в поле точечного заряда.

18. Вычислить гравитационный потенциал плоского диска. Сравнить с асимптотическим представлением гравитационного потенциала на больших расстояниях.

19. Вычислить магнитный потенциал кругового тока.

20. Решить задачу о возмущении плоскопараллельного электрического поля идеально проводящей сферой. Решить задачу для абсолютно непроводящей сферы.