ПРИЛОЖЕНИЯ К ГЛАВЕ IV

I. Асимптотическое выражение объемного потенциала

При изучении объемного потенциала

$$V(M)=\iiint\limits_T \frac{\rho(P)\,d\tau_P}{d}, \quad \text{где } d=R_{MP} \tag{1}$$

на больших расстояниях от тела обычно принимают значения потенциала равным m/R, где m — масса тела T, R — расстояние его центра тяжести от точки наблюдения. Установим более точное асимптотическое выражение для V[1]).

Пусть Σ — сфера с центром в начале координат, целиком содержащая тело T. Вне этой сферы потенциал будет гармонической функцией.

Расстояние от точки наблюдения $M(x, y, z)$ до переменной точки внутри тела $M_1(x_1, y_1, z_1)$ (рис. 67), по которой производится интегрирование, равно

$$d=\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos\theta}$$

$$(r=OM,\ r_1=OM_1), \tag{2}$$

откуда

$$\frac{1}{d}=\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2-2\alpha\mu}};$$

$$\alpha=r_1/r; \quad \mu=\cos\theta. \tag{3}$$

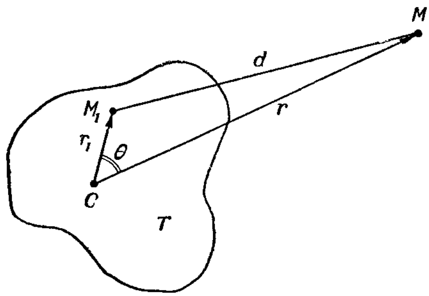

Рис. 67.

Так как $r_1<r$, то $\alpha<1$, и поэтому имеет место разложение (см. Дополнение II, ч. II, § 1)

$$\frac{1}{d}=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n(\mu), \tag{4}$$

где $P_n(\mu)$ — полином Лежандра n-го порядка (см. Дополнение II, ч. II, § 1). Подставляя это выражение в формулу (1) и учитывая, что $1/r$ не зависит от переменных интегрирования, получим:

$$V(M)=\frac{1}{r}\iiint\limits_T \rho\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n(\mu)\,d\tau=V_1+V_2+V_3+\ldots=$$

$$=\frac{1}{r}\iiint\limits_T \rho\,d\tau+\frac{1}{r^2}\iiint\limits_T \rho r_1 P_1(\mu)\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{r^3}\iiint\limits_T \rho r_1^2 P_2(\mu)\,d\tau+\ldots \tag{5}$$

[1]) В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III, Гостехиздат, 1956.

Первый член равен m/r, где m — масса всего тела, и дает нам первое приближение для вычисления потенциала при больших r.

Перейдем к вычислению следующих членов разложения (5). Подынтегральное выражение во втором члене равно

$$\rho P_1(\mu) r_1 = \rho\mu r_1 = \rho r_1 \cos\theta = \frac{\rho x x_1 + \rho y y_1 + \rho z z_1}{r}.$$

Величины x, y, z и r не зависят от переменных интегрирования и могут быть вынесены за знак интеграла. После этого второй член разложения потенциала принимает вид

$$\frac{1}{r^2}\iiint\limits_T \rho r_1 P_1(\mu)\,d\tau = \frac{1}{r^3}(M_1 x + M_2 y + M_3 z) = \frac{M}{r^3}(x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z}),$$

где

$$M_1 = \iiint\limits_T \rho x_1\,d\tau = M\bar{x}, \quad M_2 = \iiint\limits_T \rho y_1\,d\tau = M\bar{y};$$

$$M_3 = \iiint\limits_T \rho z_1\,d\tau = M\bar{z}$$

— моменты 1-го порядка, $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ — координаты центра тяжести. Таким образом, второй член убывает как $1/r^2$. Если начало координат поместить в центре тяжести ($\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$, $\bar{z} = 0$), то $V_2 = 0$.

Рассмотрим третий член разложения. Преобразуем подынтегральное выражение

$$\rho r_1^2 P_2(\mu) = \rho r_1^2 \frac{3\mu^2 - 1}{2} = \rho r_1^2 \frac{3(xx_1 + yy_1 + zz_1)^2 - r_1^2 r^2}{2r_1^2 r^2} =$$

$$= \frac{\rho}{2r^2}\left[3(x_1 x + y_1 y + z_1 z)^2 - r_1^2 r^2\right].$$

Вводя обозначения

$$M_{ik} = \iiint\limits_T \rho x_i x_k\,d\tau \quad (x = x_1;\ y = x_2;\ z = x_3),$$

приходим к следующему выражению для V_3:

$$V_3 = \frac{1}{r^3}\iiint\limits_T \rho r_1^2 P_2(\mu)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2r^5}\{x^2[3M_{11} - (M_{11} + M_{22} + M_{33})] +$$

$$+ y^2[3M_{22} - (M_{11} + M_{22} + M_{33})] + z^2[3M_{33} - (M_{11} + M_{22} + M_{33})] +$$

$$+ 2\cdot 3xyM_{12} + 2\cdot 3xzM_{13} + 2\cdot 3yzM_{23}\}.$$

Полином, стоящий в фигурных скобках, является гармоническим полиномом, так как он может быть записан в виде

$$V_3 = \frac{1}{2r^5}\{(x^2 - y^2)[M_{11} - M_{22}] - (z^2 - x^2)[M_{11} - M_{33}] + \\ + (y^2 - z^2)[M_{22} - M_{33}] + 6[xyM_{12} + xzM_{13} + yzM_{23}]\},$$

где каждое слагаемое удовлетворяет уравнению Лапласа. Коэффициенты, стоящие в квадратных скобках, выражаются через *моменты инерции*. Момент инерции тела T относительно оси x, как известно, равен

$$A = \iiint_T \rho(y_1^2 + z_1^2)\,d\tau = M_{22} + M_{33}.$$

Аналогично моменты инерции относительно осей y и z равны

$$B = M_{33} + M_{11}; \quad C = M_{11} + M_{22}.$$

Отсюда следует, что

$$M_{11} - M_{22} = B - A; \quad M_{11} - M_{33} = C - A; \quad M_{22} - M_{33} = C - B.$$

В результате мы приходим к асимптотическому выражению для потенциала

$$V \cong \frac{m}{r} + \frac{m}{r^3}(x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z}) + \frac{1}{2r^5}\{(x^2 - y^2)(B - A) + \\ + (y^2 - z^2)(C - B) + (z^2 - x^2)(A - C) + \\ + 6(xyM_{12} + yzM_{23} + zxM_{31})\}, \quad (6)$$

справедливому с точностью до членов порядка $1/r^6$.

Выражение (6) упрощается, если поместить начало координат в центре тяжести, а оси координат направить по главным осям инерции:

$$V \cong \frac{m}{r} + \frac{1}{2r^5}\{(x^2 - y^2)(B - A) + (y^2 - z^2)(C - B) + \\ + (z^2 - x^2)(A - C)\}. \quad (7)$$

Полученное асимптотическое представление потенциала позволяет ответить на ряд вопросов обратной задачи теории потенциала, заключающейся в определении характеристик тела по его потенциалу (или каким-либо его производным).

В самом деле, определяя коэффициенты разложения (6), можно найти массу, координаты центра тяжести и моменты инерции тела.

II. Задачи электростатики

В задачах электростатики решение уравнений Максвелла сводится к отысканию одной скалярной функции — потенциала φ, связанной с напряженностью поля соотношением

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi.$$