Полином, стоящий в фигурных скобках, является гармоническим полиномом, так как он может быть записан в виде

$$V_3 = \frac{1}{2r^5}\{(x^2-y^2)[M_{11}-M_{22}]-(z^2-x^2)[M_{11}-M_{33}]+ \\ +(y^2-z^2)[M_{22}-M_{33}]+6[xyM_{12}+xzM_{13}+yzM_{23}]\},$$

где каждое слагаемое удовлетворяет уравнению Лапласа. Коэффициенты, стоящие в квадратных скобках, выражаются через *моменты инерции*. Момент инерции тела T относительно оси x, как известно, равен

$$A = \iiint\limits_T \rho(y_1^2+z_1^2)\,d\tau = M_{22}+M_{33}.$$

Аналогично моменты инерции относительно осей y и z равны

$$B = M_{33}+M_{11}; \quad C = M_{11}+M_{22}.$$

Отсюда следует, что

$$M_{11}-M_{22}=B-A; \quad M_{11}-M_{33}=C-A; \quad M_{22}-M_{33}=C-B.$$

В результате мы приходим к асимптотическому выражению для потенциала

$$V \cong \frac{m}{r}+\frac{m}{r^3}(x\bar{x}+y\bar{y}+z\bar{z})+\frac{1}{2r^5}\{(x^2-y^2)(B-A)+ \\ +(y^2-z^2)(C-B)+(z^2-x^2)(A-C)+ \\ +6(xyM_{12}+yzM_{23}+zxM_{31})\}, \qquad (6)$$

справедливому с точностью до членов порядка $1/r^6$.

Выражение (6) упрощается, если поместить начало координат в центре тяжести, а оси координат направить по главным осям инерции:

$$V \cong \frac{m}{r}+\frac{1}{2r^5}\{(x^2-y^2)(B-A)+(y^2-z^2)(C-B)+ \\ +(z^2-x^2)(A-C)\}. \qquad (7)$$

Полученное асимптотическое представление потенциала позволяет ответить на ряд вопросов обратной задачи теории потенциала, заключающейся в определении характеристик тела по его потенциалу (или каким-либо его производным).

В самом деле, определяя коэффициенты разложения (6), можно найти массу, координаты центра тяжести и моменты инерции тела.

II. Задачи электростатики

В задачах электростатики решение уравнений Максвелла сводится к отысканию одной скалярной функции — потенциала φ, связанной с напряженностью поля соотношением

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi.$$

Используя уравнения Максвелла

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = -4\pi\rho,$$

получим:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho.$$

Таким образом, потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона в тех точках пространства, где находятся электрические заряды, и уравнению Лапласа — в тех точках, где зарядов нет.

1. Основной задачей электростатики является отыскание поля, создаваемого системой зарядов на заданных проводниках. При этом возможны две различные постановки этой задачи.

I. Задаются потенциалы проводников и требуется определить поле вне проводников и плотность зарядов на проводниках. Математическая формулировка задачи состоит в следующем:

требуется найти функцию φ, *удовлетворяющую уравнению Лапласа* $\Delta\varphi = 0$ *всюду вне заданной системы проводников, обращающуюся в нуль на бесконечности и принимающую заданные значения* φ_i *на поверхностях проводников* S_i:

$$\varphi|_{S_i} = \varphi_i, \qquad \varphi_i = \text{const}.$$

Таким образом, в этом случае мы приходим к первой краевой задаче для уравнения Лапласа. Единственность ее решения следует из общей теории.

II. Возможна и обратная постановка задачи. На проводниках задаются полные заряды. Требуется определить потенциалы проводников, распределение зарядов по их поверхностям и поле вне проводников. Решение этой задачи сводится к отысканию *функции* φ, *удовлетворяющей уравнению Лапласа*

$$\Delta\varphi = 0$$

вне заданной системы проводников, обращающейся в нуль на бесконечности, принимающей на поверхностях проводников некоторые постоянные значения

$$\varphi|_{S_i} = \text{const}$$

и удовлетворяющей интегральному соотношению на поверхностях проводников

$$\oint\limits_{S_i} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, d\sigma = -4\pi e_i,$$

где e_i *— полный заряд* i*-го проводника.*

2. Единственность решения второй задачи из общей теоремы не следует, но может быть легко доказана.

Предположим, что существуют два решения φ_1 и φ_2 задачи II. Тогда их разность

$$\varphi' = \varphi_1 - \varphi_2$$

будет удовлетворять уравнению

$$\Delta\varphi' = 0$$

и условиям

$$\varphi' |_{S_i} = \text{const}, \qquad \oint\limits_{S_i} \frac{\partial\varphi'}{\partial n}\, d\sigma = 0, \qquad \varphi' |_\infty = 0.$$

Заключим все заданные проводники внутрь сферы Σ_R достаточно большого радиуса R и применим к функции φ' первую формулу Грина в области T_R, ограниченной сферой Σ_R и поверхностями проводников S_i:

$$\int\limits_{T_R} (\nabla\varphi')^2\, d\tau = \int\limits_{\Sigma_R} \varphi' \frac{\partial\varphi'}{\partial n}\, d\sigma + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{S_i} \varphi' \frac{\partial\varphi'}{\partial n}\, d\sigma.$$

В силу условий на бесконечности [1]) и на поверхностях, мы получим:

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{T_R} (\nabla\varphi')^2\, d\tau = 0,$$

откуда, вследствие положительности подынтегрального выражения, следует:

$$\nabla\varphi' = 0 \quad \text{или} \quad \varphi' = \text{const}$$

всюду в рассматриваемой области. Учитывая условие на бесконечности $\varphi'|_\infty = 0$, получаем:

$$\varphi' \equiv 0,$$

что и доказывает единственность поставленной задачи.

3. Из единственности решения краевой задачи для уравнения Лапласа следует, что *потенциал уединенного проводника прямо пропорционален сообщенному ему заряду*

$$\frac{e}{\varphi} = C.$$

[1]) Из условия $\varphi'|_\infty = 0$ следует регулярность функции φ' на бесконечности (см. стр. 301), в силу чего

$$\int\limits_{\Sigma_R} \varphi' \frac{\partial\varphi'}{\partial n}\, d\sigma \to 0 \quad \text{при} \quad R \to \infty.$$

В самом деле, если на уединенный проводник поместить заряды e и $e' = me$, то соответствующие потенциалы φ и φ' должны удовлетворять уравнениям

$$\Delta\varphi = 0; \qquad \Delta\varphi' = 0$$

и граничным условиям

$$-\frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma = e; \qquad -\frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \frac{\partial\varphi'}{\partial n}\,d\sigma = me,$$

откуда и следует, что $\varphi' - m\varphi = 0$, т. е. $\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{e'}{e}$.

На поверхности уединенного проводника получаем:

$$\frac{e'}{\varphi'} = \frac{e}{\varphi} = C = \text{const}.$$

Эту постоянную C называют емкостью уединенного проводника. Она не зависит от заряда проводника, а определяется формой и размерами последнего. Таким образом, для уединенного проводника имеет место соотношение

$$e = C\varphi, \qquad C = -\frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma.$$

Емкость уединенного проводника численно равна заряду, при сообщении которого проводник приобретает потенциал, равный 1. Если проводник не уединен, то его потенциал существенно зависит от формы и расположения других проводников. Для системы проводников имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
e_1 &= C_{11}\varphi_1 + C_{12}(\varphi_2 - \varphi_1) + \ldots + C_{1n}(\varphi_n - \varphi_1),\\
e_2 &= C_{21}(\varphi_1 - \varphi_2) + C_{22}\varphi_2 + \ldots + C_{2n}(\varphi_n - \varphi_2),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
e_n &= C_{n1}(\varphi_1 - \varphi_n) + C_{n2}(\varphi_2 - \varphi_n) + \ldots + C_{nn}\varphi_n,
\end{aligned}$$

где e_i и φ_i — заряд и потенциал i-го проводника. Величина C_{ik} имеет смысл взаимной емкости i-го проводника по отношению к k-му проводнику. Она может быть определена как тот заряд, который должен быть сообщен i-му проводнику для того, чтобы все проводники, кроме k-го, имели нулевой потенциал, а k-й проводник — потенциал 1.

4. Легко показать, что *матрица коэффициентов C_{ik} является симметричной*, т. е. имеют место соотношения

$$C_{ik} = C_{ki}.$$

Для определенности рассмотрим случай двух проводников, хотя и в случае n проводников доказательство остается тем же.

Пусть заданы два проводника a и b. Тогда определение коэффициентов C_{ab} и C_{ba} сведется к определению функций $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$, удовлетворяющих уравнениям $\Delta u^{(1)}=0$ и $\Delta u^{(2)}=0$ и граничным условиям

$$u^{(1)}|_{S_a}=0;\quad u^{(1)}|_{S_b}=1;\quad u^{(1)}|_{\infty}=0,$$

$$-\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{S_a}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial n}\,d\sigma=e_a^{(1)}=C_{ab};$$

$$u^{(2)}|_{S_a}=1;\quad u^{(2)}|_{S_b}=0;\quad u^{(2)}|_{\infty}=0,$$

$$-\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{S_b}\frac{\partial u^{(2)}}{\partial n}\,d\sigma=e_b^{(2)}=C_{ba}.$$

Опишем сферу Σ_R достаточно большого радиуса R, заключающую оба проводника, a и b, и применим формулу Грина к функциям $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ в области между поверхностью Σ_R и поверхностями проводников S_a и S_b

$$\int\limits_{T_R}\left(u^{(1)}\Delta u^{(2)}-u^{(2)}\Delta u^{(1)}\right)d\tau=\int\limits_{\Sigma_R+S_a+S_b}\left(u^{(1)}\frac{\partial u^{(2)}}{\partial n}-u^{(2)}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial n}\right)d\sigma.$$

Интеграл в левой части этого равенства равен нулю. Используя граничные условия и условия в бесконечности, получим:

$$\int\limits_{S_b}\frac{\partial u^{(2)}}{\partial n}\,d\sigma-\int\limits_{S_a}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial n}\,d\sigma=0$$

или

$$C_{ab}=C_{ba},$$

что и требовалось доказать.

5. Перейдем к конкретным примерам.

Рассмотрим задачу о поле заряженного шара. Пусть на поверхности проводящего шара радиуса a задан потенциал φ_0. Решая задачу 1, легко показать, что поле и плотность зарядов на поверхности шара в этом случае будет определяться выражениями

$$\varphi=\frac{\varphi_0}{r}a\quad\text{и}\quad\sigma=\frac{\varphi_0}{4\pi a}.$$

Если вместо потенциала на поверхности шара φ_0 задан полный заряд e_0, сообщенный шару, то

$$\varphi_0=\frac{e_0}{a},\quad\sigma=\frac{e_0}{4\pi a^2},\quad\varphi=\frac{e_0}{r}\quad(r>a).$$

При этом емкость шара

$$C = a,$$

т. е. в абсолютных единицах емкость уединенного шара численно равна его радиусу.

В качестве следующего примера рассмотрим задачу о сферическом конденсаторе (система двух концентрических проводящих сфер).

Пусть внутренний шар радиуса r_1 имеет заданный потенциал V_0, а внешний шар радиуса r_2 заземлен. Тогда определение поля внутри конденсатора сводится к отысканию функции φ, удовлетворяющей уравнению

$$\Delta\varphi = 0$$

и условиям

$$\varphi|_{r_1} = V_0, \quad \varphi|_{r_2} = 0.$$

Легко показать, что в этом случае

$$\varphi = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} V_0 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right),$$

а емкость сферического конденсатора равна

$$C = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

Более сложной задачей является определение потенциала сферы в присутствии другой сферы, не концентрической с данной. Эта задача решается методом отражений. Аналитическое решение довольно громоздко, и мы здесь приводить его не будем[1]).

6. Перейдем к двумерным задачам.

В качестве примера рассмотрим цилиндрический конденсатор, образованный двумя бесконечно длинными коаксиальными цилиндрами, на одном из которых равномерно распределен электрический заряд. Очевидно, что решение задачи одинаково во всех плоскостях, параллельных плоскости нормального сечения цилиндра. Поэтому задачу можно рассматривать как плоскую и вместо полного заряда задавать заряд на единицу длины $\varkappa$.

Если внешний цилиндр радиуса r_2 заземлен, а на внутреннем — радиуса r_1 — задан заряд $\varkappa$, то потенциал поля в конденсаторе определяется выражением

$$\varphi = 2\varkappa \ln \frac{r}{r_2},$$

[1]) См. Франк и Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, т. II, стр. 713, 1937.

а емкость единицы длины цилиндрического конденсатора равна

$$C = \frac{1}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Рассмотренный пример позволяет решить более сложную задачу определения емкости провода, расположенного над проводящей плоскостью. Пусть над бесконечной плоскостью на расстоянии l от нее находится бесконечно длинный провод радиуса ρ, на котором распределен заряд с плотностью $\varkappa$ (заряд на единицу длины). Ясно, что и эта задача может решаться как двумерная.

III. Основная задача электроразведки

Для изучения неоднородности земной коры в целях разведки полезных ископаемых широко применяются электрические методы. Основная схема электроразведки постоянным током заключается в следующем. При помощи заземленных электродов в землю пропускается ток от питающей батареи. На поверхности земли измеряются напряжения созданного таким образом поля постоянного тока. При помощи наблюдений на поверхности определяют подземную структуру. Методы определения подземных структур (интерпретация наблюдений) базируются на математическом решении соответствующих задач.

Потенциал поля постоянного тока в однородной среде удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta V = 0 \quad (z > 0) \tag{1}$$

при дополнительном условии

$$\left. \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \tag{2}$$

которое означает, что вертикальная составляющая плотности тока[1]) на («дневной») поверхности $z = 0$ равна нулю, так как полупространство $z < 0$ (воздух) непроводящее.

Рассмотрим точечный электрод на границе полупространства в точке A. Очевидно, что потенциал поля будет равен

$$V = \frac{I\rho}{2\pi R}, \tag{3}$$

где R — расстояние от источника A, ρ — удельное сопротивление среды, а I — сила тока. Эта функция отличается от функции источника в неограниченном пространстве коэффициентом 2 в силу условия (2).

---

[1]) См. стр. 278.